ІНДИВІДУАЛЬНЕ ЗАВДАННЯ
з дисципліни
«Функції обмеженої варіації та інтеграл Рімана-Стілтьєса»

1. Варіанти індивідуальних типових завдань

Тут N – номер прізвища студента в журналі академічної групи, g – остання цифра номера групи. Якщо t – дійсне число, то $[t]$ – ціла частина числа t, а $\{t\} = t - [t]$ – дробова частина числа t.

1. Побудувати монотонну функцію, що має N точок розриву на відрізку $[0; (N+1)\cdot g]$.

2. Чи мають функції обмежену варіацію?

а) $f(x) = \begin{cases} x^{N+g}\sin\dfrac{\pi}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$ на відрізку $[0;1]$;

б) $f(x) = (Nx^2 + gx)\cos 3x$ на відрізку $[0;\pi]$,

в) $f(x) = \begin{cases} \left[x^{-\frac{N}{g}}\right], & x \neq 0; \\ 0, & x = 0 \end{cases}$ на відрізку $[0;1]$;

г) $f(x) = \begin{cases} \log_{N+1}^{g} x, & x \neq 0; \\ 0, & x = 0 \end{cases}$ на відрізку $[0;1]$?

3. Знайти варіацію функцій

а) $f(x) = \begin{cases} 3x + g, & 0 \le x < 1,\ 2 < x < 3; \\ N, & x = 1, 2, 3; \\ (x-g)^2, & 1 < x < 2; \\ \sin \pi x, & 3 < x < 4; \\ N - g, & x = 4 \end{cases}$ на відрізку $[0;4]$;

б) $f(x) = \begin{cases} \left\{\sin\dfrac{2\pi x}{g}\right\}, & 0 < x < 2g; \\ N, & x = 0, 2g, 3g; \\ \left(\dfrac{x}{g} - 1\right)^2, & 2g < x < 3g \end{cases}$ на відрізку $[0;3g]$.

4. Подати кожну з функцій прикладу 3 у вигляді суми функції її стрибків і неперервної функції.

5. Подати функцію

$$f(x)=\begin{cases} x+g, & \text{при} -2\le x\le -1,\\ 2, & \text{при} -1<x<0,\\ N-x, & \text{при } 0\le x\le 2\end{cases}$$

у вигляді різниці двох зростаючих функцій.

6. Обчислити

а) $(S)\int\limits_{\sqrt{\frac{\pi}{3g}}}^{\sqrt{\frac{\pi}{2g}}}\frac{1}{\sin gx^2}d(gx^2)$; б) $(S)\int\limits_0^1 (Nx+g)\,d(\operatorname{arctg}(Nx+g))$;

в) $(S)\int\limits_0^1 \frac{1}{Nx+g}d(\operatorname{arctg}(Nx+g))$; г) $(S)\int\limits_0^{\pi}(gx+N)^2 d(\cos x)$.

7. Обчислити інтеграли:

а) $(S)\int\limits_{-1}^{3} x\,dh(x)$, де $h(x)=\begin{cases} g, & \text{при } x=-1,\\ N, & \text{при} -1<x<2,\\ N+g, & \text{при } 2\le x\le 3;\end{cases}$

б) $(S)\int\limits_0^2 x^2 dh(x)$, де $h(x)=\begin{cases} -g, & \text{при } 0\le x<\frac{1}{2},\\ 0, & \text{при } \frac{1}{2}\le x<\frac{3}{2},\\ N+2, & \text{при } x=\frac{3}{2},\\ N-2, & \text{при } \frac{3}{2}<x\le 2.\end{cases}$

Знайти варіацію функції $h(x)$ на відрізку а) $[-1;3]$, б) $[0;2]$.

8. Обчислити інтеграли $(S)\int\limits_{-2}^{2} f(x)dh(x)$ і $(S)\int\limits_{-2}^{2} h(x)df(x)$, де

$$f(x)=\cos\pi x\,,\ h(x)=\begin{cases} g+1, & -2<x<-1; \\ N+2, & x=-2;\ x=-1; \\ g+3, & -1<x<0; \\ N, & x=0;\ x=1;\ x=2; \\ g-1, & 0<x<1; 1<x<2. \end{cases}$$

Обчислити варіації кожної з функцій на відрізку $[-2;2]$.

9. Обчислити $(S)\int_a^b h(x)d(f(x))$ і $(S)\int_a^b f(x)d(h(x))$, якщо

а) $f(x)=\begin{cases} 3x+g, & 0\le x<1, 2<x<3; \\ N, & x=1,2,3; \\ (x-g)^2, & 1<x<2; \end{cases}$, $h(x)=\sin\dfrac{\pi x}{4}$, $[a;b]=[0;3]$;

б) $f(x)=\log_2 x$; $h(x)=\begin{cases} -x+g, & \frac{1}{2}\le x<1, 2<x<4; \\ N, & x=1,2,8; \\ (x-5)^2, & 1<x<2, 4<x<8. \end{cases}$ $[a;b]=\left[\dfrac{1}{2};8\right]$.

Обчислити варіацію кожної функції на відрізку $[a;b]$.

10. Обчислити інтеграл $(S)\int_1^{N+1}\dfrac{1}{x}d\{\log_{N+1}x\}$.

2. Приклад виконання індивідуального завдання

Приклад 27. Чи мають функції обмежену варіацію на відрізку $[0,1]$?

а) $f(x)=\begin{cases} x^2\ln x, & \text{якщо } x\ne 0; \\ 0, & \text{якщо } x=0; \end{cases}$

б) $f(x)=x^3+2x+3-\sin(5x+1)-(3x^2+7x)\cos 4x$;

в) $f(x)=\begin{cases} [\ln x], & \text{якщо } x\ne 0; \\ 0, & \text{якщо } x=0. \end{cases}$

Розв'язання. а) При розв'язанні будемо застосовувати *теорему 1.42* про обмеженість варіації у монотонної функції та наслідок із *теореми 1.46* про адитивність повної варіації.

Дослідження на монотонність проведемо за допомогою похідної. Знайдемо похідну заданої функції в точці $x = 0$:

$$f'(0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(0+\Delta x) - f(0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(\Delta x)^2 \cdot \ln \Delta x - 0}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \Delta x \cdot \ln \Delta x =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\ln \Delta x}{(\Delta x)^{-1}} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] = [\text{правило Лопіталя}] \overset{?}{=} \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(\Delta x)^{-1}}{-(\Delta x)^{-2}} = -\lim_{\Delta x \to 0} \Delta x = 0.$$

При $x \in (0;1]$

$$f'(x) = 2x \ln x + x = x(2\ln x + 1).$$

Отже,

$$f'(x) = 0; \ \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0, \\ 2\ln x + 1 = 0; \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0, \\ x = \dfrac{1}{\sqrt{e}}; \end{array}\right.$$

$$f'(x) \geq 0 \text{ при } x \in \left[\frac{1}{\sqrt{e}};1\right] \Rightarrow f(x) - \nearrow \text{ на } \left[\frac{1}{\sqrt{e}};1\right];$$

$$f'(x) \leq 0 \text{ при } x \in \left[0;\frac{1}{\sqrt{e}}\right] \Rightarrow f(x) - \searrow \text{ на } \left[0;\frac{1}{\sqrt{e}}\right].$$

Таким чином, унаслідок *теореми 1.42*, на кожному з відрізків $\left[0;\frac{1}{\sqrt{e}}\right]$ та $\left[\frac{1}{\sqrt{e}};1\right]$ функція має обмежену варіацію, а тому має обмежену варіацію на відрізку $[0;1]$ (*за наслідком 1.14*). ■

б) Похідна функції $f(x)$ на відрізку $[0,1]$

$$f'(x) = 3x^2 + 2 - 5\cos(5x+1) - (6x+7)\cos 4x + 4(3x^2 + 7x)\sin 4x$$

є функцією, неперервною на відрізку $[0,1]$. Тоді, за першою теоремою Вейєрштрасса [**3**, с.186; **4**, с.175], $f'(x)$ – обмежена на $[0,1]$.

Отже, за *наслідком 1.12*, задана функція має обмежену варіацію на відрізку $[0,1]$.

в) Оскільки $\lim\limits_{x\to 0}\left[\ln x\right] = -\infty$, то задана функція необмежена в околі точки 0, тому для неї не виконується *необхідна умова обмеженості варіації*. Отже, ця функція має необмежену варіацію на відрізку $[0,1]$. ■

Приклад 28. Знайти повну варіацію функцій

а) $$f(x) = \begin{cases} 3, & \text{при } x = -2; \\ x+4, & \text{при } x \in (-2;-1); \\ 4, & \text{при } x = -1; \\ -\dfrac{1}{2}x + \dfrac{1}{2}, & \text{при } x \in (-1;1); \\ 2, & \text{при } x = 1; \\ x, & \text{при } x \in (1;2); \\ 1, & \text{при } x = 2 \end{cases}$$

на відрізку $[-2;2]$;

б) $$f(x) = \begin{cases} 1+4(x+0,5)^2, \text{ при } x \in (-1;-0,5)\cup(-0,5;0); \\ 3, & \text{при } x=-1,\ x=0,5,\ x=5; \\ 1, & \text{при } x=0,\ x=4; \\ \{\sin \pi x\}, & \text{при } x \in (0;3]; \\ x-2, & \text{при } x \in (3;4) \\ 7-x, & \text{при } x \in (4;5) \end{cases}$$

на відрізку $[-1;5]$.

Розв'язання. а) Графік заданої функції побудовано на рис. 13.

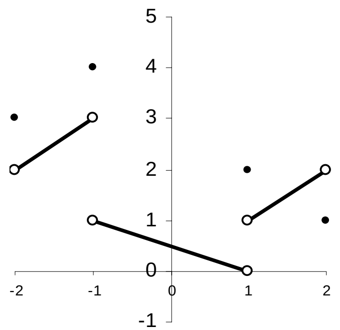


Рис. 1

Для обчислення варіації цієї функції знайдемо значення величин, які наведено в табл. 2:

Таблиця 2 –

Зміна функції на інтервалі	Лівий стрибок	Правий стрибок
		$\left\|f(-2)-f(-2+0)\right\|=1$
$\left\|f(-2+0)-f(-1-0)\right\|=1$		
	$\left\|f(-1-0)-f(-1)\right\|=1$	$\left\|f(-1)-f(-1+0)\right\|=3$
$\left\|f(-1+0)-f(1-0)\right\|=1$	$\left\|f(1-0)-f(1)\right\|=2$	$\left\|f(1)-f(1+0)\right\|=1$
$\left\|f(1+0)-f(2-0)\right\|=1$	$\left\|f(2-0)-f(2)\right\|=1$	

Застосовуючи формулу (3.7), що потребує підсумовування усіх значень із таблиці, отримаємо: $\overset{2}{\underset{-2}{V}}(f)=12$.

б) В прикладі 3.208 викладено подробиці щодо побудови графіка функції $y=\{\sin \pi x\}$, який зображено на рис. 3.31. Графік такої функції побудовано на рис. 15.

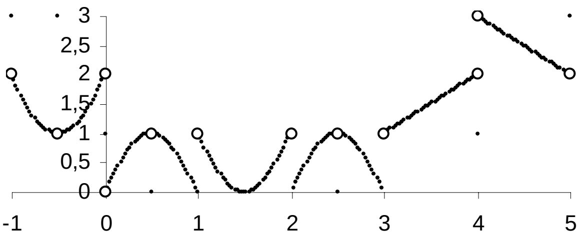


Рис. 15.

Для обчислення варіації функції $f(x)$ знайдемо значення величин, які зведемо в табл. 3:

Таблиця 3 –

Зміна функції на інтервалі чи півінтервалі	Лівий стрибок	Правий стрибок

		$\lvert f(-1)-f(-1+0)\rvert=1$
$\lvert f(-1+0)-f(-0,5-0)\rvert=1$		
	$\lvert f(-0,5-0)-f(-0,5)\rvert=2$	$\lvert f(-0,5)-f(-0,5+0)\rvert=2$
$\lvert f(-0,5+0)-f(0-0)\rvert=1$	$\lvert f(0-0)-f(0)\rvert=1$	$\lvert f(0)-f(0+0)\rvert=1$
$\lvert f(0+0)-f(0,5-0)\rvert=1$	$\lvert f(0,5-0)-f(0,5)\rvert=1$	$\lvert f(0,5)-f(0,5+0)\rvert=1$
$\lvert f(0,5+0)-f(1)\rvert=1$		$\lvert f(1)-f(1+0)\rvert=1$
$\lvert f(1+0)-f(1,5)\rvert=1$		
$\lvert f(1,5)-f(2-0)\rvert=1$	$\lvert f(2-0)-f(2)\rvert=1$	
$\lvert f(2)-f(2,5-0)\rvert=1$	$\lvert f(2,5-0)-f(2,5)\rvert=1$	$\lvert f(2,5)-f(2,5+0)\rvert=1$
$\lvert f(2,5+0)-f(3)\rvert=1$		$\lvert f(3)-f(3+0)\rvert=1$
$\lvert f(3+0)-f(4-0)\rvert=1$	$\lvert f(4-0)-f(4)\rvert=1$	$\lvert f(4)-f(4+0)\rvert=2$
$\lvert f(4+0)-f(5-0)\rvert=1$	$\lvert f(5-0)-f(5)\rvert=1$	

Застосовуючи формулу (3.7), отримаємо: $\overset{5}{\underset{-1}{V}}(f)=28$. ■

Приклад 29. Подати кожну з функцій прикладу 28 у вигляді суми функції її стрибків і неперервної функції.

Розв'язання. В цьому прикладі мова йде про застосування *теореми 1.48*. Для функції $f(x)$, що задана на відрізку $[a,b]$, *функція стрибків* визначається співвідношеннями:

$$s_f(a)=0,$$

$$s_f(x)=f(a+0)-f(a)+\sum_{x_k<x}\left[f\left(x_k+0\right)-f\left(x_k-0\right)\right]+f(x)-f(x-0),$$

де $\{x_k\}_k\subset(a,b)$ – точки розриву функції $f(x)$.

а) У табл. 2 наведено значення модулів усіх односторонніх стрибків заданої функції. Враховуючи напрям стрибка («вгору» або «вниз»), побудуємо функцію стрибків функції $f(x)$:

$$s_f(x)=\begin{cases} 0, & x=-2,\\ -1, & x\in(-2,-1),\\ -1+1=0, & x=-1,\\ 0+(-3)=-3, & x\in(-1,1),\\ -3+2=-1, & x=1,\\ -1+(-1)=-2, & x\in(1,2),\\ -2+(-1)=-3, & x=2. \end{cases}$$

Тоді

$$\varphi(x)=f(x)-s_f(x)=\begin{cases} 3-0=3, & x=-2;\\ x+4-(-1)=x+5, & x\in(-2;-1);\\ 4-0=4, & x=-1;\\ \left(-\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}\right)-(-3)=-\frac{1}{2}x+\frac{7}{2}, & x\in(-1;1);\\ 2-(-1)=3, & x=1;\\ x-(-2)=x+2, & x\in(1;2);\\ 1-(-3)=4, & x=2; \end{cases} =$$

$$=\begin{cases} x+5, & x\in[-2;-1];\\ -\frac{1}{2}x+\frac{7}{2}, & x\in(-1;1];\\ x+2, & x\in(1;2]. \end{cases}$$

є неперервною на $[0;1]$. Отже, $f(x)=s_f(x)+\varphi(x)$.

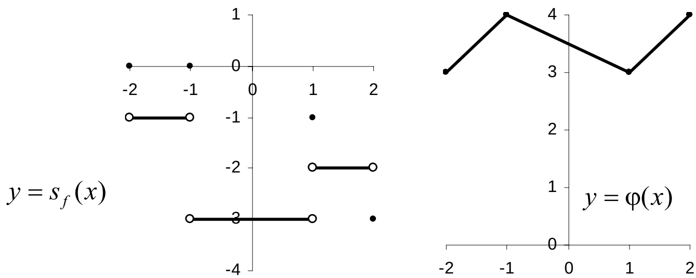


Рис. 16.

На рис. 16 зображено графіки функцій, що вимагалися умовою задачі. ■

б) Враховуючи значення модулів стрибків, наведених у табл. 3 та їхній напрям, побудуємо функцію стрибків функції $f(x)$:

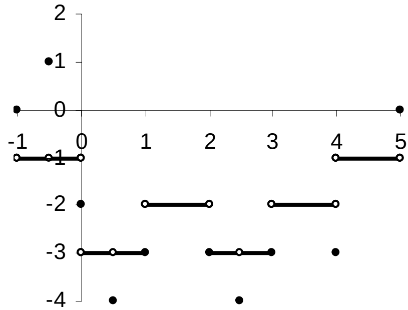
$$
s_f(x)=\begin{cases}
0, & x=-1;\\
-1, & x\in(-1;-0,5);\\
-1+2=1, & x=-0,5;\\
1+(-2)=-1, & x\in(-0,5;0);\\
-1+(-1)=-2, & x=0;\\
-2+(-1)=-3, & x\in(0;0,5);\\
-3+(-1)=-4, & x=0,5;\\
-4+1=-3, & x\in(0,5;1];\\
-3+1=-2, & x\in(1;2);\\
-2+(-1)=-3, & x\in[2;2,5);\\
-3+(-1)=-4, & x=2,5;\\
-4+1=-3, & x\in(2,5;3];\\
-3+1=-2, & x\in(3;4);\\
-2+(-1)=-3, & x=4;\\
-3+2=-1, & x\in(4;5);\\
-1+1=0, & x=5.
\end{cases}
$$

Тоді

$$
\varphi(x)=f(x)-s_f(x)=\begin{cases}
2+4(x+0,5)^2, & x\in[-1;0];\\
\sin\pi x+3, & x\in(0;3];\\
x, & x\in(3;4];\\
8-x, & x\in(4;5]
\end{cases}
$$

є неперервною на $[0;1]$. Отже, $f(x)=s_f(x)+\varphi(x)$.

$y = s_f(x)$



$y = \varphi(x)$

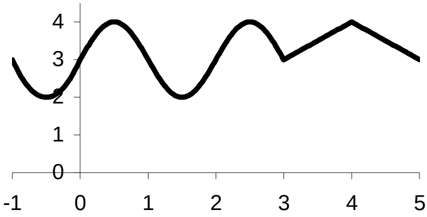


Рис. 17.

На рис. 17 зображено графіки функцій, що вимагалися умовою задачі.

■

Приклад 30. Функцію з прикладу 28 а подати у вигляді різниці двох зростаючих функцій на відрізку $[-2;2]$.

Розв'язання. З *теореми 1.47* випливає, що функцію $f(x)$ можна подати у вигляді різниці зростаючих $f(x) = \pi(x) - \varphi(x)$, де

$$\pi(x) = \mathop{V}_{-2}^{x}(f), \quad \varphi(x) = \pi(x) - f(x), \quad x \in [-2;2].$$

За означенням, $\pi(0) = 0$. Якщо $x \in (-2;-1)$, то $\mathop{V}_{-2}^{x}(f)$ лінійно зростає від значень, близьких до 1, до значень, близьких до 2, тому $\mathop{V}_{-2}^{x}(f) = x + 3$. Якщо $x = -1$, то $\mathop{V}_{-2}^{x}(f) = 3$. При $x = -1 + h \in (-1;1)$ варіація дорівнює $\mathop{V}_{-2}^{x}(f) = 6 + \frac{1}{2}h = 6 + \frac{1}{2}(x+1) = \frac{1}{2}x + \frac{13}{2}$. Для $x = 1$ маємо: $\mathop{V}_{-2}^{x}(f) = 9$. Для $x = 1 + h \in (1;2)$ варіація дорівнює $\mathop{V}_{-2}^{x}(f) = 10 + h = 10 + (x-1) = x + 9$. Нарешті, при $x = 1$ маємо: $\mathop{V}_{-2}^{x}(f) = 12$.Отже,

$$\pi(x)=\begin{cases} 0, & x=-2;\\ x+3, & x\in(-2;-1);\\ 3, & x=-1;\\ \dfrac{1}{2}x+\dfrac{13}{2}, & x\in(-1;1);\\ 9, & x=1;\\ x+9, & x\in(1;2);\\ 12, & x=2, \end{cases}$$

тоді

$$\varphi(x)=\pi(x)-f(x)=\begin{cases} 0-3=-3, & x=-2;\\ (x+3)-(x+4)=-1, & x\in(-2;-1);\\ 3-4=-1, & x=-1;\\ \left(\dfrac{1}{2}x+\dfrac{13}{2}\right)-\left(-\dfrac{1}{2}x+\dfrac{1}{2}\right)=x+6, & x\in(-1;1);\\ 9-2=7, & x=1;\\ x+9-x=9, & x\in(1;2);\\ 12-1=11, & x=2; \end{cases}$$

$$\varphi(x)=\begin{cases} -3, & x=-2;\\ -1, & x\in(-2;-1];\\ x+6, & x\in(-1;1];\\ 9, & x\in(1;2);\\ 11, & x=2. \end{cases}$$

На рис. 18 зображено графіки функцій, що вимагалися умовою задачі. ■

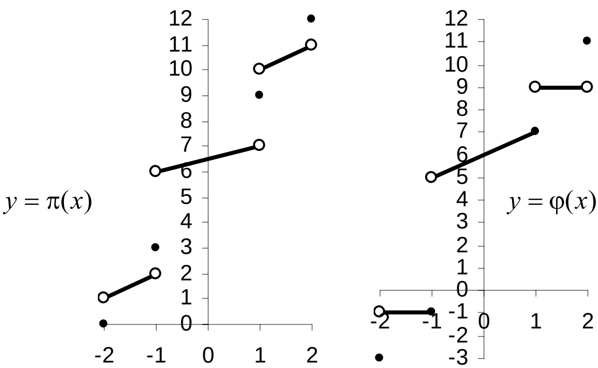


Рис. 18.

Приклад 31. Обчислити інтеграли Стілтьєса

а) $(S)\int\limits_0^1 \frac{d\left(\ln\left(x+1\right)\right)}{x+2}$, **б)** $(S)\int\limits_0^1 \left(x^2+1\right)d\left(e^{5x-3}\right)$.

Розв'язання. а) В даному випадку $f(x)=\frac{1}{x+2}$, $g(x)=\ln\left(x+1\right)$. Функція $f(x)$ – неперервна на $[0;1]$, функція $g(x)$ має неперервну, а тому інтегровну на $[0;1]$ похідну $g'(x)=\frac{1}{x+1}$. Тому застосовуємо теорему про зв'язок між інтегралом Стілтьєса й Рімана:

$$(S)\int\limits_0^1 \frac{d\left(\ln\left(x+1\right)\right)}{x+2}=(R)\int\limits_0^1 \frac{\left(\ln\left(x+1\right)\right)'}{x+2}dx=(R)\int\limits_0^1 \frac{dx}{\left(x+1\right)\left(x+2\right)}=$$

$$=(R)\int\limits_0^1\left(\frac{1}{x+1}-\frac{1}{x+2}\right)dx=\left(\ln\left|x+1\right|-\ln\left|x+2\right|\right)\Big|_0^1=\ln\frac{4}{3}.$$

б) Формально застосуємо двічі формулу інтегрування частинами:

$$(S)\int\limits_0^1\left(x^2+1\right)d\left(e^{5x-3}\right)=\left(\left(x^2+1\right)\cdot e^{5x-3}\right)\Big|_0^1-(S)\int\limits_0^1 2x\,d\left(e^{5x-3}\right)=$$

$$=2e^2-e^{-3}-\left(2x\cdot e^{5x-3}\right)\Big|_0^1+(S)\int\limits_0^1 2\,d\left(e^{5x-3}\right)=-e^{-3}+(S)\int\limits_0^1 2\,d\left(e^{5x-3}\right).$$

Розглянемо інтеграл $(S)\int\limits_0^1 2\,d\left(e^{5x-3}\right)$. Тут $f(x)=2$ – неперервна на $[0,a]$, а функція $g(x)=e^{5x-3}$ має неперервну похідну на $[0,a]$, тому інтеграл Стілтьєса існує. Отже, формальне застосування формули інтегрування частинами є коректним. Крім того, можна застосувати формулу зв'язку між інтегралами Стілтьєса й Рімана:

$$(S)\int\limits_0^1 2\,d\left(e^{5x-3}\right)=(R)\int\limits_0^1 2\left(e^{5x-3}\right)'dx=2e^{5x-3}\Big|_0^1=2e^2-2e^{-3}.$$

В результаті отримаємо:

$$(S)\int_0^1 \left(x^2+1\right) d\left(e^{5x-3}\right) = -e^{-3} + (S)\int_0^1 2\, d\left(e^{5x-3}\right) = 2e^2 - 3e^{-3}\,. \blacksquare$$

Приклад 32. Обчислити інтеграл:

$$(S)\int_0^3 \left(x-1\right)^2 dg(x)\text{, де } g(x) = \begin{cases} -1, & \text{при } 0 \le x < 1, \\ 0, & \text{при } 1 \le x < 2, \\ 2, & \text{при } x = 2, \\ -2, & \text{при } 2 < x \le 3. \end{cases}$$

Розв'язання. В цьому прикладі задано кусково-сталу функцію $g(x)$ і неперервну функцію $f(x) = \left(x-1\right)^2$ на $[0;3]$, тому для обчислення будемо застосовувати формулу (1.58).

При $x = 1$ функція $g(x)$ має стрибок 1, а при $x = 2$ її стрибок дорівнює -2 (значення функції $g(x)$ при $x = 2$ не впливає на результат). Причому $f(1) = 0,\ \ f(2) = 1$. Маємо:

$$(S)\int_0^3 \left(x-1\right)^2 dg(x) = f(1)\cdot\left[g(1+0) - g(1)\right] + f(2)\cdot\left[g(2+0) - g(2-0)\right] =$$

$$= 0\cdot 1 + 1\cdot(-2) = -2.\ \blacksquare$$

Приклад 33. Обчислити інтеграл $\int_a^b x dg(x)$, де $g(x) -$ функції із прикладу 28 на відрізках $[a;b]$, що відповідають умові цього прикладу.

Розв'язання. В цьому прикладі задано функції $g(x)$ так, що $\exists g'(x)$ – інтегровні за Ріманом у всіх точках відрізку $[a;b]$, окрім скінченної кількості. Функція $f(x) = x$ неперервна на цьому відрізку. Тому для обчислення будемо застосовувати формулу (1.59).

а) Функція $g(x)$ має такі стрибки:

в точці $x = -2$ стрибок (правий) дорівнює -1,

в точці $x = -1$ стрибок (повний) дорівнює -2,

в точці $x = 1$ стрибок (повний) дорівнює 1,

в точці $x = 2$ стрибок (лівий) дорівнює -1.

Похідна цієї функції:

$$g'(x) = \begin{cases} 1, & x \in (-2;-1); \\ -\frac{1}{2}, & x \in (-1;1); \\ 1, & x \in (1;2). \end{cases}$$

Тому

$$\int_{-2}^{2} xdg(x) = \int_{-2}^{-1} xdx - \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} xdx + \int_{1}^{2} xdx +$$

$$+(-2)\cdot(-1) + (-1)\cdot(-2) + 1\cdot 1 + 2\cdot(-1) = \frac{9}{2}. \blacksquare$$

б) Похідна цієї функції:

$$g'(x) = \begin{cases} 8(x+0,5), & \text{при } x \in (-1;-0,5) \cup (-0,5;0); \\ \pi\cos\pi x, & \text{при } x \in (0;3)/\{0,5;\,1;\,2;\,2,5\}; \\ 1, & \text{при } x \in (3;4); \\ -1, & \text{при } x \in (4;5). \end{cases}$$

З урахуванням формули (1.59) і значень стрибків, модулі яких внесені до табл. 2, отримаємо:

$$\int_{-2}^{2} xdg(x) = 8\int_{-1}^{0} x\left(x+0,5\right)dx + \pi\int_{0}^{3} x\cos\pi x dx + \int_{3}^{4} xdx - \int_{4}^{5} xdx +$$

$$+(-1)\cdot(-1) + (-0,5)\cdot 0 + 0\cdot(-2) + 0,5\cdot 0 + 1\cdot 1 + 2\cdot(-1) + 2,5\cdot 0 +$$

$$+3\cdot 1 + 4\cdot 1 + 5\cdot 1 = 20\frac{2}{3} - \frac{2}{\pi}. \blacksquare$$

Приклад 3 Обчислити інтеграл $(S)\int_{1}^{2} \frac{1}{x^2+5} d\left\{x^2\right\}$.

Розв'язання. Маємо

$$(S)\int_{1}^{2} \frac{1}{x^2+5} d\left\{x^2\right\} = (S)\int_{1}^{2} \frac{1}{x^2+5} d\left(x^2\right) - (S)\int_{1}^{2} \frac{1}{x^2+5} d\left[x^2\right],$$

$$(S)\int_{1}^{2} \frac{1}{x^2+5} d\left(x^2\right) = (R)\int_{1}^{2} \frac{2x}{x^2+5} dx = \int_{1}^{2} \frac{d\left(x^2+5\right)}{x^2+5} = \ln\left(x^2+5\right)\Big|_{1}^{2} = \ln\frac{3}{2}.$$

На рис. 3.26 зображено графік функції $y=\left[x^2\right]$. В точках розриву $x=1$, $x=\sqrt{2}$, $x=\sqrt{3}$ і $x=2$ стрибок цієї функції дорівнює 1. Застосувавши формулу (1.58), отримаємо:

$$(S)\int_1^2 \frac{1}{x^2+5}\,d\left[x^2\right]=\frac{1}{6}\cdot 1+\frac{1}{7}\cdot 1+\frac{1}{8}\cdot 1+\frac{1}{9}\cdot 1=\frac{275}{504}.$$

Звідки $(S)\int_1^2 \frac{1}{x^2+5}\,d\left\{x^2\right\}=\ln\frac{3}{2}-\frac{275}{504}$. ■