

ЗАВДАННЯ ДО ПОТОЧНОГО КОНТРОЛЮ ЗНАТЬ СТУДЕНТІВ МОДУЛЯ 1

Теоретична частина

1. Означення монотонної функції, стрибка, функції стрибків. Приклади. Довести, що монотонна функція може мати точки розриву лише I роду.
2. Теорема про потужність множини точок розриву монотонної функції.
3. Довести, що різниця між монотонною функцією і функцією її стрибків є неперервною, монотонною функцією.
4. Образ і прообраз множини при відображенні: означення і властивості.
5. Множини на прямій лебегової міри нуль. Приклади.
6. Канторова множина та її міра.
7. Похідні числа. Теореми про похідні числа. Додатність похідних чисел зростаючої функції.
8. Нульмірність множини точок задання монотонної функції, в яких похідні числа нескінченні.
9. Теорема про існування в майже усіх точках задання монотонної функції скінченні похідної.
10. Приклад монотонної неперервної функції, що має нульову похідну в майже усіх точках, інтеграл від якої дорівнює 1.
11. Теорема про існування монотонної, неперервної на відрізку функції, яка має нескінченну похідну в точках наперед заданої множини лебегової міри нуль.
12. Означення функції зі скінченною варіацією.
13. Теорема про скінченну варіацію монотонної функції.
14. Теорема про обмеженість варіації функції, що задовольняє умові Ліпшица і наслідок з неї.
15. Необхідна умова обмеженості варіації функції.
16. Арифметичні операції над функціями обмеженої варіації.
17. Адитивність повної варіації.
18. Теорема про представлення функції обмеженої варіації різницею двох зростаючих функцій.
19. Теорема про потужність множини точок розриву функції скінченної варіації.
20. Теорема про представлення функції обмеженої варіації сумою функції її стрибків і неперервної функції.
21. Теорема про представлення неперервної функції зі скінченною зміною різницею двох неперервних монотонних функцій та наслідки з неї.

Практична частина

1. Чи мають функції скінченну варіацію?

а) $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} \sin \frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$ на відрізку $[0, \pi]$;

б) $f(x) = (x + 2) \sin 2x$ на відрізку $[0, \pi]$.

2. Знайти варіацію функцій

а) $f(x) = \begin{cases} 2, & 0 \leq x < 1, \\ 5, & x = 1, 2, 3 \\ 10, & 1 < x < 2 \end{cases}$ на відрізку $[0, 3]$;

б) $f(x) = \begin{cases} \cos \pi x, & 0 \leq x \leq 2, \\ (x - 1)^3, & 2 < x \leq 3 \end{cases}$ на відрізку $[0, 3]$.