1. КОНСПЕКТ ЛЕКЦІЙ (модуль №1)

1.1. Функції обмеженої варіації (модуль №1).

При вивченні даного курсу будемо вважати, що функція $f(x)$ задана і скінченна на відрізку $D_f = [a,b]$.

1. Монотонні функції.

🗁Означення 1.1.

$f(x)$ – *зростаюча* $(\nearrow) \overset{def}{\Leftrightarrow} \forall x_1, x_2 \in D_f \quad x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$,

$f(x)$ – *спадна* $(\searrow) \overset{def}{\Leftrightarrow} \forall x_1, x_2 \in D_f \quad x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$,

$f(x)$ – *неспадна* $\overset{def}{\Leftrightarrow} \forall x_1, x_2 \in D_f \quad x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \le f(x_2)$,

$f(x)$ – *незростаюча* $\overset{def}{\Leftrightarrow} \forall x_1, x_2 \in D_f \quad x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \ge f(x_2)$,

$f(x)$ – *монотонна* $\overset{def}{\Leftrightarrow} f(x)$ – зростаюча або спадна,

$f(x)$ – *нестрого монотонна* $\overset{def}{\Leftrightarrow} f(x)$ – незростаюча або неспадна.

Приклад 1.1.

1. $y = x^2$ *на* $x \in [0;+\infty]$ $\nearrow$ (рис. 1.1), оскільки

$$\left.\begin{matrix} x_1, x_2 \in [0,+\infty) \\ x_1 < x_2 \\ x_1 < x_2 \end{matrix}\right\} \Rightarrow x_1 \cdot x_1 < x_2 \cdot x_2 \Rightarrow (x_1)^2 < (x_2)^2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2).$$

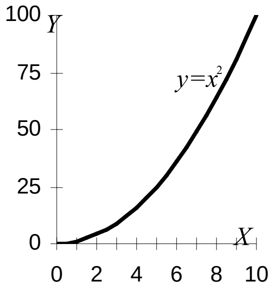

Рис. 1.1.

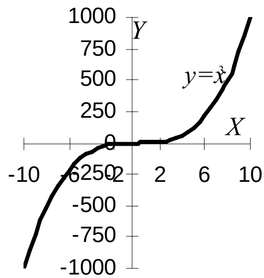

Рис. 1.2.

2. $y = x^3$ на $\mathbb{R}$ $(\nearrow)$ (рис. 1.2).

(Довести самостійно ✍!)

Для подальшого не є суттєвим строга або нестрога монотонність функції. Тому надалі, вживаючи терміни «зростаюча», «спадна», «монотонна» функції будемо розуміти в загальному випадку, що йдеться про «неспадну», «незростаючу», «нестрого монотонну» функції.

Як правило, будемо розглядати зростаючі функції, оскільки будь-яка спадна функція $f(x)$ може бути представлена наступним чином $f(x) = -(-f(x))$, де $(-f(x))$ – зростаюча функція.

Лема 1.1. Якщо $f(x)$ – монотонна на $\left[c;b\right] \Rightarrow$

$$\left(\forall a \in (c,b) \quad \exists \lim_{x \to a+0} f(x) = f(a+0) \wedge \lim_{x \to a-0} f(x) = f(a-0)\right) \wedge$$
$$\wedge \exists \lim_{x \to c+0} f(x) \wedge \exists \lim_{x \to b-0} f(x).$$

Доведення. Нехай $f(x) - \nearrow$ на $\left[c;b\right]$. Доведемо, що $\exists f(a+0)$. Розглянемо допоміжну множину $A = \left\{ f(x) : x \in (a;b) \right\}$. Оскільки

$$\left.\begin{matrix} a < x < b \\ f(x) - \nearrow \end{matrix}\right\} \Rightarrow f(a) < f(x) < f(b),$$

то множина A обмежена знизу числом $f(a) \Rightarrow \exists \gamma = \inf A$.

Довести: $\gamma = \inf A = \lim\limits_{x \to a+0} f(x)$.

$$\left.\begin{matrix} \gamma = \inf A \overset{def}{\Rightarrow} \forall \varepsilon > 0\ \exists 0 < \delta < b-a : \gamma \le f(a+\delta) < \gamma + \varepsilon \\ \left.\begin{matrix} \forall x \in [c,b) \quad a \le x < a+\delta \\ f(x) \nearrow \end{matrix}\right\} \Rightarrow f(a) \le f(x) < f(a+\delta) \end{matrix}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \qquad f(a) \le \gamma \le f(x) \le f(a+\delta) < \gamma+\varepsilon \qquad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \forall x \in [c,b) \quad a \le x < a+\delta \Rightarrow \left| f(x) - \gamma \right| \le \varepsilon .$$

Висновок: $\lim\limits_{x \to a+0} f(x) = \gamma$. ■

Наслідок 1.1.

I. $f(x) \nearrow$ на $\left[c;b\right]$

$$\Rightarrow \begin{cases} (1) \quad c < a_1 < x < b \Rightarrow f(c) \le f(a_1) \le f(a_1+0) \le f(x) \le f(b), \\ (2) \quad c < y < a_2 < b \Rightarrow f(c) \le f(y) \le f(a_2-0) \le f(a_2) \le f(b). \end{cases}$$

II. $f(x) \searrow$ на $\left[c;b\right]$

$$\Rightarrow \begin{cases} (1) \quad c < a_1 < x < b \Rightarrow f(c) \ge f(a_1) \ge f(a_1+0) \ge f(x) \ge f(b), \\ (2) \quad c < y < a_2 < b \Rightarrow f(c) \ge f(y) \ge f(a_2-0) \ge f(a_2) \ge f(b). \end{cases}$$

Доведення.

$$\left.\begin{aligned} c < a_1 < x < b, \\ f(x)\nearrow, \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left.\begin{aligned} f(c) \le f(a_1) \le f(x) \le f(b), \\ x \to a_1 + 0 - \textit{граничний} \quad \textit{перехід}, \end{aligned}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f(c) \le f(a_1) \le f(a_1+0) \le f(x) \le f(b).$$

Обґрунтуємо останню нерівність. А саме, перевіримо виконання імплікації

$$c < a_1 < x < b \overset{?}{\Rightarrow} f(a_1+0) \le f(x).$$

Із доведення леми 1.1 випливає

$$\left.\begin{aligned} \gamma = \inf A = f(a_1+0), \\ f(x) \in A, \end{aligned}\right\} \Rightarrow f(a_1+0) \le f(x). \ \blacksquare$$

Висновок із леми 1.1. Монотонна функція може мати розриви лише першого роду.

Означення 1.2. Якщо функція $f(x)$ в точці c має розрив першого роду, то

правий її стрибок в точці c $\overset{def}{\Leftrightarrow}$ значення виразу $f(c+0) - f(c)$,

лівий її стрибок в точці c $\overset{def}{\Leftrightarrow}$ значення виразу $f(c) - f(c-0)$,

повний її стрибок в точці c $\overset{def}{\Leftrightarrow}$ значення виразу $f(c+0) - f(c-0)$.

У крайніх точках множини визначення $D_f = [a, b]$ функція може мати лише односторонні стрибки. А саме: в точці a – правий стрибок, рівний $f(a+0) - f(a)$, а в точці b – лівий, рівний $f(b) - f(b-0)$

У випадку, коли функція $f(x)$ неперервна в точці c, то $f(c+0) = f(c) = f(c-0)$, тому усі її стрибки дорівнюють нулю.

Лема 1.2. Якщо $f(x) - \nearrow$ на $[a, b]$, а $\{x_k\}_{k=1}^{n} \subset (a, b)$ – її точки розриву, тоді має місце нерівність

$$f(a+0) - f(a) + \sum_{k=1}^{n} \Big[f\big(x_k + 0\big) - f\big(x_k - 0\big) \Big] + f(b) - f(b-0) \le$$

$$\le f(b) - f(a). \qquad (1.1)$$

Доведення. Без обмеження загальності міркувань можна вважати, що точки розриву функції $\{x_k\}_{k=1}^{n}$ перенумеровані у порядку збільшення їх значень. Розглянемо допоміжні точки $\{y_k\}_{k=1}^{n+1}$ такі, що

$$a < y_1 < x_1 < y_2 < x_2 < \ldots < y_k < x_k < y_{k+1} < \ldots < y_n < x_n < y_{n+1} < b.$$

Тоді завдяки зростанню функції і наслідку 1.1 отримаємо:

$$\left.\begin{array}{l}
a < y_1 \qquad \Rightarrow \qquad f(a+0) - f(a) \le f(y_1) - f(a), \\
y_1 < x_1 < y_2 \ \Rightarrow f(x_1+0) - f(x_1-0) \le f(y_2) - f(y_1), \\
y_2 < x_2 < y_3 \ \Rightarrow f(x_2+0) - f(x_2-0) \le f(y_3) - f(y_2), \\
\ldots \\
y_k < x_k < y_{k+1} \Rightarrow f(x_k+0) - f(x_k-0) \le f(y_{k+1}) - f(y_k), \\
\ldots \\
y_n < x_n < y_{n+1} \ \Rightarrow f(x_n+0) - f(x_n-0) \le f(y_{n+1}) - f(y_n), \\
y_{n+1} < b \qquad \Rightarrow \qquad f(b) - f(b-0) \le f(b) - f(y_{n+1}),
\end{array}\right\} (+) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f(a+0) - f(a) + f(x_1+0) - f(x_1-0) + f(x_2+0) - f(x_2-0) + \ldots +$$
$$+ f(x_k+0) - f(x_k-0) + \ldots + f(x_n+0) - f(x_n-0) + f(b) - f(b-0) \le$$
$$\le f(b) - f(a). \ \blacksquare$$

Наслідок 1.2. Якщо $f(x) - \nearrow$ на $[a,b]$, то множина її точок розриву, стрибки в яких неменші за σ, є скінченною.

Доведення. Із нерівності (1.1) випливає, що сума усіх стрибків зверху оцінюється різницею $f(b) - f(a)$, а знизу (за умовою) – значенням виразу $n\sigma$. Отже, отримаємо $n\sigma \le f(b) - f(a)$. Звідки випливає, що кількість n точок розриву функції, стрибки в яких неменші за σ, може бути лише скінченною. ■

Теорема 1.1. Якщо $f(x) - \nearrow$ на $[a,b]$, то множина її точок розриву не більш, ніж зчисленна. Крім того, має місце нерівність

$$f(a+0) - f(a) + \sum_k \left[f\left(x_k+0\right) - f\left(x_k-0\right) \right] + f(b) - f(b-0) \le$$
$$\le f(b) - f(a), \qquad (1.2)$$

де $\{x_k\}_k \subset (a,b)$ – усі точки розриву даної функції.

Доведення. Через A_n позначимо множину точок розриву функції, стрибки в яких неменші за $1/n$ ($n \in \mathbb{N}$). За наслідком із леми 1.2 кожна із множин A_n ($n \in \mathbb{N}$) є скінченною. Множина A усіх точок розриву функції є об'єднанням множин A_n ($n \in \mathbb{N}$), тобто $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$. Таким чином, множина A, як зчисленне об'єднання скінченних множин, є не більш, ніж зчисленною. Першу частину теореми доведено.

Якщо функція має скінченну множину точок розриву, то нерівність (1.2) перетворюється в нерівність (1.1). Якщо ж ця множина зчисленна, то після здійснення в нерівності (1.1) граничного переходу при $n \to \infty$ отримаємо нерівність (1.2). ■

Означення 1.3. Нехай $f(x)$ задана на $[a,b]$, тоді *функцією стрибків* даної функції називається функція $s(x)$, задана співвідношеннями:

$$s(a) = 0,$$

$$s(x) = f(a+0) - f(a) + \sum_{x_k < x} \left[f\left(x_k + 0\right) - f\left(x_k - 0\right) \right] + f(x) - f(x-0),$$

де $\{x_k\}_k \subset (a,b)$ – точки розриву даної функції.

Теорема1.2. Різниця між зростаючою функцією і функцією її стрибків є зростаюча неперервна функція.

Доведення. Позначимо зазначену в теоремі функцію через $\varphi(x)$, тобто $\varphi(x) = f(x) - s(x)$. Нехай $a < x < y < b$, тоді

$$s(y) - s(x) =$$

$$= \left[f(a+0) - f(a) \right] + \sum_{x_k < y} \left[f\left(x_k + 0\right) - f\left(x_k - 0\right) \right] + \left[f(y) - f(y-0) \right] -$$

$$- \left[f(a+0) - f(a) \right] - \sum_{x_k < x} \left[f\left(x_k + 0\right) - f\left(x_k - 0\right) \right] - \left[f(x) - f(x-0) \right] =$$

$$= \sum_{x_k < x} \left[f\left(x_k + 0\right) - f\left(x_k - 0\right) \right] + \left[f(x+0) - f(x-0) \right] +$$

$$+ \sum_{x < x_k < y} \left[f\left(x_k + 0\right) - f\left(x_k - 0\right) \right] + \left[f(y) - f(y-0) \right] -$$

$$- \sum_{x_k < x} \left[f\left(x_k + 0\right) - f\left(x_k - 0\right) \right] - \left[f(x) - f(x-0) \right] =$$

$$= \left[f(x+0) - f(x) \right] + \sum_{x < x_k < y} \left[f\left(x_k + 0\right) - f\left(x_k - 0\right) \right] + \left[f(y) - f(y-0) \right].$$

Оскільки $f(x) - \nearrow$ на $[x,y]$, то до отриманого виразу можна застосувати нерівність (1.2). Тоді

$$s(y) - s(x) =$$

$$= \left[f(x+0) - f(x) \right] + \sum_{x < x_k < y} \left[f\left(x_k + 0\right) - f\left(x_k - 0\right) \right] + \left[f(y) - f(y-0) \right] \leq$$

$$\leq f(y) - f(x).$$

Звідки

$$f(x) - s(x) \leq f(y) - s(y),$$

$$\varphi(x) \leq \varphi(y). \tag{1.3}$$

Монотонне зростання функції $\varphi(x)$ доведено.

Доведемо тепер неперервність функції $\varphi(x)$ в точці x. Для цього потрібно довести , що

$$\varphi(x-0)=\varphi(x)=\varphi(x+0).$$

Доведемо лише другу рівність, перша доводиться аналогічно.

Здійснимо граничний перехід під знаком нерівності (1.3) при $y\to x+0$, одержимо

$$\varphi(x)\le\varphi(x+0). \tag{1.4}$$

Оскільки

$$s(y)-s(x)=$$

$$=\underbrace{\left[f(x+0)-f(x)\right]}_{\oplus}+\sum_{x<x_k<y}\underbrace{\left[f\left(x_k+0\right)-f\left(x_k-0\right)\right]}_{\oplus}+\underbrace{\left[f(y)-f(y-0)\right]}_{\oplus}\ge$$

$$\ge f(x+0)-f(x),$$

тобто

$$s(y)-s(x)\ge f(x+0)-f(x),$$

то, здійснивши граничний перехід в останній нерівності при $y\to x+0$, отримаємо

$$s(x+0)-s(x)\ge f(x+0)-f(x),$$

$$\varphi(x)\ge\varphi(x+0). \tag{1.5}$$

Із нерівностей (1.4) і (1.5) матимемо: $\varphi(x)=\varphi(x+0)$. Теорему повністю доведено. ■

Наведені вище твердження здійснюються також і для спадної функції, за тією лише відмінністю, що праві частини нерівностей (1.1) і (1.2) будуть виражатися різницею $f(a)-f(b)$.

2. Відображення множин.

🗁**Означення 1.4.** Нехай $A\subset X=D\left(f\right)$, тоді *образом множини A* при відображенні $f:X\to Y$ називається множина в Y вигляду $f\left(A\right)=\left\{f\left(x\right):x\in A\right\}$.

Наприклад,

$$\left.\begin{aligned}&f\left(x\right)=x^2,\\&A=\left[-1;2\right],\end{aligned}\right\}\Rightarrow f\left(A\right)=\left[0;4\right].$$

🗁**Означення 1.5.** Нехай $B\subset Y$, тоді *прообразом множини B* при відображенні $f:X\to Y$ називається множина в X вигляду $f^{-1}\left(B\right)=\left\{x\in D(f):f\left(x\right)\in B\right\}$.

Наприклад,

1) $\left.\begin{array}{l} f(x)=x^2, \\ B=(0;2], \end{array}\right\} \Rightarrow f^{-1}(B)=\left[-\sqrt{2};0\right)\cup\left(0;\sqrt{2}\right];$

2) Нехай $[x]$ – ціла частина дійсного числа x: найбільше ціле число, що не перевищує x, тоді

$$\left.\begin{array}{l} f(x)=[x], \\ B=\{1\}, \end{array}\right\} \Rightarrow f^{-1}(B)=[1;2).$$

Теорема 1.3 *(властивості образа)***.** Нехай $f: X\to Y$, $A, A_1, A_2, \{A_k\}_k \subset X$.

1. Якщо $A_1\subset A_2$, то $f(A_1)\subset f(A_2)$.

2. Якщо $A=\bigcup\limits_k A_k$, то $f(A)=\bigcup\limits_k f(A_k)$.

3. Якщо $A=\bigcap\limits_k A_k$, то $f(A)\subseteq\bigcap\limits_k f(A_k)$. У випадку, коли $f: X\to f(X)$ – взаємно однозначне відображення, то $f(A)=\bigcap\limits_k f(A_k)$.

Доведення.

1. $\left.\begin{array}{l} y\in f(A_1), \\ A_1\subset A_2, \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{array}{l} \text{(за def образу) } \exists x\in A_1: y=f(x), \\ A_1\subset A_2, \end{array}\right\} \Rightarrow$

$\Rightarrow$ (за def включення множин)$(x\in A_2 : y=f(x)\Rightarrow$

$\Rightarrow$ (за def образу)$y\in f(A_2)$.

Маємо: $y\in f(A_1)\Rightarrow y\in f(A_2)$. Це означає, що $f(A_1)\subset f(A_2)$.

2. $\left.\begin{array}{l} y\in f(A), \\ A=\bigcup\limits_k A_k, \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{array}{l} \text{(за def образу) } \exists x\in A: y=f(x), \\ A=\bigcup\limits_k A_k, \end{array}\right\} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow$ (за def об'єднання) $\exists k:\big(x\in A_k \wedge y=f(x)\big)\Rightarrow$

$\Rightarrow$ (за def образу)$\exists k: y\in f(A_k)\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow$ (за def об'єднання) $y\in\bigcup\limits_k f(A_k)$.

Маємо: $y\in f(A)\Rightarrow y\in\bigcup\limits_k f(A_k)$. Це означає, що

$$f(A)\subseteq\bigcup_k f(A_k).$$

Доведемо включення в інший бік.

$$y \in \bigcup_k f(A_k) \Leftrightarrow \text{(за def об'єднання)} \exists k_0 : y \in f(A_k) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \text{(за def образу) } \exists k_0 \underline{\exists x_{k_0} \in A_k} : y = f(x_{k_0}) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \text{(за def об'єднання)}\, x_{k_0} \in \bigcup_k A_k = A \wedge y = f(x_{k_0}) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \text{(за def образу)}\, y \in f(A).$$

Маємо: $y \in \bigcup_k f(A_k) \Rightarrow y \in f(A)$. Це означає, що

$$\bigcup_k f(A_k) \subseteq f(A).$$

Два доведені включення відповідають означенню рівності множин.

3. $$\left.\begin{array}{l} y \in f(A), \\ A = \bigcap_k A_k, \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{array}{l} \text{(за def образу) } \exists x \in A : y = f(x), \\ A = \bigcap_k A_k, \end{array}\right\} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \text{(за def перетину) } \big(x \in A_k \wedge y = f(x)\big) \,\forall k \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \text{(за def образу)}\, y \in f(A_k) \forall k \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \text{(за def перетину)}\, y \in \bigcap_k f(A_k).$$

Маємо: $y \in f(A) \Rightarrow y \in \bigcap_k f(A_k)$. Це означає, що

$$f(A) \subseteq \bigcap_k f(A_k). \tag{1.6}$$

Обернути єдину імплікацію в ланцюгу перетворень висловлювань неможна, оскільки поява зворотної імплікації у вигляді

$$y \in f(A_k) \forall k \Rightarrow \text{(за def образу)} \forall k \underline{\exists x_k \in A_k} \wedge y = f(x_k)$$

не дозволить завершити доведення.

В загальному випадку рівність $f(A) = \bigcap_k f(A_k)$ дійсно не виконується. Так, для функції $f(x) = x^2$ і множин $A_1 = [-1; 2]$ і $A_2 = [-2; 1]$ маємо:

$$\left.\begin{array}{l} f(A_1) = f(A_2) = [0;4]; \quad f(A_1) \cap f(A_2) = [0;4]; \\ A_1 \cap A_2 = [-1;1]; \quad f(A_1 \cap A_2) = [0;1]; \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f(A_1) \cap f(A_2) \neq f(A_1 \cap A_2)$$

Припустимо тепер, що відображення $f: X \to f(X)$ – взаємно однозначне, тоді воно має обернене $g(y) = f^{-1}(y)$. Для цього відображення застосуємо властивість 1:

$$f(A) \subseteq \bigcap_k f(A_k) \quad \Rightarrow \quad g\left(f(A)\right) \subseteq g\left(\bigcap_k f(A_k)\right).$$

Оскільки відображення $g(y)$ і $f(x)$ взаємно обернені, то $g\left(f(A)\right) = A = \bigcap_k A_k$. Звідки $\bigcap_k A_k \subseteq g\left(\bigcap_k f(A_k)\right)$. Застосуємо властивість 1 для відображення $f(x)$:

$$\bigcap_k A_k \subseteq g\left(\bigcap_k f(A_k)\right) \quad \Rightarrow \quad f(A) \subseteq f\left(g\left(\bigcap_k f(A_k)\right)\right).$$

Знову пригадавши про взаємну оберненість відображень, отримаємо:

$$f(A) \subseteq \bigcap_k f(A_k). \tag{1.7}$$

Для взаємно однозначного відображення із (1.6) і (1.7) отримаємо рівність $f(A) = \bigcap_k f(A_k)$. Теорему повністю доведено. ■

Як можна побачити із доведення останньої теореми, образ перетину не завжди дорівнює перетину образів. Рівність має місце лише у випадку, коли відображення є взаємно однозначним. Прикладом такого відображення може виступати строго монотонна, неперервна на відрізку $[a,b]$ функція, яка, як відомо із основного курсу математичного аналізу, є монотонною і неперервною на відрізку $[f(a); f(b)]$ у випадку зростаючої функції або на відрізку $[f(b); f(a)]$ у випадку спадної функції.

Теорема 1.4 *(властивості прообраза)*. (✍ Доведення здійснити самостійно!) Нехай $f: X \to Y$, $B, B_1, B_2, \{B_k\}_k \subset Y$.

1. Якщо $B_1 \subset B_2$, то $f^{-1}(B_1) \subset f^{-1}(B_2)$.
2. Якщо $B = \bigcup_k B_k$, то $f^{-1}(B) = \bigcup_k f^{-1}(B_k)$.
3. Якщо $B = \bigcap_k B_k$, то $f^{-1}(B) = \bigcap_k f^{-1}(B_k)$.

3. Множина на прямій лебегової міри нуль.

🗀**Означення 1.6.** Множина *A має лебегову міру нуль,* якщо усі її точки можна покрити не більш, ніж зчисленною кількістю інтервалів, з сумою довжин, меншою за ε, тобто

$$\mu A = 0 \overset{def}{\Leftrightarrow} \forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, \{(\alpha_k, \beta_k)\}_{k\in I} : \bigcup_{k\in I} (\alpha_k, \beta_k) \supset A \wedge \sum_{k\in I} (\beta_k - \alpha_k) < \varepsilon\ .$$

У випадку, коли $I = \{1, 2, ..., n\}$ – скінченна індексна множина, то сума довжин інтервалів дорівнює $\sum_{k\in I}(\beta_k - \alpha_k) = \sum_{k=1}^{n}(\beta_k - \alpha_k) < \varepsilon$, а у випадку, коли $I = \mathbb{N}$ – зчисленна індексна множина, то $\sum_{k\in I}(\beta_k - \alpha_k) = \lim_{N\to\infty}\sum_{k=1}^{N}(\beta_k - \alpha_k) < \varepsilon$.

Приклад 1.2. **1**. Будь-яка скінченна множина на числовій прямій має нульову міру Лебега.

Дійсно, нехай така множина утворюється із N дійсних чисел. Кожну точку множини покриємо інтервалом (α_k, β_k) довжини $\frac{\varepsilon}{2N} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \sum_k (\alpha_k, \beta_k) \le N \cdot \frac{\varepsilon}{2N} = \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon\ .$$

2. Доведемо, що будь-яка зчисленна множина має лебегову міру нуль.

Оскільки множина є зчисленною, то перенумеруємо її елементи: $\{r_n\}_{n=1}^{\infty}$. Покриємо кожну точку r_n окремо інтервалом (α_n, β_n) довжини, меншої за $\frac{\varepsilon}{2^n}$ $(n \in \mathbb{N})$. Тоді

$$\lim_{N\to\infty}\sum_{k=1}^{N}(\beta_k - \alpha_k) < \lim_{N\to\infty}\sum_{n=1}^{N}\frac{\varepsilon}{2^n} = \varepsilon \cdot \frac{\frac{1}{2}}{1 - \frac{1}{2}} = \varepsilon\ .$$

3. Розглянемо множину Кантора. Вона будується наступним чином. Відрізок $[0;1]$ ділимо на 3 рівні частини і відкидаємо точки середнього інтервалу $\left(\frac{1}{3}; \frac{2}{3}\right)$. Ті відрізки, що залишилися, ділимо кожний на 3 рівні частини і із кожного відкидаємо середній інтервал, тобто відкидаємо точки інтервалів $\left(\frac{1}{9}; \frac{2}{9}\right)$ і $\left(\frac{7}{9}; \frac{8}{9}\right)$. Потім знову ті відрізки, що залишилися, ділимо на 3 частини і відкидаємо середні інтервали, тобто $\left(\frac{1}{27}; \frac{2}{27}\right)$, $\left(\frac{7}{27}; \frac{8}{27}\right)$, $\left(\frac{19}{27}; \frac{20}{27}\right)$, $\left(\frac{25}{27}; \frac{26}{27}\right)$. Процес продовжуємо до нескінченності. Об’єднання усіх відкинутих інтервалів задає *відкриту канторову* множину G:

$$G = \left(\frac{1}{3}; \frac{2}{3}\right) \cup \left(\frac{1}{9}; \frac{2}{9}\right) \cup \left(\frac{7}{9}; \frac{8}{9}\right) \cup \left(\frac{1}{27}; \frac{2}{27}\right) \cup \left(\frac{7}{27}; \frac{8}{27}\right) \cup \left(\frac{19}{27}; \frac{20}{27}\right) \cup$$

$$\cup\left(\frac{25}{27};\frac{26}{27}\right)\cup\ldots,$$

а множина F, що в результаті залишилася – *замкнену канторову множину:* $F=[0;1]\setminus G$ (рис. 1.3).

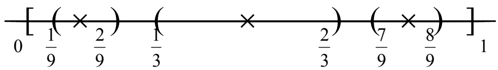

Рис. 1.3.

Знайдемо міру канторової множини F. Для цього спочатку знайдемо міру множини G. Всі інтервали, що утворюють цю множину взаємно не перетинаються, вони називаються *доповняльними інтервалами* множини G. А міра цієї множини дорівнює

$$\mu G=\frac{1}{3}+2\cdot\frac{1}{9}+4\cdot\frac{1}{27}+\ldots=\frac{1}{3}+\frac{2}{3^2}+\frac{2^2}{3^3}+\ldots=\frac{\frac{1}{3}}{1-\frac{2}{3}}=1.$$

Оскільки $[0;1]\subset G$*, то* міра множини F дорівнює

$$\mu F=\mu[0;1]-\mu G=1-1=0.$$

Висновок: замкнена канторова множина F має лебегову міру нуль.

Будемо говорити, що деяка властивість виконується *майже скрізь на множині* $M\subset\mathbb{R}$, якщо вона має місце у всіх точках M, окрім точок множини із M, що має лебегову міру нуль.

4. Диференціювання монотонних функцій.

🗁**Означення 1.7.** Скінченне або нескінченне число λ – *похідне число функції* $f(x)$ *в т.* $x_0\in D_f \overset{def}{\Leftrightarrow}$

$$\exists\{h_n\neq 0\}:\left(\{x_0+h_n\}\subset D_f\wedge\lim_n h_n=0\right)\Rightarrow\lim_n\frac{f(x_0+h_n)-f(x_0)}{h_n}=\lambda.$$

Позначення: $\lambda=Df(x_0)$.

Зауваження 1.1. Якщо число λ (скінченне або нескінченне) є похідною функції $f(x)$ в точці x_0, то із означення границі функції за Гейне

$$\exists f'(x_0)=\lambda=\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}\overset{def\ Г.}{\Leftrightarrow}$$

$$\overset{def\ Г.}{\Leftrightarrow}\forall\{h_n\neq 0\}:\left(\{x_0+h_n\}\subset D_f\wedge\lim_n h_n=0\right)\Rightarrow\lim_n\frac{f(x_0+h_n)-f(x_0)}{h_n}=\lambda$$

випливає, що усі похідні числа цієї функції в точці x_0 дорівнюють λ. Це пов’язано з тим, що у означенні похідної міститься квантор загальності щодо вибору послідовності $\{h_n\}$, що прагне до нуля, а у означенні похідного числа – квантор існування.

Приклад 1.3. Для функції Діріхле

$$f(x)=\begin{cases}1, & x\in\mathbb{Q},\\ 0, & x\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}\end{cases}$$

знайти усі похідні числа в кожні точці $x_0\in\mathbb{R}$.

Розв'язання. Нехай спочатку $x_0\in\mathbb{Q}$, тоді розглянемо $\{h_n\neq 0\}:\lim\limits_n h_n=0$:

1) $\{h_n\}\subset\mathbb{Q}\Rightarrow \lim\limits_n\dfrac{f(x_0+h_n)-f(x_0)}{h_n}=\lim\limits_n\dfrac{1-1}{h_n}=0$,

2) $\{h_n\}\subset\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}\Rightarrow \lim\limits_n\dfrac{f(x_0+h_n)-f(x_0)}{h_n}=\lim\limits_n\dfrac{0-1}{h_n}=\pm\infty$,

3) якщо послідовність $h_n\to 0$, $\{h_n\}$ – довільна, то

а) вона може утворюватися із скінченної множини ірраціональних членів і зчисленної – раціональних, тоді це рівносильне випадку 1), і послідовність $\left\{\sigma_n=\dfrac{f(x_0+h_n)-f(x_0)}{h_n}\right\}$ збігається до 0,

б) послідовність $\{h_n\}$ може утворюватися із скінченної множини раціональних членів і зчисленної – ірраціональних, тоді це рівносильне випадку 2), і послідовність $\{\sigma_n\}$ прагне до $\pm\infty$,

в) послідовність $\{h_n\}$ може утворюватися із зчисленної множини раціональних членів і зчисленної ірраціональних, тоді із неї можна виділити дві підпослідовності $\{h_{k_n}\}\subset\mathbb{Q}$ і $\{h_{m_n}\}\subset\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$, а відповідні їм послідовності $\{\sigma_{k_n}\}$ і $\{\sigma_{m_n}\}$ прагнуть до 0 і до $\pm\infty$ відповідно, тому послідовність $\{\sigma_n\}$ розбігається.

Висновок: функція Діріхле має 3 похідних числа в точці $x_0\in\mathbb{Q}$ – це $-\infty$, 0 і $+\infty$.

Тепер розглянемо випадок, коли $x_0\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$. Нехай $\{h_n\neq 0\}:\lim\limits_n h_n=0$. Тоді

1) $\{x_0+h_n\}\subset\mathbb{Q}\Rightarrow \lim\limits_n\dfrac{f(x_0+h_n)-f(x_0)}{h_n}=\lim\limits_n\dfrac{1-0}{h_n}=\pm\infty$,

2) $\{x_0 + h_n\} \subset \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \Rightarrow \lim\limits_n \dfrac{f(x_0 + h_n) - f(x_0)}{h_n} = \lim\limits_n \dfrac{0-0}{h_n} = 0$,

3) загальний випадок розглядається аналогічно загальному випадку для $x_0 \in \mathbb{Q}$.

Висновок: функція Діріхле має 3 похідних числа в точці $x_0 \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ – це $-\infty$, 0 і $+\infty$.

Відповідь: функція Діріхле має 3 похідних числа в кожній точці $x_0 \in \mathbb{R}$ – це $-\infty$, 0 і $+\infty$. ■

Теорема 1.5 *(про існування похідного числа)*. Якщо функція $f(x)$ задана на відрізку $[a,b]$, то в кожній точці цього відрізку вона має хоча б одне похідне число.

Доведення. Нехай $\{h_n \neq 0\} : \left(\{x_0 + h_n\} \subset [a,b] \wedge \lim\limits_n h_n = 0 \right)$, тоді розглянемо послідовність $\left\{ \sigma_n = \dfrac{f(x_0 + h_n) - f(x_0)}{h_n} \right\}$.

$\{\sigma_n\}$ – обмежена, $\Rightarrow$	$\{\sigma_n\}$ – необмежена, $\Rightarrow$
застосовуємо теорему Больцано – Вейєрштрасса: $\exists \{\sigma_{k_n}\} : \exists \lim\limits_n \sigma_{k_n} =$.	застосовуємо аналог теореми Больцано – Вейєрштрасса: $\exists \{\sigma_{k_n}\} : \exists \lim\limits_n \sigma_{k_n} = \infty$.
Висновок: $\exists \lambda$ – скінченне похідне число.	*Висновок:* $\exists$ нескінченне похідне число. ■

Теорема 1.6 *(критерій існування похідної)*. Нехай функція $f(x)$ задана на відрізку $[a,b]$, тоді

$\exists$	$\Leftrightarrow$	усі

похідна функції $f(x)$ в точці $x_0 \in [$	похідні числа функції $f(x)$ в точці x_0 рівн

і
м
і
ж

с
о
б
о
ю

Доведення. *Необхідність* очевидна (див. зауваження 1.1).

Достатність. Нехай усі похідні числа функції $f(x)$ в точці $x_0 \in [a,b]$ рівні між собою і дорівнюють λ. Для того, щоб довести існування похідної, потрібно довести існування границі $\exists f'(x_0) = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}$, що за означенням за Гейне означатиме:

$$\forall \{h_n \neq 0\} : \left(\{x_0 + h_n\} \subset [a,b] \wedge \lim_n h_n = 0 \right) \Rightarrow \lim_n \frac{f(x_0+h_n) - f(x_0)}{h_n} = f'(x_0).$$

Розглянемо послідовність $\left\{ \sigma_n = \dfrac{f(x_0+h_n) - f(x_0)}{h_n} \right\}$. Оскільки усі похідні числа дорівнюють λ, то із означення похідного числа і виписаного означення границі за Гейне випливає, що потрібно довести:

$$\forall \{h_n \neq 0\} : \left(\{x_0 + h_n\} \subset [a,b] \wedge \lim_n h_n = 0 \right) \Rightarrow \lim_n \sigma_n = \lambda.$$

Припустимо супротивне, що існує така послідовність $\{h_n \neq 0\} : \lim\limits_n h_n = 0$, що відповідна їй послідовність $\{\sigma_n\}$ не прагне до λ.

Нехай число λ – скінченне. Тоді поза межами деякого околу точки λ лежить нескінченна множина членів послідовності $\{\sigma_n\}$, яку ми перепишемо у вигляді підпослідовності $\left\{\sigma_{k_n}\right\}$.

$\left\{\sigma_{k_n}\right\}$ – обмежена, $\Rightarrow$ застосовуємо	$\left\{\sigma_{k_n}\right\}$ – необмежена, $\Rightarrow$ застосовуємо

теорему Больцано – Вейєрштрасса: $\exists \left\{ \sigma_{s_{k_n}} \right\} : \exists \lim_n \sigma_{s_{k_n}} =$.

Висновок: Знайдено інше похідне число $\lambda_1 \neq \lambda$. $\not\to$

аналог теореми Больцано – Вейєрштрасса: $\exists \left\{ \sigma_{s_{k_n}} \right\} : \exists \lim_n \sigma_{s_{k_n}} =$.

Висновок: $\exists$ нескінченне похідне число, а за припущенням усі похідні числа дорівнюють скінченному числу λ. $\not\to$

Випадок, коли число λ – нескінченне пропонуємо читачеві розглянути самостійно ✍.

Отримані суперечності доводять теорему. ■

Твердження 1.1. Усі похідні числа зростаючої на відрізку $[a,b]$ функції $f(x)$ є невід'ємними.

Це твердження є очевидним наслідком визначень похідного числа і зростаючої функції. Дійсно, нехай

$$h_n \neq 0\} : \left(\{x_0 + h_n\} \subset D_f \wedge \lim_n h_n = 0 \right) \Rightarrow \lim_n \frac{f(x_0 + h_n) - f(x_0)}{h_n} = \lambda .$$

Тоді у випадку, коли $h_n > 0$,

$$\left.\begin{array}{l} x_0+h_n>x_0 \\ f(x)-\nearrow \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} f(x_0+h_n)\ge f(x_0) \\ h_n>0 \end{array}\right\} \Rightarrow \sigma_n=\frac{\overbrace{f(x_0+h_n)-f(x_0)}^{+}}{\underbrace{h_n}_{+}}\ge 0 .$$

У випадку, коли $h_n<0$,

$$\left.\begin{array}{l} x_0+h_n<x_0 \\ f(x)-\nearrow \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} f(x_0+h_n)\le f(x_0) \\ h_n<0 \end{array}\right\} \Rightarrow \sigma_n=\frac{\overbrace{f(x_0+h_n)-f(x_0)}^{-}}{\underbrace{h_n}_{-}}\ge 0 .$$

Оскільки $\sigma_n\ge 0\ \forall n\in\mathbb{N}$, то $\lim\limits_{n}\sigma_n=\lambda\ge 0$. ∎

Твердження 1.2. Множина точок, в яких хоча б одне похідне число зростаючої на відрізку $[a,b]$ функції нескінченне, має лебегову міру нуль.(Доведення за бажанням вивчити самостійно ✍!)

Твердження 1.3. Зростаюча на відрізку $[a,b]$ функція майже в усіх точках цього відрізку має скінченну похідну $f'(x)$.

(Доведення за бажанням вивчити самостійно ✍!)

Приклад 1.4. Наведемо приклад функції, яка
1) нестрого зростає на відрізку $[0,1]$,
2) неперервна на відрізку $[0,1]$,
3) майже в усіх точках $[0,1]$ має похідну $f'(x)$, що дорівнює 0,
4) $f(0)=0, f(1)=1$,
5) $\int_0^1 f'(x)dx<f(1)-f(0)$.

Розв'язання. Задамо значення функції в точках доповняльних інтервалів відкритої канторової множини G:

1) $x\in\left(\frac{1}{3};\frac{2}{3}\right)\Rightarrow f(x)=\frac{1}{2}$,

2) $x\in\left(\frac{1}{9};\frac{2}{9}\right)\Rightarrow f(x)=\frac{1}{2^2}$ і $x\in\left(\frac{7}{9};\frac{8}{9}\right)\Rightarrow f(x)=\frac{3}{2^2}$,

3) $x\in\left(\frac{1}{27};\frac{2}{27}\right)\Rightarrow f(x)=\frac{1}{2^3}$, $x\in\left(\frac{7}{27};\frac{8}{27}\right)\Rightarrow f(x)=\frac{3}{2^3}$,

$x\in\left(\frac{19}{27};\frac{20}{27}\right)\Rightarrow f(x)=\frac{5}{2^3}$, $x\in\left(\frac{25}{27};\frac{26}{27}\right)\Rightarrow f(x)=\frac{7}{2^3}$ і т.д.

Зокрема, для n-ої групи 2^{n-1} доповняльних інтервалів функцію $f(x)$ задамо значеннями $\frac{1}{2^n},\frac{3}{2^n},\frac{5}{2^n},...,\frac{2^n-1}{2^n}$. В результаті функція вже визначена в усіх точках множини G.

Визначимо тепер функцію в точках замкненої канторової множини F: $f(0)=0$, $f(1)=1$,

$x_0 \in (0;1)\setminus G \Rightarrow f(x_0)=\sup_{x\in G,}$

.

Схему графіка функції див. на рис. 1.4.

Із побудови функції випливає її зростання.

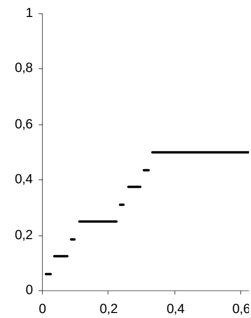

Рис. 1.4.

Доведемо неперервність функції на $[0;1]$. Припустимо супротивне: точка $x_0 \in [0;1]$ є точкою розриву, тоді внаслідок зростання функції, цей розрив може бути лише першого роду, а один із інтервалів $\left(f(x_0-0);f(x_0)\right)$ або $\left(f(x_0);f(x_0+0)\right)$ вільний від значень функції. Позначимо такий інтервал (α,β).

Оскільки на множині G функція приймає усі двійково-раціональні значення із сегмента $[0;1]$, то поміж числами α і β можна знайти двійково-раціональне число, яке повинно бути значенням функції в точці із G. Це суперечить припущенню про відсутність всередині інтервалу (α,β) значень функції. Отже, функція є неперервною на $[0;1]$.

Замкнена канторова множина F має лебегову міру 0. В точках множини $G=[0;1]\setminus F$ функція є *кусково-сталою*. На кожному доповняльному інтервалі вона приймає стале значення, тому в кожній точці цього інтервалу похідна дорівнює 0. Отже $f'(x) \overset{\text{майже скрізь}}{=} 0$.

За критерієм Лебега функція $f'(x)$ є інтегрованою, оскільки обмежена і має множину точок розриву F лебегової міри нуль. Отже, значення інтегралу Рімана від неї дорівнює 0, тобто

$$\int_0^1 f'(x)dx = 0,$$

а $f(1)-f(0)=1-0=1$, тому $\int_0^1 f'(x)dx < f(1)-f(0)$. ■

Зауважимо, що властивість 5 функції із наведеного прикладу не суперечить формулі Ньютона – Лейбніца, оскільки у припущеннях цієї формули вимагається неперервність підінтегральної функції.

Теорема 1.7. Для будь-якої наперед заданої множини $A\subset[a,b]$ лебегової міри 0 можна побудувати зростаючу неперервну на $[a,b]$ функцію, яка в кожній точці цієї множини має нескінченну похідну.

Доведення проведемо конструктивне, тобто побудуємо таку функцію, що задовольняє теоремі.

Оскільки $\mu A = 0$, то

$$\forall n\in\mathbb{N}\ \exists G_n \supset A - \text{відкрита множина:} \, \mu G_n < \frac{1}{2^n}.$$

Введемо допоміжні функції $\psi_n(x)=\mu\left(G_n \bigcap [a,x]\right)$ $(n\in\mathbb{N})$. Оскільки міра – це невід'ємна функція множини, тому введені функції невід'ємні. Якщо $a\le x_1 < x_2 \le b$, то

$$G_n \bigcap [a,x_1] \subset G_n \bigcap [a,x_2] \ \Rightarrow\ \mu\left(G_n \bigcap [a,x_1]\right) \le \mu\left(G_n \bigcap [a,x_2]\right) \ \Rightarrow$$
$$\Rightarrow\ \psi_n(x_1)\le\psi_n(x_2).$$

Тому кожна із функції $\psi_n(x)$ $(n\in\mathbb{N})$ зростає на $[a,b]$. Крім того, кожна із них є неперервною. Доведення цього факту можна здійснити за допомогою властивості неперервності міри, вивчення якої виходить за рамки даного курсу. Тому залишаємо доведення читачеві після вивчення курсу «Теорія міри та інтегралу».

Отже, кожна із функції $\psi_n(x)$ $(n\in\mathbb{N})$ невід'ємна, неперервна і зростаюча на $[a,b]$. Окрім того, із означення цих функцій і множин G_n випливає оцінка на $[a,b]$:

$$\psi_n(x) < \frac{1}{2^n} \quad (n \in \mathbb{N}). \tag{1.8}$$

Введемо функцію $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \psi_n(x)$. Завдяки властивостям функцій $\psi_n(x)$ $(n \in \mathbb{N})$ маємо невід'ємність, зростання функції $f(x)$ на $[a,b]$. Доведемо неперервність цієї функції на відрізку. Із нерівності (1.8) випливає, що збіжний числовий ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$ є мажорантою для ряду $\sum_{n=1}^{\infty} \psi_n(x)$ на $[a,b]$, тому за ознакою Вейєрштрасса ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \psi_n(x)$ рівномірно збігається на $[a,b]$. Члени $\psi_n(x)$ $(n \in \mathbb{N})$ цього ряду неперервні на $[a,b]$ функції. Отже, за теоремою про неперервність суми функціонального ряду маємо неперервність функції $f(x)$ на $[a,b]$.

Знайдемо похідну функції $f(x)$ в точці $x_0 \in A$. Зафіксуємо $n \in \mathbb{N}$. Для як завгодно малого за модулем h (для визначеності припустимо, що $h > 0$) отримаємо $[x_0, x_0 + h] \subset G_n$, тому

$$\psi_n(x_0 + h) = \mu\left(G_n \bigcap [a, x_0 + h]\right) = \mu\left(G_n \bigcap [a, x_0]\right) + \mu\left([x_0, x_0 + h]\right) =$$
$$= \psi_n(x_0) + h,$$

тобто

$$\frac{\psi_n(x_0 + h) - \psi_n(x_0)}{h} = 1.$$

Для $h < 0$ результат не зміниться.

Таким чином,

$$\forall N \in \mathbb{N} \;\; \exists h : \left([x_0, x_0 + h] \subset G_n \vee [x_0 + h, x_0] \subset G_n\right) \forall n \le N,$$

тоді

$$\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \ge \sum_{n=1}^{N} \frac{\psi_n(x_0 + h) - \psi_n(x_0)}{h} = N.$$

Це означає, що $f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = +\infty$. ■

5. Функції обмеженої варіації: означення і властивості.

Нехай функція $f(x)$ задана на сегменті $[a,b]$. Розглянемо розбиття R цього сегмента:

$$a = x_0 < x_1 < \ldots < x_{k-1} < x_k < \ldots < x_{n-1} < x_n = b$$

і утворимо суму $V = V(f, R) = \sum_{k=1}^{n} | f(x_k) - f(x_{k-1}) |$

🗀**Означення 1.8.** *Повною варіацією (повною зміною)* $\overset{b}{\underset{a}{V}}(f)$ функції $f(x)$ на відрізку $[a,b]$ називається

$$\overset{b}{\underset{a}{V}}(f) \overset{def}{=} \sup_R V(f,R).$$

Якщо $\overset{b}{\underset{a}{V}}(f) < +\infty$, то функція $f(x)$ *називається функцією обмеженої варіації (функцією зі скінченною зміною)* на відрізку $[a,b]$.

Теорема 1.8. Монотонна на відрізку $[a,b]$ функція $f(x)$ має на цьому відрізку обмежену варіацію, а повна варіація такої функції дорівнює

$$\overset{b}{\underset{a}{V}}(f) = |f(b) - f(a)|.$$

Доведення. Без обмеження загальності міркувань можна вважати, що дана функція зростаюча.

Розглянемо розбиття

$$R:\ a = x_0 < x_1 < \ldots < x_{k-1} < x_k < \ldots < x_{n-1} < x_n = b.$$

Оскільки $f(x) - \nearrow$ на $[a,b]$, то $f(x_k) \geq f(x_{k-1})$ $k = \overline{1,n}$. Отже,

$$V(f,R) = \sum_{k=1}^{n} | f(x_k) - f(x_{k-1}) | = f(x_1) - f(x_0) + f(x_2) - f(x_1) +$$
$$+ f(x_3) - f(x_2) + \ldots + f(x_{k-1}) - f(x_{k-2}) + f(x_k) - f(x_{k-1}) + \ldots +$$
$$+ f(x_{n-1}) - f(x_{n-2}) + f(x_n) - f(x_{n-1}) = f(x_n) - f(x_0) = f(b) - f(a).$$

Тому $\overset{b}{\underset{a}{V}}(f) = \sup_R V(f,R) = f(b) - f(a)$. ■

🗀**Означення 1.9.** Функція $f(x)$, задана на сегменті $[a,b]$, *задовольняє умову Ліпшица, якщо*

$$\exists K > 0 : \forall x, y \in [a,b] \ \ | f(x) - f(y) | \leq K \, | x - y |.$$

При цьому, число K називається *сталою Ліпшица*.

Теорема 1.9. Якщо функція $f(x)$ задовольняє умову Ліпшица на $[a,b]$, то вона на цьому відрізку має обмежену варіацію.

Доведення. Розглянемо розбиття відрізка $[a,b]$

$$R:\ a = x_0 < x_1 < \ldots < x_{k-1} < x_k < \ldots < x_{n-1} < x_n = b.$$

Тоді

$$V(f,R) = \sum_{k=1}^{n} | f(x_k) - f(x_{k-1}) | \leq K \sum_{k=1}^{n} | x_k - x_{k-1} | = K(b-a),$$

$$\overset{b}{\underset{a}{V}}(f) = \sup_R V(f,R) \leq K(b-a). \quad ■$$

Наслідок 1.3. Якщо функція $f(x)$ має на відрізку $[a,b]$ обмежену похідну, то вона на цьому відрізку має обмежену варіацію.

Доведення. За умовою функція на $[a,b]$ має обмежену похідну, тому

$$\exists K>0:\forall x\in[a,b]\ \left|f'(x)\right|\le K .$$

Тоді $\forall x,y\in[a,b]$ на відрізку, що сполучає ці точки, функція диференційовна, а тому і неперервна. Внаслідок цього на такому відрізку можна застосовувати теорему Лагранжа:

$$f\left(x\right)-f\left(y\right)=f'\left(\xi\right)\cdot\left(x-y\right),$$

де ξ лежить між x і y. Тому

$$\left|f\left(x\right)-f\left(y\right)\right|=\left|f'\left(\xi\right)\right|\cdot\left|x-y\right|\le K\left|x-y\right|,$$

і функція задовольняє умову Ліпшица, тому за теоремою 1.9 має обмежену варіацію на $[a,b]$. ■

Теорема 1.10 (*необхідна умова обмеженості варіації*)**.** Будь-яка функція обмеженої варіації є обмеженою. Тобто

$$\overset{b}{\underset{a}{V}}(f)<\infty\Rightarrow\exists\sup_{[a,b]}f(x).$$

Доведення. Розглянемо розбиття $R^*:\ a\le x\le b$, тоді

$$\left.\begin{array}{l} V(f,R^*)\le\sup\limits_{R}V(f,R)=\overset{b}{\underset{a}{V}}(f) \\ V(f,R^*)=\left|f(x)-f(a)\right|+\left|f(b)-f(x)\right|\ge\left|f(x)-f(a)\right| \end{array}\right\}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\left|f(x)-f(a)\right|\le\overset{b}{\underset{a}{V}}(f)\Rightarrow f(a)-\overset{b}{\underset{a}{V}}(f)\le f(x)\le f(a)+\overset{b}{\underset{a}{V}}(f).$$

Оскільки отримана нерівність виконується при усіх $x\in[a,b]$, то функція $f(x)$ обмежена на $[a,b]$. ■

Приклад 1.5. Навести приклад обмеженої функції з необмеженою варіацією.

Розв'язання. Розглянемо функцію

$$f\left(x\right)=\begin{cases} x\cdot\cos\dfrac{\pi}{2x},\ 0<x\le1, \\ 0,\quad x=0 \end{cases}$$

на сегменті $\left[0,1\right]$. На цьому відрізку $\left|x\cdot\cos\dfrac{\pi}{2x}\right|=x\cdot\left|\cos\dfrac{\pi}{2x}\right|\le1$, тому функція є обмеженою.

Розбиття відрізка $\left[0,1\right]$ оберемо спеціальним чином, а саме:

$$R_m^*:\ \ 0<\frac{1}{2m}<\frac{1}{2m-1}<\ldots<\frac{1}{3}<\frac{1}{2}<1.$$

Тоді

$$V(f,R_m^*)=\left|1\cdot\cos\frac{\pi}{2}-\frac{1}{2}\cdot\cos\pi\right|+\left|\frac{1}{2}\cdot\cos\pi-\frac{1}{3}\cdot\cos\frac{3\pi}{2}\right|+\left|\frac{1}{3}\cdot\cos\frac{3\pi}{2}-\frac{1}{4}\cdot\cos 2\pi\right|+$$

$$+\left|\frac{1}{4}\cdot\cos 2\pi-\frac{1}{5}\cdot\cos\frac{5\pi}{2}\right|+\ldots+\left|\frac{1}{2m-1}\cdot\cos\frac{(2m-1)\pi}{2}-\frac{1}{2m}\cdot\cos m\pi\right|+\left|\frac{1}{2m}\cdot\cos m\pi\right|=$$

$$=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{2m}+\frac{1}{2m}=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{m}.$$

Звідки

$$\overset{b}{\underset{a}{V}}(f)=\sup_R V(f,R)\geq\sup_m V(f,R_m^*)=\sup_m\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{m}\right)=\infty. \quad \blacksquare$$

Теорема 1.11 *(арифметичні операції над функціями обмеженої варіації).* I. Сума, різниця і добуток функцій скінченної варіації є функцією скінченної варіації. Тобто

$$\begin{cases}\overset{b}{\underset{a}{V}}(f)<\infty,\\ \overset{b}{\underset{a}{V}}(g)<\infty,\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\overset{b}{\underset{a}{V}}(f\pm g)<\infty,\\ \overset{b}{\underset{a}{V}}(f\cdot g)<\infty.\end{cases}$$

II. Якщо $f(x)$ – функція скінченної варіації на $[a,b]$, причому $f(x)\geq c>0$ всюди на $[a,b]$, то $\dfrac{1}{f(x)}$ також має скінченну варіацію на $[a,b]$. Тобто

$$\begin{cases}\overset{b}{\underset{a}{V}}(f)<\infty,\\ f(x)\geq c\ \forall x\in[a,b],\end{cases}\Rightarrow\overset{b}{\underset{a}{V}}\left(\frac{1}{f}\right)<\infty.$$

III. Якщо $f(x)$ і $g(x)$ функції скінченної варіації на $[a,b]$, причому $g(x)\geq\sigma>0$ всюди на $[a,b]$, то частка $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ є функцією скінченної варіації. Тобто

$$\begin{cases}\overset{b}{\underset{a}{V}}(f)<\infty\wedge\overset{b}{\underset{a}{V}}(g)<\infty,\\ g(x)\geq c\ \forall x\in[a,b],\end{cases}\Rightarrow\overset{b}{\underset{a}{V}}\left(\frac{f}{g}\right)<\infty.$$

Доведення. Розглянемо довільне розбиття відрізка $[a,b]$

$$R:\ a=x_0<x_1<\ldots<x_{k-1}<x_k<\ldots<x_{n-1}<x_n=b.$$

I. Тоді для суми і різниці функцій обмеженої варіації

$$\sum_{i=1}^{n}\Big|\big(f(x_i)\pm g(x_i)\big)-\big(f(x_{i-1})\pm g(x_{i-1})\big)\Big|=$$

$$=\sum_{i=1}^{n}\Big|\big(f(x_i)-f(x_{i-1})\big)\pm\big(g(x_i)-g(x_{i-1})\big)\Big|\le$$

$$\le\sum_{i=1}^{n}\big|f(x_i)-f(x_{i-1})\big|+\sum_{i=1}^{n}\big|g(x_i)-g(x_{i-1})\big|\le \overset{b}{\underset{a}{V}}(f)+\overset{b}{\underset{a}{V}}(g).$$

Для добутку функцій обмеженої варіації

$$\sum_{i=1}^{n}\big|f(x_i)g(x_i)-f(x_{i-1})g(x_{i-1})\big|=$$

$$=\sum_{i=1}^{n}\Big|f(x_i)\big(g(x_i)-g(x_{i-1})\big)+\big(f(x_i)-f(x_{i-1})\big)g(x_{i-1})\Big|\le$$

$$\le\sum_{i=1}^{n}\big|f(x_i)\big|\cdot\big|g(x_i)-g(x_{i-1})\big|+\sum_{i=1}^{n}\big|f(x_i)-f(x_{i-1})\big|\cdot\big|g(x_{i-1})\big|\le$$

$$\backslash\backslash\, \overset{b}{\underset{a}{V}}(f)<\infty\Rightarrow\exists\sup_{[a,b]}f(x);\quad \overset{b}{\underset{a}{V}}(g)<\infty\Rightarrow\exists\sup_{[a,b]}g(x)\,\backslash\backslash$$

$$\le\sup_{x\in[a,b]}\big|f(x)\big|\cdot\overset{b}{\underset{a}{V}}(g)+\sup_{x\in[a,b]}\big|g(x)\big|\cdot\overset{b}{\underset{a}{V}}(f).$$

Переходимо до верхніх меж за всілякими розбиттями $[a,b]$, отримаємо:

$$\overset{b}{\underset{a}{V}}(f\pm g)\le\overset{b}{\underset{a}{V}}(f)+\overset{b}{\underset{a}{V}}(g),$$

$$\overset{b}{\underset{a}{V}}(f\cdot g)\le\sup_{x\in[a,b]}\big|f(x)\big|\cdot\overset{b}{\underset{a}{V}}(g)+\sup_{x\in[a,b]}\big|g(x)\big|\cdot\overset{b}{\underset{a}{V}}(f).\quad\blacksquare$$

II. Для функції $\dfrac{1}{f(x)}$ матимемо:

$$\sum_{i=1}^{n}\left|\frac{1}{f(x_i)}-\frac{1}{f(x_{i-1})}\right|=\sum_{i=1}^{n}\frac{\big|f(x_i)-f(x_{i-1})\big|}{\big|f(x_i)\big|\cdot\big|f(x_{i-1})\big|}\le$$

$$//\,\big|f(x_i)\big|\ge c,\ \ \big|f(x_{i-1})\big|\ge c\,//$$

$$\le\frac{1}{c^2}\sum_{i=1}^{n}\big|f(x_i)-f(x_{i-1})\big|\le\frac{1}{c^2}\sum_{i=1}^{n}\big|f(x_i)-f(x_{i-1})\big|\le\frac{1}{c^2}\overset{b}{\underset{a}{V}}(f).$$

Переходимо до верхньої межі за різними розбиттями $[a,b]$:

$$\overset{b}{\underset{a}{V}}\left(\frac{1}{f}\right)\le\frac{1}{c^2}\overset{b}{\underset{a}{V}}(f).$$

Властивість III є наслідком властивостей I і II. $\blacksquare$

Теорема 1.12 *(адитивність повної варіації)*. Нехай на $[a,b]$ задана скінченна функція $f(x)$ і $a<c<b$. Тоді

$$\overset{b}{\underset{a}{V}}(f)<\infty \quad \Leftrightarrow \quad \left(\overset{c}{\underset{a}{V}}(f)<\infty \wedge \overset{b}{\underset{c}{V}}(f)<\infty\right);$$

$$\overset{b}{\underset{a}{V}}(f)=\overset{c}{\underset{a}{V}}(f)+\overset{b}{\underset{c}{V}}(f). \tag{1.9}$$

Доведення. Нехай $\overset{b}{\underset{a}{V}}(f)<\infty$. Розіб'ємо кожен з відрізків $[a,c]$ і $[c,b]$ довільним чином точками

$$a=y_0<y_1<\ldots<y_m=c; \quad c=z_0<z_1<\ldots<z_n=b$$

і розглянемо суми

$$V_{[a,c]}=\sum_{k=1}^{m}|f(y_k)-f(y_{k-1})|, \qquad V_{[c,b]}=\sum_{k=1}^{n}|f(z_k)-f(z_{k+1})|.$$

Множина точок $R^*=\{y_k\}\bigcup\{z_k\}$ утворює розбиття відрізку $[a,b]$, якому відповідає сума $V_{[a,b]}=V(f,R^*)=V_{[a,c]}+V_{[c,b]}$. Тоді

$$\left.\begin{aligned} &V(f,R^*)\le\sup_R V(f,R)=\overset{b}{\underset{a}{V}}(f),\\ &V_{[a,c]}+V_{[c,b]}=V_{[a,b]}=V(f,R^*),\end{aligned}\right\}\Rightarrow V_{[a,c]}+V_{[c,b]}\le\overset{b}{\underset{a}{V}}(f)\Rightarrow$$

\\ як наслідок довільності розбиттів відрізків $[a,c]$ і $[c,b]$ після переходу до супремума\\

$$\Rightarrow\overset{c}{\underset{a}{V}}(f)+\overset{b}{\underset{c}{V}}(f)\le\overset{b}{\underset{a}{V}}(f), \tag{1.10}$$

крім того, $\overset{c}{\underset{a}{V}}(f)<\infty\wedge\overset{b}{\underset{c}{V}}(f)<\infty$.

Нехай тепер $\overset{c}{\underset{a}{V}}(f)<\infty\wedge\overset{b}{\underset{c}{V}}(f)<\infty$, тоді розіб'ємо довільним чином сегмент $[a,b]$ точками

$$a=x_0<x_1<\ldots<x_n=b,$$

поки що включивши точку c в число точок подріблення. Якщо $c=x_m$, то сума $V^*_{[a,b]}$, що відповідає цьому розбиттю має вигляд:

$$V^*_{[a,b]}=\sum_{k=1}^{m}|f(x_k)-f(x_{k-1})|+\sum_{k=m+1}^{n}|f(x_k)-f(x_{k-1})|=V_{[a,c]}+V_{[c,b]}.$$

Звідки

$$V^*_{[a,b]}\le\overset{c}{\underset{a}{V}}(f)+\overset{b}{\underset{c}{V}}(f).$$

Тепер розглянемо випадок, коли точка c не входить в число точок подрібленння і $x_{m-1} < c < x_m$:

$$V_{[a,b]}^{**} = \sum_{k=1}^{m-1} | f(x_k) - f(x_{k-1}) | + \sum_{k=m+1}^{n} | f(x_k) - f(x_{k-1}) | + | f(x_k) - f(x_{k-1}) | .$$

При додаванні точки подрібленння c отримаємо

$$V_{[a,b]}^{**} \le \underline{\sum_{k=1}^{m-1} | f(x_k) - f(x_{k-1}) |} + \underline{\underline{\sum_{k=m+1}^{n} | f(x_k) - f(x_{k-1}) |}} +$$

$$+ \underline{| f(x_k) - f(c) |} + \underline{\underline{| f(c) - f(x_{k-1}) |}} = V_{[a,c]} + V_{[c,b]} = V_{[a,b]}^{*} \le \overset{c}{\underset{a}{V}}(f) + \overset{b}{\underset{c}{V}}(f) .$$

Отже, для будь-яких розбиттів відрізка $[a,b]$ виконується нерівність $V_{[a,b]} \le \overset{c}{\underset{a}{V}}(f) + \overset{b}{\underset{c}{V}}(f)$, а тому і нерівність

$$\overset{b}{\underset{a}{V}}(f) \le \overset{c}{\underset{a}{V}}(f) + \overset{b}{\underset{a}{V}}(f), \tag{1.11}$$

крім того, $\overset{b}{\underset{a}{V}}(f) < \infty$. Із нерівностей (1.10) і (1.11) випливає справедливість рівності (1.9).■

Із останньої теореми випливають наслідки.

Наслідок 1.4. Якщо функція на сегменті $[a,b]$ має обмежену варіацію, то вона має обмежену варіацію на будь-якому відрізку, що міститься у відрізку $[a,b]$.

Наслідок 1.5. Якщо функція на кожному із скінченної кількості сегментів, що розбивають відрізок $[a,b]$, має обмежену варіацію, то вона має обмежену варіацію на усьому відрізку $[a,b]$.

Зокрема, якщо відрізок $[a,b]$ можна розбити на скінченну кількість частин, на кожній з яких функція монотонна, то ця функція має обмежену варіацію на $[a,b]$.

Останнє випливає із теореми про обмеженість варіації монотонної функції і властивості адитивності повної варіації.

6. Представлення функції обмеженої варіації різницею зростаючих функцій.

Теорема 1.13. *Для того щоб функція $f(x)$ була функцією обмеженої варіації, необхідно і достатньо, щоб вона представлялася різницею двох зростаючих функцій.*

Доведення. *Достатність* є наслідком теореми про обмеженість варіації монотонної функції і теореми про арифметичні операції над функціями обмеженої варіації.

Необхідність. Розглянемо функцію

$$\pi(x)=\begin{cases}0, & x=0,\\ \overset{x}{\underset{a}{V}}(f), & a<x\le b.\end{cases}$$

Якщо $a\le x_1<x_2\le b$, то за властивістю адитивності варіації

$$\overset{x_2}{\underset{a}{V}}(f)=\overset{x_1}{\underset{a}{V}}(f)+\underbrace{\overset{x_2}{\underset{x_1}{V}}(f)}_{\oplus}\ge\overset{x_1}{\underset{a}{V}}(f)\Rightarrow\pi(x_2)\ge\pi(x_1).$$

Звідки випливає зростання функції $\pi(x)$ на $[a,b]$.

Розглянемо тепер іншу функцію

$$\nu(x)=\pi(x)-f(x). \tag{1.12}$$

Доведемо її зростання. Нехай $a\le x_1<x_2\le b$, тоді в силу властивості адитивності варіації

$$\pi(x_2)=\overset{x_2}{\underset{a}{V}}(f)=\overset{x_1}{\underset{a}{V}}(f)+\overset{x_2}{\underset{x_1}{V}}(f)=\pi(x_1)+\overset{x_2}{\underset{x_1}{V}}(f)\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\nu(x_2)=\pi(x_2)-f(x_2)=\pi(x_1)+\overset{x_2}{\underset{x_1}{V}}(f)-f(x_2).$$

Звідки

$$\nu(x_2)-\nu(x_1)=\overset{x_2}{\underset{x_1}{V}}(f)-\left[f(x_2)-f(x_1)\right].$$

Розглянемо тривіальне розбиття відрізка $[x_1,x_2]$ двома його кінцями, тоді

$$V=\left|f(x_2)-f(x_1)\right|\le\sup_R V=\overset{x_2}{\underset{x_1}{V}}(f)\;\Rightarrow\;\left|f(x_2)-f(x_1)\right|\le\overset{x_2}{\underset{x_1}{V}}(f)\;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow f(x_2)-f(x_1)\le\overset{x_2}{\underset{x_1}{V}}(f)\;,$$

Тому $\nu(x_2)-\nu(x_1)\ge 0$. Отже, функція $\nu(x)$ зростає на $[a,b]$.

Таким чином, функцію обмеженої варіації $f(x)$ представлено у вигляді різниці двох зростаючих на $[a,b]$ функцій:

$$f(x)=\pi(x)-\nu(x).\ \blacksquare$$

В силу диференціальних властивостей монотонних функцій і останньої теореми отримаємо

Наслідок 1.6. Якщо функція $f(x)$ має обмежену варіацію на $[a,b]$, то майже скрізь на $[a,b]$ існує скінченна похідна $f'(x)$.

Завдяки властивостям множини точок розриву монотонних функція і останній теоремі одержимо

Наслідок 1.7. Множина точок розриву функції обмеженої варіації не більш, ніж зчисленна. Усі точки розриву такої функції першого роду, і в кожній з них існують границі

$$f\left(x_0+0\right)=\lim_{x\to x_0+0} f\left(x\right), \quad f\left(x_0-0\right)=\lim_{x\to x_0-0} f\left(x\right).$$

7. Представлення функції обмеженої варіації сумою функції її стрибків і неперервною функцією.

Розглянемо функцію $f(x)$ обмеженої варіації на відрізку $[a,b]$. Нехай не більш, ніж зчисленна множина $\{x_n : a \le x_n \le b\}$ охоплює усі точки розриву зростаючих функцій $\pi(x)$ і $\nu(x)$, введених в теоремі 1.13. Розглянемо їх функції стрибків

$$s_\pi(a)=0,$$

$$s_\pi(x)=\pi(a+0)-\pi(a)+\sum_{x_k<x}\left[\pi\left(x_k+0\right)-\pi\left(x_k-0\right)\right]+\pi(x)-\pi(x-0);$$

$$s_\nu(a)=0,$$

$$s_\nu(x)=\nu(a+0)-\nu(a)+\sum_{x_k<x}\left[\nu\left(x_k+0\right)-\nu\left(x_k-0\right)\right]+\nu(x)-\nu(x-0).$$

Якщо точка розриву однієї із цих функцій є точкою неперервності іншої, то відповідний доданок в представленні функції її стрибків зникає.

Розглянемо функцію $s(x)=s_\pi(x)-s_\nu(x)$. Внаслідок рівності $f(x)=\pi(x)-\nu(x)$ матимемо

$$s(a)=0,$$

$$s(x)=f(a+0)-f(a)+\sum_{x_k<x}\left[f\left(x_k+0\right)-f\left(x_k-0\right)\right]+f(x)-f(x-0).$$

Таким чином утворилася функція стрибків функції $f(x)$.

Як відомо із теореми 1.2, наступні функції $\pi(x)-s_\pi(x)$, $\nu(x)-s_\nu(x)$ є неперервними і зростаючими на $[a,b]$. Тому функція

$$\varphi(x)=f(x)-s(x)=\pi(x)-s_\pi(x)-\left(\nu(x)-s_\nu(x)\right)$$

є неперервною на $[a,b]$. Отже доведена

Теорема 1.14. Будь-яка функція $f(x)$ обмеженої варіації на відрізку $[a,b]$ може бути представленою сумою функції її стрибків $s(x)$ і неперервною функцією обмеженої варіації $\varphi(x)=f(x)-s(x)$.

Тема «Неперервні функції обмеженої варіації» виноситься на самостійне опрацювання ✍.