2. КОНСПЕКТ ЛЕКЦІЙ (модуль №2)

2.1 Інтеграл Рімана – Стілтьєса (модуль №2).

1. Означення інтегралу Рімана – Стілтьєса. Інтеграл Стілтьєса (Th. J. Stieltjes[1]) є безпосереднім узагальненням звичайного інтегралу Рімана.

Дві обмежені функції $f(x)$ і $g(x)$ задані на проміжку $[a,b]$.

Розглянемо розбиття відрізка $[a,b]$ скінченною кількістю точок

$a = x_0 < x_1 < x_2 < ... < x_{k-1} < x_k < ... < x_{n-1} < x_n = b$,

позначимо розбиття $R = \{x_k\}$,

$d = \max\limits_{k=\overline{1,n}}(x_k - x_{k-1})$ – діаметр розбиття,

$\alpha_k \in [x_{k-1}, x_k] \quad k = \overline{1,n}$, $P = \{\alpha_k\}$ – проміжні точки.

Розглянемо $\sigma = \sigma(f, g, R, P) = \sum\limits_{k=1}^{n} f(\alpha_k) \cdot \left[g(x_k) - g(x_{k-1}) \right]$ – інтегральна сума Стілтьєса.

🗁**Означення 1.10** *(на мові границь)***.** Якщо для функції $f(x)$, що задана на відрізку $[a,b]$, для будь-якого розбиття R відрізка $[a,b]$ і для будь якого набору проміжних точок P відрізків розбиття, існує скінченна границя I інтегральних сум $\sigma = \sigma(f, g, R, P)$ при діаметрі розбиття d, що прагне до нуля, тобто $I = \lim\limits_{d \to 0} \sigma(f, R)$, яка не залежить від вибору розбиття R і набору проміжних точок P, то функція $f(x)$ називається *інтегровною за Стілтьєсом* по функції $g(x)$ на відрізку $[a,b]$, а значення границі – *інтегралом Рімана – Стілтьєса*, що позначається $I = \int\limits_a^b f(x)dg(x)$ або $I = (S)\int\limits_a^b f(x)dg(x)$.

🗁**Означення 1.11** *(на мові $\varepsilon - \delta$)***.** Якщо

$$\exists I \in \mathbb{R} : \forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : \forall \quad R = \{x_k\} \forall P = \{\alpha_k\} \quad d < \delta \Rightarrow |I - \sigma| < \varepsilon,$$

то число I називається границею інтегральних сум і позначається $I = \lim\limits_{d \to 0} \sigma$. Якщо таке число I існує, то функція $f(x)$ називається *інтегровною за Стілтьєсом* по функції $g(x)$ на відрізку $[a,b]$, а значення *границі I – інтегралом Рімана – Стілтьєса.*

---

[1] Томас Іоанес Стілтьєс (нідерл. Thomas Joannes Stieltjes, 29.12.1856, — 31.12.1894 Тулуза) — нідерландський математик. Запрпонував у 1894 р. узагальнення визначеного інтегралу (Інтеграл Рімана-Стілтьеса). Член-кореспондент Петербурзької Академії наук (1894).

Очевидно, що єдина відміна даного означення від звичайного означення інтегралу Рімана полягає в тому, що $f\left(\alpha_k\right)$ множиться не на приріст Δx_k незалежної змінної, а на приріст $\Delta g\left(x_k\right)=g\left(x_k\right)-g\left(x_{k-1}\right)$ другої функції. Таким чином, <u>інтеграл Рімана є окремим випадком інтегралу Стілтьєса</u>, коли в якості функції $g\left(x\right)$ взято саму незалежну змінну x, тобто $g\left(x\right)=x$.

2. Властивості інтегралу Стілтьєса.

Властивості лінійності:

1. $\int\limits_a^b [f_1(x)\pm f_2(x)]dg(x)=\int\limits_a^b f_1(x)dg(x)\pm\int\limits_a^b f_2(x)dg(x)$;

2. $\int\limits_a^b [f(x)d[g_1(x)\pm g_2(x)]=\int\limits_a^b f(x)dg_1(x)\pm\int\limits_a^b f(x)dg_2(x)$;

3. $\int\limits_a^b \alpha f(x)d[\beta g(x)]=\alpha\beta\cdot\int\limits_a^b f(x)dg(x)\quad(\alpha,\beta=const)$.

При цьому, із існування інтегралів у правій частині випливає існування інтеграла у лівій частині.

Доведемо, наприклад, властивість 2:

$$\sigma(f,g_1\pm g_2,R,P)=\sum_{k=1}^{n} f(\alpha_k)\cdot\left[g_1\left(x_k\right)\pm g_2\left(x_k\right)-\left(g_1\left(x_{k-1}\right)\pm g_2\left(x_{k-1}\right)\right)\right]=$$

$$=\sum_{k=1}^{n} f(\alpha_k)\cdot\left[g_1\left(x_k\right)-g_1\left(x_{k-1}\right)\right]\pm\sum_{k=1}^{n} f(\alpha_k)\cdot\left[g_2\left(x_k\right)-g_2\left(x_{k-1}\right)\right]=$$

$$=\sigma(f,g_1,R,P)\pm\sigma(f,g_2,R,P).$$

Здійснимо граничний перехід:

$$\underbrace{\lim_{d\to 0}\sigma(f,g_1\pm g_2,R,P)}_{\substack{\exists\\ \parallel}}\underset{\Leftarrow}{=}\underbrace{\lim_{d\to 0}\left[\sigma(f,g_1,R,P)\pm\sigma(f,g_2,R,P)\right]}_{\exists}\underset{\Leftarrow}{=}\underbrace{\lim_{d\to 0}\sigma(f,g_1,R,P)}_{\substack{\exists\\ \parallel}}\underset{\wedge}{\pm}\underbrace{\lim_{d\to 0}\sigma(f,g_2,R,P)}_{\substack{\exists\\ \parallel}}$$

$$\int\limits_a^b [f(x)d[g_1(x)\pm g_2(x)]\qquad=\qquad\int\limits_a^b f(x)dg_1(x)\quad\pm\quad\int\limits_a^b f(x)dg_2(x).$$

Властивість адитивності:

4. $\int\limits_a^b f(x)dg(x)=\int\limits_a^c f(x)dg(x)+\int\limits_c^b f(x)dg(x)$,

у припущенні, що $a<c<b$ і <u>існують всі три інтеграли</u>.

Для доведення цієї формули достатньо включити точку c в число точок розбиття проміжку $[a,b]$, при утворенні суми Стільтьєса для інтегралу $\int_a^b fdg$.

Зауважимо, що із існування інтеграла $\int_a^b fdg$ випливає існування обох інтегралів $\int_a^c fdg$ і $\int_c^b fdg$. Але, важливо відмітити, що із існування обох інтегралів $\int_a^c fdg$ і $\int_c^b fdg$, взагалі кажучи, не випливає існування інтегралу $\int_c^b fdg$. Щоб запевнитися в цьому, достатньо розглянути приклад. Нехай на проміжку $[-1,1]$ функції $f(x)$ і $g(x)$ задані наступними рівностями:

$$f(x)=\begin{cases}0 \text{ при } -1\le x\le 0,\\ 1 \text{ при } 0<x\le 1;\end{cases} \quad g(x)=\begin{cases}0 \text{ при } -1\le x<0,\\ 1 \text{ при } 0\le x\le 1.\end{cases}$$

Тоді

$$\sigma_{[-1;0]}=\sum_{k=1}^{n} f(\alpha_k)\cdot\left[g\left(x_k\right)-g\left(x_{k-1}\right)\right]=\sum_{k=1}^{n} 0\cdot\left[g\left(x_k\right)-g\left(x_{k-1}\right)\right]=0,$$

$$\sigma_{[0;1]}=\sum_{k=1}^{n} f(\alpha'_k)\cdot\left[g\left(x'_k\right)-g\left(x_{k-1}\right)\right]=\sum_{k=1}^{n} f(\alpha'_k)\cdot[1-1]=0.$$

Після граничного переходу отримаємо

$$\int_{-1}^{0} f(x)dg(x)=0, \quad \int_{0}^{1} f(x)dg(x)=0,$$

Тобто обидва ці інтеграли існують.

У той же час інтеграл $\int_{-1}^{1} f(x)dg(x)$ не існує. Дійсно, розіб'ємо проміжок $[-1,1]$ так, щоб точка 0 не потрапила у склад точок розбиття, і $x_{k_0-1}<0<x_{k_0}$. Утворимо суму:

$$\sigma_{[-1;1]}=\sum_{k=1}^{k_0-1} f(\alpha_k)\cdot\left[g\left(x_k\right)-g\left(x_{k-1}\right)\right]+f(\alpha_{k_0})\cdot\left[g\left(x_{k_0}\right)-g\left(x_{k_0-1}\right)\right]+$$

$$+\sum_{k=k_0+1}^{n} f(\alpha_k)\cdot\left[g\left(x_k\right)-g\left(x_{k-1}\right)\right]=\sum_{k=1}^{k_0-1} 0\cdot\left[g\left(x_k\right)-g\left(x_{k-1}\right)\right]+f(\alpha_{k_0})\cdot[1-0]+$$

$$+\sum_{k=k_0+1}^{n} f(\alpha_k)\cdot[1-1]=f(\alpha_{k_0}).$$

$$\left.\begin{array}{l}\text{Якщо } \alpha_{k_0}\le 0 \text{, то } \sigma_{[-1;1]}=f(\alpha_{k_0})=0, \\ \text{якщо } \alpha_{k_0}>0 \text{, то } \sigma_{[-1;1]}=f(\alpha_{k_0})=1,\end{array}\right\}\Rightarrow \text{ границя } \lim_{d\to 0}\sigma \text{ не існує.}$$

3. Інтегрування частинами. Для інтегралів Стілтьєса має місце формула

$$\int_a^b f(x)dg(x)=f(x)g(x)\Big|_a^b-\int_a^b g(x)df(x), \tag{1.13}$$

Причому із існування одного із цих інтегралів випливає існування іншого. Ця формула носить назву *формули інтегрування частинами.*

Доведення. Нехай існує інтеграл $\int_a^b gdf$. Розглянемо розбиття $R=\{x_k\}$ сегмента [*a, b*], оберемо на відрізках розбиття довільні проміжні точки $P=\{\alpha_k\}$ таким чином, що $a=x_0\le\alpha_1\le x_1\le\ldots\le x_{k-1}\le\alpha_k\le x_k\le\alpha_{k+1}\le x_{k+1}\le\ldots\le x_{n-1}\le\alpha_n\le x_n=b.$

Суму Стілтьєса для інтеграла $\int_a^b fdg$

$$\sigma=\sum_{k=1}^{n} f(\alpha_k)\left[g(x_k)-g(x_{k-1})\right]$$

можна представити у вигляді

$$\sigma=\sum_{k=1}^{n} f(\alpha_k)g(x_k)-\sum_{k=0}^{n-1} f(\alpha_{k+1})g(x_k)=$$

$$=-\left\{g(a)f(\alpha_1)+\sum_{k=1}^{n-1} g(x_k)\left[f(\alpha_{k+1})-f(\alpha_k)\right]-g(b)f(\alpha_n)\right\}.$$

Якщо додати і відняти справа вираз $f(x)g(x)\Big|_a^b=f(b)g(b)-f(a)g(a)$ та позначити $\alpha_0=a$, $\alpha_{n+1}=b$, то сума σ перепишеться так:

$$\sigma=f(x)g(x)\Big|_a^b-$$

$$-\left\{g(a)\left[f(\alpha_1)-f(a)\right]+\sum_{k=1}^{n-1} g(x_k)\left[f(\alpha_{k+1})-f(\alpha_k)\right]+g(b)\left[f(b)-f(\alpha_n)\right]\right\}=$$

$$=f(x)g(x)\Big|_a^b-\sum_{k=0}^{n} g(x_k)\left[f(\alpha_{k+1})-f(\alpha_k)\right].$$

Зменшувальний в правій частині представляє собою стілтьєсову суму для інтеграла $\int_a^b g df$ (існування якого припущено!). Вона відповідає розбиттю відрізка $[a,b]$ точками

$$a = \alpha_0 \le \alpha_1 \le \ldots \le \alpha_k \le \alpha_{k+1} \le \ldots \le \alpha_n \le \alpha_{n+1} = b,$$

якщо в якості проміжних точок із відрізків $\left[\alpha_k, \alpha_{k+1}\right]$ $\left(i = 0, \ldots, n\right)$ обрати x_k. Якщо $d = \max\left(x_k - x_{k-1}\right)$, то тепер довжини всіх частинних проміжків не перевищать $2d$.

При $d \to 0$ зазначена сума прямує до $\int_a^b g df$. Із цього випливає, що існує границя і для σ, яка не залежить від вибору розбиття $R = \{x_k\}$ і набору проміжних точок $P = \{\alpha_k\}$ (в силу довільності їх вибору). Значення границі $\lim\limits_{d \to 0} \sigma$ дорівнюватиме інтегралу $\int_a^b f dg$ і

$$\begin{array}{ccccc} \lim\limits_{d \leftrightarrow 0} \sigma & = & f(x)g(x)\Big|_a^b & - & \lim\limits_{d \leftrightarrow 0} \sum\limits_{k=0}^{n} g(x_k)\left[f(\alpha_{k+1}) - f(\alpha_k)\right] \\ \| & & & & \| \\ \int_a^b f(x)dg(x) & = & f(x)g(x)\Big|_a^b & - & \int_a^b g(x)df(x). \end{array} \quad \blacksquare$$

4 Теорема про існування інтеграла Рімана – Стілтьєса.

Теорема 1.15.

$$\left.\begin{array}{l} f(x) \text{ – неперервна на } [a,b], \\ \overset{b}{\underset{a}{V}}(g) < \infty, \end{array}\right\} \Rightarrow \quad \exists (S)\int_a^b f(x)dg(x).$$

Доведення. І. Припустимо спочатку, що функція $g(x)$ зростає на $[a,b]$. Розкладемо $[a,b]$ на частини точками

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_{k-1} < x_k < \ldots < x_{n-1} < x_n = b,$$

введемо позначення

$$m_k = \inf_{[x_{k-1}, x_k]} f(x); \qquad M_k = \sup_{[x_{k-1}, x_k]} f(x)$$

і розглянемо інтегральні суми Дарбу – Стілтьєса

$$\underline{S} = \sum_{k=1}^{n} m_k\left[g(x_k) - g(x_{k-1})\right], \quad \overline{S} = \sum_{k=1}^{n} M_k\left[g(x_k) - g(x_{k-1})\right].$$

1. Завдяки зростанню функції $g(x)$ кожна із різниць $g(x_k) - g(x_{k-1})$ невід’ємна, тому

$$\forall P=\{\alpha_k\} \quad \underline{S}<\sigma<\overline{S}\,.$$

2. Додавання до точок розбиття додаткових точок приводить до того, що $\underline{S}$ не зменшується, а $\overline{S}$ не збільшується.

Дійсно, без обмеження загальності міркувань можна розглянути лише одну додаткову точку розбиття.

$$\left.\begin{array}{l}\text{Нехай } R=\{x_k\} \ -\text{розбиття,}\\ x' - \text{додаткова точка,}\end{array}\right\}\Rightarrow \quad \text{нове розбиття } R':\ \{x_k\}\bigcup\{x'\}=\{x_i'\}.$$

Позначимо через k_0 той номер відрізка розбиття, в середину якого потрапила додаткова точка x', тобто $x_{k_0-1}<x'<x_{k_0}$, тоді, зважаючи на невід'ємність кожної із різниць $g(x_k)-g(x_{k-1})$, будемо мати:

$$\underline{S}'=\underline{S}(f,g,R')=\sum_{i=1}^{n} m_k\cdot[g(x_i')-g(x_{i-1}')]=\sum_{k<k_0} m_k\cdot[g(x_k)-g(x_{k-1})]+$$

$$+m_{k_0}'\cdot[g(x')-g(x_{k_0-1})]+m_{k_0}''\cdot[g(x_{k_0})-g(x')]+\sum_{k>k_0} m_k\cdot[g(x_k)-g(x_{k-1})],$$

$$m_{k_0}'=\inf_{[x_{k_0-1},x']} f(x)\ge \inf_{[x_{k_0-1},x_{k_0}]} f(x)=m_{k_0},$$

$$m_{k_0}''=\inf_{[x',x_{k_0}]} f(x)\ge \inf_{[x_{k_0-1},x_{k_0}]} f(x)=m_{k_0},$$

$$\underline{S}'\ge\sum_{k\ne k_0} m_k\cdot[g(x_k)-g(x_{k-1})]+$$

$$+\underbrace{m_{k_0}\cdot[g(x')-g(x_{k_0-1})]+m_{k_0}\cdot[g(x_{k_0})-g(x')]}_{=m_{k_0}\cdot[g(x_{k_0})-g(x_{k_0-1})]}$$

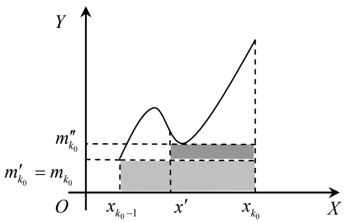

Рис. 1.5

$$=\sum_{k=1}^{n} m_k\cdot[g(x_k)-g(x_{k-1})]=\underline{S}.$$

Для верхньої суми аналогічно.

3. Будь яка нижня інтегральна сума Дарбу – Стілтьєса не більше за верхню суму, навіть для різних розбиттів, а саме: $\underline{S_1}\le\overline{S_2}$, для $R_1=\{x_k^{(1)}\}$, $R_2=\{x_i^{(2)}\}$. Дійсно, введемо до розгляду розбиття $R_3=R_1\bigcup R_2$ і інтегральні суми Дарбу – Стілтьєса $\underline{S_3}$ *і* $\overline{S_3}$, що йому відповідають. Розбиття R_3 є подрібненням як розбиття R_1, так і розбиття R_2, тому згідно з п.1 і п.2 маємо $\underline{S_1}\le\underline{S_3}\le\overline{S_3}\le\overline{S_2}$.

4. Отже, множина $\{\underline{S}=\underline{S}(f,g,R)\}_R$ обмежена зверху будь-якою фіксованою верхньою сумою Дарбу – Стілтьєса, тому $\exists\sup\limits_R\{\underline{S}(f,g,R\}=I$.

Таким чином, при будь якому способі розбиття буде $\underline{S}<I<\overline{S}$, тому

$$\left.\begin{array}{l}\underline{S}\le \mathrm{I}\le\overline{S},\\ \underline{S}\le\sigma\le\overline{S}\quad\forall P,\\ \text{див. рис. 1.6.}\end{array}\right\}\Rightarrow\quad |\mathrm{I}-\sigma|<\overline{S}-\underline{S}\ \ \forall P$$

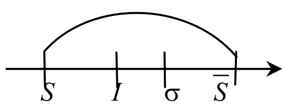

Рис. 1.6

5. f – неперервна на $[a,b]$ $\Rightarrow$ рівномірно неперервна на $[a,b]$ (теорема Кантора).

$\Rightarrow \forall\varepsilon>0\exists\delta>0:\forall R=\{x_k\}_{k=1}^n\ \ d<\delta\Rightarrow M_k-m_k<\dfrac{\varepsilon}{b-a}\,\forall k=\overline{1,n}$.

Тоді

$$\forall P=\{\alpha_k\}\ \forall R=\{x_k\}\ \ \left|\mathrm{I}-\sigma\right|<\overline{S}-\underline{S}=$$

$$=\sum_{k=1}^{n}(M_k-m_k)[g(x_k)-g(x_{k-1})]<\sum_{k=1}^{n}\frac{\varepsilon}{g(b)-g(a)}[g(x_k)-g(x_{k-1})]=$$

$$=\frac{\varepsilon}{g(b)-g(a)}[g(x_1)-g(x_0)+g(x_2)-g(x_1)+g(x_3)-g(x_2)+\ldots+$$

$$+g(x_{k-1})-g(x_{k-2})+g(x_k)-g(x_{k-1})+\ldots+g(x_{n-1})-g(x_{n-2})+g(x_n)-g(x_{n-1})]=$$

$$=\frac{\varepsilon}{g(b)-g(a)}[g(x_n)-g(x_0)]=\frac{\varepsilon}{g(b)-g(a)}[g(b)-g(a)]=\varepsilon.$$

Іншими словами, $\lim\limits_{d\to 0}\sigma=I$, отже, I і є інтегралом $\int\limits_a^b f(x)dg(x)$.

II. У загальному випадку, якщо функція $g(x)$ має обмежену зміну, її можна представити у вигляді різниці двох зростаючих обмежених функцій: $g(x)=g_1(x)-g_2(x)$. За доведеним вище кожен з інтегралів $\int\limits_a^b f(x)dg_1(x)$ і $\int\limits_a^b f(x)dg_2(x)$ існує, тому за властивістю лінійності інтеграла Стілтьєса існує, і $\int\limits_a^b f(x)dg(x)=\int\limits_a^b f(x)d(g_1(x)+g_1(x))$.

Доведення закінчено. ■

Із доведеної теореми і формули інтегрування частинами випливає

Наслідок 1.8. Будь-яка функція зі скінченною варіацією інтегровна по будь якій неперервній функції.

5. Теореми про обчислення інтеграла Рімана – Стілтьєса.

Теорема 1.16 *(про зв’язок між інтегралом Рімана і Стілтьєса)***.**

$$\left.\begin{array}{l} f(x)\ \text{– неперервна на } [a,b], \\ \exists g'(x)\ \text{– інтегровна за Ріманом на } [a,b] \end{array}\right\}\Rightarrow \boxed{(S)\int\limits_a^b f(x)dg(x)=(R)\int\limits_a^b f(x)g'(x)dx}.$$

Доведення. Обґрунтуємо існування кожного із інтегралів рівності, що доводиться. Оскільки $g'(x)$ – інтегровна за Ріманом на $[a,b]$, то $g'(x)$ – обмежена на $[a,b]$, тому $g(x)$ має обмежену варіацію. Отже,

$$\left.\begin{array}{l} f(x) \text{ – неперервна на } [a,b], \\ \overset{b}{\underset{a}{V}}(g) < \infty \end{array}\right\} \Rightarrow \quad \exists (S)\int_a^b f(x)dg(x) \text{ (th 1.5).}$$

Доведемо існування інтеграла Рімана за критерієм Лебега інтегровності функції:

$$\left.\begin{array}{l} f(x) \text{ – неперервна на } [a,b], \\ g'(x) \text{ – інтегровна за Ріманом на } [a,b] \end{array}\right\} \Rightarrow \quad \exists (R)\int_a^b f(x)g'(x)dx \, .$$

Тепер переходимо до доведення рівності інтегралів.

З цією метою розіб'ємо $[a,b]$ на частини точками

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < ... < x_{k-1} < x_k < ... < x_{n-1} < x_n = b \, .$$

До кожної різниці $g(x_k) - g(x_{k-1})$ $(k = \overline{1,n})$ застосуємо формулу Лагранжа:

$$\exists \alpha_k \in (x_k, x_{k-1}): \quad g(x_k) - g(x_{k-1}) = g'(\alpha_k)\cdot(x_k - x_{k-1}) \, .$$

Утворимо інтегральну суму Стілтьєса, обравши в якості проміжних точок ті, що знайдено при застосуванні формули Лагранжа:

$$\sigma_{(S)} = \sum_{k=1}^{n} f(\alpha_k)\left[g(x_k) - g(x_{k-1})\right] = \sum_{k=1}^{n} f(\alpha_k)g'(\alpha_k)\cdot(x_k - x_{k-1}) = \sigma_{(R)} \, .$$

Отримано рівність між інтегральними сумами Стілтьєса і Рімана, тому після граничного переходу при $d \to 0$ буде мати місце рівність між інтегралами. ■

Теорема 1.17. Нехай $f(x)$ – неперервна на $[a,b]$, а $g(x)$ стала на кожному із інтервалів $(a,c_1),(c_1,c_2),...,(c_m,b)$ де

$$a < c_1 < c_2 < ... < c_m < b \, .$$

Тоді

$$\boxed{\begin{aligned} (S)\int_a^b f(x)dg(x) &= f(a)\left[g(a+0) - g(a)\right] + \\ &+ \sum_{k=1}^{m} f(c_k)\left[g\left(c_k+0\right) - g\left(c_k-0\right)\right] + f(b)\left[g(b) - g(b-0)\right]. \end{aligned}} \quad (1.14)$$

Доведення. Кусково-стала функція $g(x)$ має обмежену варіацію на відрізку $[a,b]$, а тому і на будь-якій частині цього відрізка. Функція $f(x)$ – неперервна на $[a,b]$. Отже, інтеграл Стілтьєса існує як на усьому відрізку, так і на кожній його частині. Тому застосуємо властивість адитивності, позначивши $c_0 = a, c_{m+1} = b$:

$$\int_a^b f(x)dg(x) = \sum_{k=1}^{m+1} \int_{c_{k-1}}^{c_k} f(x)dg(x) .$$

Обчислимо інтеграл $\int_{c_{k-1}}^{c_k} f(x)dg(x) \quad (k=\overline{1,n})$. Нехай $\left\{x_i^{(k)}\right\}_{i=0}^{n_k}$ – розбиття відрізка $[c_{k-1}, c_k]$, тоді

$$\sigma_k = \sum_{i=1}^{n_k} f\left(\alpha_i^{(k)}\right)\left[g\left(x_i^{(k)}\right) - g\left(x_{i-1}^{(k)}\right)\right] = f\left(\alpha_0^{(k)}\right)\left[g\left(x_1^{(k)}\right) - g\underbrace{\left(x_0^{(k)}\right)}_{=c_{k-1}}\right] +$$

$$+\sum_{i=1}^{n_k} f\left(\alpha_i^{(k)}\right)\underbrace{\left[g\left(x_i^{(k)}\right) - g\left(x_{i-1}^{(k)}\right)\right]}_{=0} + f\left(\alpha_n^{(k)}\right)\left[g\underbrace{\left(x_n^{(k)}\right)}_{=c_k} - g\left(x_{n-1}^{(k)}\right)\right] =$$

$$= f\left(\alpha_0^{(k)}\right)\left[g\left(x_1^{(k)}\right) - g\left(c_{k-1}\right)\right] + f\left(\alpha_n^{(k)}\right)\left[g\left(c_k\right) - g\left(x_{n-1}^{(k)}\right)\right];$$

$$\underset{\substack{\| \\ \int_{c_{k-1}}^{c_k} f(x)dg(x)}}{\lim_{d\to 0}\sigma_k} = f\left(c_{k-1}\right)\left[g\left(c_{k-1}+0\right) - g\left(c_{k-1}\right)\right] + f\left(c_k\right)\left[g\left(c_k\right) - g\left(c_k - 0\right)\right].$$

Тепер обчислимо інтеграл вздовж відрізка $[a,b]$:

$$\int_a^b f(x)dg(x) = \sum_{k=1}^{m+1} \int_{c_{k-1}}^{c_k} f(x)dg(x) =$$

$$= \sum_{k=1}^{m+1}\left\{f\left(c_{k-1}\right)\left[g\left(c_{k-1}+0\right) - g\left(c_{k-1}\right)\right] + f\left(c_k\right)\left[g\left(c_k\right) - g\left(c_k - 0\right)\right]\right\} =$$

$$= f\left(c_0\right)\left[g\left(c_0+0\right) - g\left(c_0\right)\right] + f\left(c_1\right)\left[g\left(c_1\right) - g\left(c_1 - 0\right)\right] +$$

$$+ f\left(c_1\right)\left[g\left(c_1+0\right) - g\left(c_1\right)\right] + f\left(c_2\right)\left[g\left(c_2\right) - g\left(c_2 - 0\right)\right] + \ldots +$$

$$+ f\left(c_{k-2}\right)\left[g\left(c_{k-2}+0\right) - g\left(c_{k-2}\right)\right] + f\left(c_{k-1}\right)\left[g\left(c_{k-1}\right) - g\left(c_{k-1} - 0\right)\right] +$$

$$+ f\left(c_{k-1}\right)\left[g\left(c_{k-1}+0\right) - g\left(c_{k-1}\right)\right] + f\left(c_k\right)\left[g\left(c_k\right) - g\left(c_k - 0\right)\right] + \ldots +$$

$$+ f\left(c_{n-2}\right)\left[g\left(c_{n-2}+0\right) - g\left(c_{n-2}\right)\right] + f\left(c_{n-1}\right)\left[g\left(c_{n-1}\right) - g\left(c_{n-1} - 0\right)\right] +$$

$$+ f\left(c_{n-1}\right)\left[g\left(c_{n-1}+0\right) - g\left(c_{n-1}\right)\right] + f\left(c_n\right)\left[g\left(c_n\right) - g\left(c_n - 0\right)\right] =$$

$$= f\left(c_0\right)\left[g\left(c_0+0\right) - g\left(c_0\right)\right] + f\left(c_1\right)\left[g\left(c_1+0\right) - g\left(c_1 - 0\right)\right] + \ldots +$$

$$+ f\left(c_k\right)\left[g\left(c_k+0\right) - g\left(c_k - 0\right)\right] + \ldots + f\left(c_n\right)\left[g\left(c_n+0\right) - g\left(c_n - 0\right)\right].$$

Згадавши позначення $c_0 = a, c_{m+1} = b$, приходимо до рівності (1.14). ■

Теорема 1.18.

$f(x)$ – неперервна на $[a,b]$, $\overset{b}{\underset{a}{V}}(g)<\infty$, $\exists g'(x)$ – інтегровна за Ріманом у всіх точках $[a,b]$, окрім скінченної кількості $\{c_k\}_{k=1}^m$, $\Rightarrow$

$$\boxed{\begin{aligned}(S)\int_a^b f(x)dg(x) &= (R)\int_a^b f(x)g'(x)dx + \\ &+f(a)\left[g(a+0)-g(a)\right]+ \\ &+\sum_{k=1}^m f(c_k)\left[g\left(c_k+0\right)-g\left(c_k-0\right)\right]+ \\ &+f(b)\left[g(b)-g(b-0)\right]. \qquad (1.15)\end{aligned}}$$

Доведення. Оскільки $\overset{b}{\underset{a}{V}}(g)<\infty$, то представимо функцію $g(x)$ можна представити сумою функції її стрибків $s_g(x)$ і неперервної на $[a,b]$ функції $\varphi(x)=g(x)-s_g(x)$. Тоді $s_g(x)$ – кусково-стала на $[a,b]$ і згідно з (1.14)

$$(S)\int_a^b f(x)ds_g(x)= f(a)\left[g(a+0)-g(a)\right]+ +\sum_{k=1}^m f(c_k)\left[g\left(c_k+0\right)-g\left(c_k-0\right)\right]+$$
$$f(b)\left[g(b)-g(b-0)\right].$$

Функція $\varphi'(x)$ – інтегровна за Ріманом на $[a,b]$, і рівність $\varphi'(x)=g'(x)$ виконується у всіх точках $[a,b]$, крім скінченної кількості $\{c_k\}_{k=1}^m$, тому

$$(S)\int_a^b f(x)d\varphi(x)=(R)\int_a^b f(x)\varphi'(x)dx=(R)\int_a^b f(x)g'(x)dx.$$

Залишається застосувати властивість лінійності інтеграла Стілтьєса:

$$(S)\int_a^b f(x)dg(x)=(S)\int_a^b f(x)d\left(s_g(x)+\varphi(x)\right)=(S)\int_a^b f(x)ds_g(x)+(S)\int_a^b f(x)d\varphi(x)$$

і отримати формулу (1.15). ■

6. Застосування інтегралу Стілтьєса у функціональному аналізі.

Основою функціонального аналізу є лінійні неперервні функціонали, що задані на лінійних нормованих просторах, зокрема, на просторі $C[a,b]$ неперервних на відрізку $[a,b]$ функцій. Саме для таких функціоналів і застосовується інтеграл Стілтьєса. Наступну теорему наведемо без доведення. Доведення буде розглянуто в курсі функціонального аналізу.

Теорема 1.19. Для будь якого лінійного неперервного функціоналу $\Phi(f)$, заданого на $C[a,b]$, існує така функція $g(x)$ обмеженої варіації на $[a,b]$, що для кожної функції $f(x)\in C[a,b]$ буде

$$\Phi(f)=(S)\int_a^b f(x)dg(x).$$

Тема «Граничний перехід під знаком інтеграла Стілтьєса» виноситься на самостійне опрацювання ✍.