

ПІДСУМКОВИЙ КОНТРОЛЬ (ЗАЛІК)

§ 1. Теоретичні питання

1. Означення монотонної функції, стрибка функції в точці, функції стрибків. Приклади. Довести, що монотонна функція може мати точки розриву лише I роду.
2. Теорема про потужність множини точок розриву монотонної функції.
3. Довести, що різниця між монотонною функцією й функцією її стрибків є неперервною, монотонною функцією.
4. Приклад монотонної неперервної функції, що має нульову похідну в майже усіх точках, коливання якої на відрізку визначення не дорівнює нулю.
5. Теорема про існування монотонної, неперервної на відрізку функції, яка має нескінченну похідну в точках наперед заданої множини лебегової міри нуль.
6. Означення функції з обмеженою варіацією.
7. Теорема про обмеженість варіації монотонної функції.
8. Теорема про обмеженість варіації функції, що задовольняє умову Ліпшица і наслідок з неї.
9. Необхідна умова обмеженості варіації функції.
10. Арифметичні операції над функціями обмеженої варіації.
11. Адитивність повної варіації.
12. Теорема про подання функції обмеженої варіації різницею двох зростаючих функцій.
13. Теорема про потужність множини точок розриву функції скінченної варіації.
14. Теорема про подання функції обмеженої варіації сумою функції її стрибків і неперервної функції.
15. Означення інтеграла Рімана-Стільтєса, приклади.
16. Основні властивості інтеграла Стільтєса. Формула інтегрування частинами.
17. Теорема про існування інтеграла Стільтєса.
18. Теорема про зв'язок інтеграла Стільтєса та інтеграла Рімана.
19. Обчислення інтеграла Стільтєса від неперервної функції за кусково-сталою функцією.
20. Обчислення інтеграла Стільтєса від неперервної функції по функції, що має обмежену варіацію й має інтегровну за Ріманом похідну у всіх точках, окрім скінченної кількості.
21. Застосування інтеграла Стільтєса у фізиці.

Запитання вхідного контролю

1. Означення монотонної функції.
2. Означення стрибка функції.
3. Означення функції стрибків.
4. Якого роду розриви може мати монотонна функція?
5. Яка потужність множини точок розриву монотонної функції?
6. Властивості функції, що є різницею між монотонною функцією і функцією її стрибків.
7. Означення множини лебегової міри нуль.
8. Чи вірне твердження: будь-яка обмежена на відрізку функція в кожній точці цього відрізка має хоча б одне похідне число?
9. Чи вірне твердження: існує обмежена на відрізку функція, яка хоча б в одній точці цього відрізка не має жодного похідного числа?
10. Яка міра множини тих точок, в яких монотонна функція має хоча б одне нескінченне похідне число?
11. Яка міра множини тих точок, в яких монотонна функція не має похідної?
12. Канторова множина та її міра
13. Необхідна умова обмеженості варіації функції.
14. Скільки дорівнює варіація зростаючої на відрізку функції?
15. Скільки дорівнює варіація спадної на відрізку функції?
16. Який зв'язок між функціями обмеженої варіації на відрізку і функціями, що мають на ньому обмежену похідну?
17. Запишіть властивість адитивності варіації.
18. Яким чином виражається функція обмеженої варіації через дві монотонні функції?

19. Якого роду розриви може мати функція скінченної варіації?
20. Властивості функції, що є різницею між функцією скінченної варіації та функцією її стрибків.
21. Теорема про існування інтегралу Рімана – Стілтєса.
22. Теорема про зв'язок інтегралу Рімана – Стілтєса та інтегралу Рімана.
23. Формула інтегрування частинами.
24. Формула обчислення інтегралу Рімана – Стілтєса від неперервної функції за кусково-сталою функцією.

§ 2. Задачі для перевірки практичних навичок

1 – 6. Визначити, чи існують інтеграли Стілтєса функцій f за мірою g і, якщо існують, обчислити ці інтеграли:

1. $f(x) = x^3, g(x) = \arctg x, x \in [0; 1]$.

2. $f(x) = [x], g(x) = x^2, x \in [-1; 1]$.

3. $f(x) = x^3, g(x) = [x], x \in [0; 5]$.

4. $f(x) = \text{sign } x, g(x) = [x], x \in [-1; 1]$.

5. $f(x) = e^{-x}, g(x) = [x], x \in [0; 1]$.

6. $f(x) = x^4, g(x) = \ln x, x \in [1; 5]$.

7. Чи мають функції обмежену варіацію?

а) $f(x) = \begin{cases} x^3 \sin \frac{\pi}{x^2}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$ на відрізку $[0; 1]$;

б) $f(x) = (x^4 - 7x) \cos 7x$ на відрізку $[0; \pi]$;

в) $f(x) = \begin{cases} [x^{-2}], & x \neq 0; \\ 0, & x = 0 \end{cases}$ на відрізку $[0; 1]$.

8. Знайти повну варіацію функцій

а) $f(x) = \begin{cases} -x + 2, & 0 \leq x < 1, 2 < x < 3; \\ 4, & x = 1, 2, 3; \\ (x - 1, 5)^2, & 1 < x < 2; \\ \cos \pi x, & 3 < x < 4; \\ -2, & x = 4 \end{cases}$ на відрізку $[0; 4]$;

б) $f(x) = \begin{cases} \left\{ \cos \frac{2\pi x}{3} \right\}, & 0 < x < 6; \\ -2, & x = 0, 4, 6; \\ (x - 5)^2, & 4 < x < 6 \end{cases}$ на відрізку $[0; 6]$.

9. Подати кожну з функцій прикладу 8 у вигляді суми функції її стрибків і неперервної функції.

10. Подати функцію

$$f(x) = \begin{cases} 1 - x, & \text{при } -2 \leq x \leq -1, \\ 2, & \text{при } -1 < x < 0, \\ (1 - x)^2, & \text{при } 0 \leq x \leq 2 \end{cases}$$

у вигляді різниці двох зростаючих функцій.

11. Обчислити інтеграл Рімана-Стілтєса:

$$(S) \int_0^3 \sin \frac{\pi x}{2} dg(x), \text{ де } g(x) = \begin{cases} -3, & \text{при } 0 \leq x < 1, \\ 2, & \text{при } 1 \leq x < 2, \\ 5, & \text{при } x = 2, \\ -2, & \text{при } 2 < x \leq 3. \end{cases}$$

12. Обчислити інтеграл $(S)\int_a^b x^2 dg(x)$, де $g(x)$ – функції з прикладу 8 на відрізках $[a, b]$, що відповідають умові цього прикладу.

13. Подати функціонал $F(f)$ інтегралом Стільтєса $(S)\int_{-1}^1 f(x) d(g(x))$ й обчислити повну варіацію $V_{-1}^1(g)$ функції $g(x)$ на відрізку $[-1; 1]$, якщо

$$F(f) = \pi \int_{-1}^1 (x-1) \cdot f(x) dx + 2f(0) - \frac{1}{2}f(-1) - f(1).$$