Вісник Харківського національного університету імені В.Н. Каразіна
Серія "Математика, прикладна математика і механіка"
УДК 517.981 № 850, 2009, с.78–82

Редукция аксиом линейного пространства

R. Leśniewicz
Uniwersytet Szczecinski, Instytut Matematyki,
Wielkopolska str., 15, Institute of Mathematics, Szczecin, Poland

Предлагается определение линейного (векторного) пространства на основе только 4 аксиом.

2000 Mathematics Subject Classification 15A03.

Понятие линейного пространства, называемого также векторным пространством, хорошо известно известно более ста лет. С определением этого понятия современные студенты знакомятся на лекциях по по математике уже на первом году обучения как математических, так и технических специальностей.

Определение линейного пространства данное на лекциях и в учебниках содержит 7 или 8 условий, которые должны выполняться для этого пространства, так называемых аксиом. Не буду их приводить, поскольку они хорошо известны.

Много лет назад профессор Збигнев Семадени предложил мне задачу уменьшения количества аксиом в определении линейного пространства.

Теперь я могу представить определение этого пространства, содержащего только четыре аксиомы. Очевидно, что замена ранее употребляемых определений моим определением, предложенным ниже, не изменит сути понятия линейного пространства. Мое определение является некоторой дидактической любопытной подробностью. Вот это определение:

Линейным (векторным) пространством над полем K, или коротко *линейным пространством*, назовем не пустое множество $\mathbb{X}$, в котором определены две операции: сложение элементов, состоящее в том, что каждой паре элементов $x, y \in \mathbb{X}$ поставлен в соответствие элемент множества $\mathbb{X}$, называемый их суммой и обозначаемый через $x+y$; и умножение элементов на числа, состоящее в том, что каждому числу $\alpha \in K$ и каждому элементу $x \in \mathbb{X}$ поставлен в соответствие элемент множества $\mathbb{X}$, называемый их произведением и обозначаемый через αx, а также для произвольных элементов $x, y, z \in \mathbb{X}$ и произвольных чисел $\alpha, \beta \in K$ выполняются следующие условия (аксиомы):

$(L1)$ $(x + y) + z = (z + y) + x$;

$(L2)$ $(\alpha + \beta)(x + y) = (\alpha x + \alpha y) + (\beta x + \beta y)$;

$(L3)$ $\alpha(\beta x) = (\alpha\beta)x$;

$(L4)$ $x = 1x + 0y$.

Элементы множества $\mathbb{X}$ называются векторами. Условия $(L2)$, $(L3)$ записаны согласно общеизвестным требованиям уменьшения количества скобок, а умножение элементов на числа имеет приоритет в отношении сложения элементов.

Эта система аксиом содержит закон для сложения векторов $(L1)$, закон раздельности операций $(L2)$, закон ассоциативности для умножения векторов на числа $(L3)$, закон $(L4)$, который назовем стартовым законом.

Читатель легко заметит, что приведенные условия выполняются для известного ему определения линейного пространства. Требуется лишь проверить, что в линейном пространстве, определенном аксиомами $(L1)$–$(L4)$, будут справедливы все известные аксиомы.

Утверждение 1. *Для произвольного элемента x линейного пространства $\mathbb{X}$ справедливо равенство*

$$1x = x.$$

Доказательство. Подставим в $(L4)$ вместо x произведение $1x$ и на основании $(L3)$ получим

$$1x = 1(1x) + 0y = (1 \cdot 1)x + 0y = 1x + 0y = x.$$

Далее из не пустого множества $\mathbb{X}$ выбираем элемент, обозначим его через u. Определим в линейном пространстве $\mathbb{X}$ нулевой вектор или коротко ноль, который обозначим через Θ, положив $\Theta := 0u$.

Утверждение 2. *Для произвольного элемента x линейного пространства $\mathbb{X}$ справедливо равенство*

$$\Theta = 0x.$$

Доказательство. Положим в $(L4)$ вместо x произведение $0x$, а вместо y подставим u. Тогда на основании $(L3)$ имеем

$$0x = 1(0x) + 0u = (1 \cdot 0)x + 0u = 0x + 0u. \tag{1}$$

Меняя местами x и u, получаем

$$0u = 0u + 0x. \tag{2}$$

Подставляя u вместо x в (1) или (2), также имеем

$$0u = 0u + 0u. \tag{3}$$

Теперь, используя последовательно (1), (1), ($L1$), (3), (2), получаем

$$0x = 0x + 0u = (0x + 0u) + 0u = (0u + 0u) + 0x = 0u + 0x = 0u = \Theta.$$

Принимая во внимание результаты утверждений 1 и 2, из ($L4$) получаем

Утверждение 3. *Для произвольного элемента x линейного пространства $\mathbb{X}$ справедливо равенство*

$$x = x + \Theta.$$

Теперь можем установить

Утверждение 4. *Для произвольных элементов x, y линейного пространства $\mathbb{X}$ справедливо равенство*

$$x + y = y + x,$$

т.е. коммутативность операции сложения.

Доказательство. В ($L1$) вместо y положим Θ и вместо z положим y, тогда имеем

$$(x + \Theta) + y = (y + \Theta) + x,$$

откуда на основании утверждения 3 получаем доказываемое равенство.

На основании этого утверждения легко получаем из ($L1$)

Утверждение 5. *Для произвольных элементов x, y, z, линейного пространства $\mathbb{X}$ справедливо равенство*

$$(x + y) + z = x + (y + z),$$

то есть ассоциативность сложения.

Далее установим

Утверждение 6. *Для произвольных элементов x, y линейного пространства $\mathbb{X}$ и произвольного числа $\alpha \in K$ справедливо равенство*

$$\alpha(x + y) = \alpha x + \alpha y.$$

Доказательство. На основании ($L2$), а также утверждений 2 и 3 получаем

$$\alpha(x + y) = (\alpha + 0)(x + y) = (\alpha x + \alpha y) + (0x + 0y) = (\alpha x + \alpha y) + (\Theta + \Theta) =$$

$$= (\alpha x + \alpha y) + \Theta = \alpha x + \alpha y.$$

Справедливо также

Утверждение 7. *Для произвольного элемента x линейного пространства $\mathbb{X}$ и произвольных чисел $\alpha, \beta \in K$ справедливо равенство*

$$(\alpha+\beta)x = \alpha x + \beta x.$$

Доказательство. Используя последовательно $(L4)$, $(L2)$, $(L3)$ и утверждение 3, получаем

$$(\alpha+\beta)x = (\alpha+\beta)(1x+0x) = (\alpha(1x)+\alpha(0x)) + (\beta(1x)+\beta(0x)) =$$

$$= ((\alpha\cdot 1)x + (\alpha\cdot 0)x) + ((\beta\cdot 1)x + (\beta\cdot 0)x) = (\alpha x + 0x) + (\beta x + 0x) =$$

$$= (\alpha x + \Theta) + (\beta x + \Theta) = \alpha x + \beta x.$$

Продолжая, определяем противоположный элемент к элементу $x \in \mathbb{X}$ равенством $-x := (-1)x$. Итак получаем

Утверждение 8. *Для произвольного элемента x линейного пространства $\mathbb{X}$ справедливы равенства*

$$-(-x) = x, \quad x + (-x) = \Theta.$$

Доказательство. Первое равенство получаем на основании $(L3)$ и утверждения 1:

$$-(-x) = (-1)((-1)x) = ((-1)(-1))x = 1x = x,$$

а второе — на основании последовательного применения утверждений 1, 7 и 2:

$$x + (-x) = 1x + (-1)x = (1+(-1))x = 0x = \Theta.$$

В заключение установим

Утверждение 9. *Для произвольных элементов x, y, z линейного пространства $\mathbb{X}$ справедлива импликация*

$$\text{*если*} \quad x + y = y + z, \quad \text{*то*} \quad x = y.$$

Доказательство. Пусть $x + z = y + z$, тогда имеем также равенство

$$(x+z) + (-z) = (y+z) + (-z).$$

На основании утверждений 3, 8, 5 следует, что

$$x = x + \Theta = x + (z + (-z)) = (x+z) + (-z) = (y+z) + (-z) =$$

$$= y + (z + (-z)) = y + \Theta = y.$$

Полагаю, что выше приведенные утверждения полностью удовлетворяют как читателей, знающих определение линейного пространства на основе 7 аксиом, так и читателей, знающих определение этого пространства на основе 8 аксиом.

Статья получена: 11.02.2009; окончательный вариант: 13.04.2009; принята: 16.04.2009.