ДЕРЖАВНИЙ ВИЩИЙ НАВЧАЛЬНИЙ ЗАКЛАД
«ЗАПОРІЗЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ»
МІНІСТЕРСТВА ОСВІТИ І НАУКИ, МОЛОДІ ТА СПОРТУ УКРАЇНИ

Н.М. Д’яченко, І.Г. Ткаченко

РЯДИ В СКІНЧЕННОВИМІРНИХ БАНАХОВИХ ПРОСТОРАХ

Навчальний посібник
для студентів напряму підготовки «Математика»
спеціалізації «Математичний аналіз»

Затверджено
вченою радою ЗНУ
Протокол №__ від _______ 2013 р.

Запоріжжя
2013

УДК 517.982.22(075.8)
ББК В517я 73

Д 999 Д’яченко Н.М., Ткаченко І.Г. Ряди в скінченновимірних банахових просторах: навчальний посібник для студентів напряму підготовки «Математика» спеціалізації «Математичний аналіз».– Запоріжжя: ЗНУ, 2013. – 76 с.

Теоретико-практичну частину посібника укладено відповідно до галузевих стандартів, навчальної та робочої програм дисципліни «Ряди в скінченновимірних банахових просторах». Посібник містить приклади і задачі, що дозволяють студентам наочніше відчути об’єкти, що вивчаються, а також повторити матеріал курсу математичного і функціонального аналізу. Друга частина посібника містить варіанти індивідуальних типових завдань із прикладом виконання такого завдання.

Посібник призначений для студентів напряму підготовки «Математика» спеціалізації «Математичний аналіз». Однак його можуть використовувати студенти факультетів інших напрямів підготовки, що вивчають курс вищої математики і математичного аналізу для розширення кругозору з математики. З цією метою вступна частина містить всі необхідні відомості з математичного і функціонального аналізу.

Рецензент П.Г. Стєганцева

Відповідальний за випуск Н.М. Д’яченко

ЗМІСТ

ВСТУП

Значення рядів у математиці складно переоцінити внаслідок їх широкого застосування. Ряди різної природи – числові, функціональні, векторні – використовуються при розв’язанні великої кількості прикладних задач. Ряди дозволяють знаходити як точні аналітичні розв’язки задач, так і наближені, якщо замінити ряд його частковою сумою.

Дуже важливою є відповідь на питання про збіжність ряду. Це питання пов’язане з коректністю отриманого за допомогою рядів розв’язку задачі, з доцільністю зроблених припущень, і, врешті решт, з ефективністю запропонованої математичної моделі задачі. При розв’язанні задач дуже часто доводиться переставляти члени ряду. А чи завжди це можна робити? Чи не зміниться при цьому сума ряду, і, якщо зміниться, то як? Відповіді на ці питання дає теорія переставлень рядів у просторах Банаха.

Мета навчального курсу: поглибити знання з математичного та функціонального аналізу, алгебри та топології.

Завдання вивчення курсу:

- познайомити зі станом справ в одному з перспективних напрямків сучасної математики, пов'язаних з переставленнями рядів у банахових просторах;
- знайомство з основними означеннями, теоремами про числові ряди та ряди у скінченновимірних банахових просторах;
- продемонструвати відмінність і зв'язок між множинами сум рядів на числовій прямій і в скінченновимірному банаховому просторі, рядів в скінченновимірному і нескінченновимірному просторах;
- навчити використовувати здобуті знання для розв'язування задач про переставлення рядів у банахових просторах;
- навчити наводити приклади до означень та теорем;
- навчити застосовувати набуті теоретичні та практичні навички при розв’язанні задач функціонального аналізу, при розв’язанні прикладних задач, розв’язок яких представляється рядом у деякому банаховому просторі.

У результаті вивчення навчальної дисципліни студент повинен знати:

- основні означення та твердження математичного та функціонального аналізу, алгебри, які використовуються в даному курсі;
- основні означення та теореми про ряди та їх переставлення на числовій прямій, у скінченновимірному просторі;
- характерні приклади рядів у нескінченновимірному просторі;

вміти:

- застосовувати здобуті знання для розв'язування задач про переставлення рядів у банахових просторах;
- наводити приклади до означень та теорем, які демонструють застосування того чи іншого факту або поняття;
- досліджувати на абсолютну, безумовну та умовну збіжності ряди в

скінченновимірному банаховому просторі;
- знаходити області сум, області граничних точок, множину функціоналів збіжності та її аннулятор для рядів у скінченновимірному банаховому просторі.

Міждисциплінарні зв'язки. Даний курс є спеціальним розділом математичного і функціонального аналізу. Теоретичні знання і практичні навички, набуті при вивченні курсу, застосовуються в функціональному аналізі, при розв'язанні прикладних задач, розв'язок яких представляється рядом у деякому банаховому просторі. Навчальний матеріал вказаного курсу може використовуватися при виконанні курсових, дипломних та магістерських робіт.

Розділ 1. ТЕОРЕТИКО-ПРАКТИЧНА ЧАСТИНА

ТЕМА 1. Основні означення та твердження функціонального аналізу

☝ 🗀**Означення 1.1.** Нехай X – лінійний простір, P – числове поле. *Нормою* в X називають функцію $p: X \to \mathbb{R}$ із такими властивостями:

а) $p(x) \geq 0$ для всіх $x \in X$, причому $p(x) = 0$ тільки при $x = 0$;

б) $p(x + y) \leq p(x) + p(y)$ для всіх $x, y \in X$;

в) $p(\lambda x) = |\lambda| \, p(x)$, яке б не було число $\lambda \in P$ і елемент $x \in X$.

Лінійний простір X, у якому задана деяка норма, називають *нормованим простором*. Норму елементу $x \in X$ позначатимемо символом $\|x\|$ (тобто $p(x) = \|x\|$).

☝ 🗀**Означення 1.2.** Послідовність $\{x_n\}$ називають *збіжною,* якщо існує такий елемент $x \in X$, що $\lim\limits_{n} \|x_n - x\| = 0$.

☝ 🗀**Означення 1.3.** Послідовність $\{x_n\}$ називають *фундаментальною*, якщо для будь-якого $\varepsilon > 0$ існує такий номер $N \in \mathbb{N}$, що для всіх $n \geq N$ і $m \geq N$ виконано $\|x_n - x_m\| < \varepsilon$. Тобто

$$\{x_n\} - \textit{фундаментальна} \overset{def}{\Leftrightarrow} \forall \varepsilon > 0 \, \exists N \in \mathbb{N} \, \forall \left(n \geq N, m \geq N\right) \, \|x_n - x_m\| < \varepsilon .$$

☝ 🗀**Означення 1.4.** Нормований простір називають *банаховим*, якщо будь-яка фундаментальна послідовність в ньому збігається.

🗀**Означення 1.5.** Нехай X та Y – два нормовані простори. *Оператором* A, що діє із X в Y, називають відображення $y = Ax$, $x \in X$ $y \in Y$. Сукупність D_A усіх тих елементів $x \in X$, для яких відображення A є визначеним, називають *множиною визначення оператора* A.

Нехай множина визначення D_A оператора A є *многовидом*, тобто разом із будь-якою парою своїх елементів $x_1, x_2 \in D_A$ множина D_A містить і довільну їх лінійну комбінацію, тобто

$$\forall \alpha, \beta \in P \;\; \alpha x_1 + \beta x_2 \in D_A .$$

🗀**Означення 1.6.** Оператор A називають *лінійним*, якщо він задовольняє умову

$$A(\alpha x_1 + \beta x_2) = \alpha A x_1 + \beta A x_2$$

для всіх α, β із числового поля P і всіх $x_1, x_2 \in D_A$.

🗀**Означення 1.7.** Оператор $A: X \to Y$ називають *неперервним*, якщо

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x_1, x_2 \in D_A \; \|x_1 - x_2\|_X < \delta \Rightarrow \|Ax_1 - Ax_2\|_Y < \varepsilon .$$

🗀**Означення 1.8.** Оператор, що діє із X в $Y = P$, називають *функціоналом*.

Функціонал є частинним випадком оператора.

🗀**Означення 1.9.** Лінійний оператор $A: X \to Y$ називають *обмеженим*, якщо

$$\exists C > 0 : \forall x \in X \;\; \|Ax\|_Y \leq C \cdot \|x\|_X .$$

Теорема 1.1. Неперервність лінійного оператора еквівалентна його обмеженості [**2**, с. 255].

🗀**Означення 1.10.** *Нормою лінійного обмеженого оператора* називають число, яке позначають $\|A\|$, і яке дорівнює

$$\|A\| = \inf\left\{ C > 0 :\ \|Ax\|_Y \le C \cdot \|x\|_X \quad \forall x \in X \right\}.$$

Теорема 1.2. Норму оператора можна визначати інакше [**2**, с. 257]:

$$\|A\| = \sup_{x \ne 0} \frac{\|Ax\|}{\|x\|} = \sup_{\|x\| \le 1} \|Ax\|.$$

Простір лінійних неперервних операторів, що діють із X в Y, з уведеними в ньому сумою операторів $(A+B)x \overset{def}{=} Ax + Bx$ і множенням оператора на скаляр $(\lambda \cdot A)x \overset{def}{=} \lambda \cdot Ax$ $(\lambda \in P)$, позначається $\mathcal{L}(X,Y)$. Простір лінійних неперервних функціоналів, визначених на X, називають *спряженим простором до* X і позначають X^*. Іншими словами $X^* = \mathcal{L}(X,P)$.

🗀**Означення 1.11.** Множину M називають *лінійною*, якщо воно разом з будь-якими двома своїми різними елементами x і y містить і пряму, що їх сполучає, тобто множину елементів вигляду $\alpha x + (1-\alpha)y$, де $\alpha \in \mathbb{R}$.

🗀**Означення 1.12.** Множину M називають *замкненою* в нормованому просторі X, якщо будь-яка її гранична точка належить даній множині.

Відомим є твердження [**2**, с. 70]: множина M є замкненою в нормованому просторі X тоді й лише тоді, коли для будь-якої послідовності $\{x_n\} \subset M$, що збігається в X до елементу x_0, виконується включення: $x_0 \in M$.

🗀**Означення 1.13.** Множину $M \subset X$ називають *опуклою*, якщо разом з будь-якими двома своїми різними точками x та y вона містить і відрізок, що їх сполучає, тобто множину точок вигляду $\lambda x + (1-\lambda)y,\ 0 \le \lambda \le 1$.

🗀**Означення 1.14.** *Ядром* $J(M)$ довільної множини $M \subset X$ називають сукупність таких її точок x, що для кожного $y \in X$ знайдеться таке число $\varepsilon = \varepsilon(y) > 0$, що $x + ty \in A$ при $|t| < \varepsilon$. Опуклу множину, ядро якої непорожнє, називають *опуклим тілом*.

Теорема 1.3 *(теорема Хана-Банаха)* [**2**, с. 208]. Якщо X – дійсний (комплексний) нормований простір, f_0 – лінійний обмежений функціонал, визначений на підпросторі $L \subset X$, тоді існує функціонал f, визначений на всьому просторі X, який задовольняє умови:

$$1)\ f(x) = f_0(x), x \in L \qquad 2)\ \|f\|_{на\ X} = \|f_0\|_{на\ L}.$$

Наслідок 1.1 *з теореми Хана-Банаха в нормованому просторі (теореми про відокремлюваність)* [**2**, с. 209].

1) Нехай M_1 і M_2 – опуклі множини в нормованому просторі X, причому одна з них, скажімо M_1, є опуклим тілом і його ядро не перетинається з M_2. Тоді існує ненульовий неперервний лінійний функціонал, що відокремлює M_1 і M_2.

2) Нехай M – замкнена опукла множина в нормованому просторі X і $x_0 \in X$ – точка, що не належить M. Тоді існує лінійний неперервний функціонал, що відокремлює x_0 і M.

✍Практичні завдання до теми 1

Нормовані простори і послідовності в них

🗐**Задача 1.1.** З'ясувати, чи визначає функція $p(x)$ норму на просторі ℓ_2 (тут $x = (x_1, x_2,\dots, x_n,\dots)$):

$$а)\ p(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{|x_n|}{n};\quad б)\ p(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{|x_n+x_{n+1}|}{2^n};\quad в)\ p(x)=\sup_{n\geq 2}|x_n|;\quad г)\ p(x)=\sum_{n=1}^{\infty}|x_n|^2 .$$

🗐**Задача 1.2.** Дослідити послідовність $\{x_n\}$ на збіжність у просторах: а) $\mathbb{R}^m_\infty$, б) ℓ_2 , в) $C[0,1]$:

$$а)\ x_n=\left(\sqrt[n]{1},\sqrt[n]{2},\dots,\sqrt[n]{m}\right);\qquad x_n=\left(\frac{1}{n^2},\frac{1}{(n+1)^2},\dots,\frac{1}{(n+m)^2}\right);$$

$$б)\ x_n=\left(1,\frac{1}{\sqrt{2}},\dots,\frac{1}{\sqrt{n}},\dots\right);\qquad x_n=\left(\underbrace{1,0,\dots,0}_{\text{n}-1},\frac{1}{n},0,\dots\right);$$

$$в)\ x_n(t)=\operatorname{tg}\frac{t}{n};\qquad x_n(t)=\frac{nt}{1+n+t}.$$

Функціонали та оператори в нормованих просторах

🗐**Задача 1.3.** Перевірити лінійність, неперервність функціонала f: $X\to\mathbb{R}$ та знайти його норму:

$$а)\ X=\ell_2,\ x=(x_1,x_2,\dots),\ f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x_n}{n};\quad б)\ X=L_2[0;1],\quad f(x)=\int_0^1 e^t x(t)dt .$$

🗐**Задача 1.4.** Перевірити лінійність, неперервність оператора A: $X\to X$ та знайти його норму:

а) $X=\ell_2$, $x=(x_1, x_2, x_3, \dots)$, $Ax=(x_1, 0, x_3, 0, \dots)$;

б) $X=C[0,1]$, $(Ax)(t)=\int_0^1 \cos t\cdot\sin\tau\cdot x(\tau)d\tau$.

✍ Теоретичні питання до теми 1

1. Сформулювати означення нормованого простору.
2. Сформулювати означення збіжної послідовності в нормованому просторі.
3. Сформулювати означення фундаментальної послідовності в нормованому просторі.
4. Сформулювати означення банахового простору.
5. Сформулювати означення оператора, що переводить один нормований простір в інший.
6. Множина визначення оператора.
7. Сформулювати означення лінійного оператора.
8. Сформулювати означення неперервного оператора.
9. Сформулювати означення обмеженого оператора.
10. Теорема про зв'язок між неперервністю та обмеженістю лінійного оператора.
11. Сформулювати означення норми лінійного обмеженого оператора.
12. Формули для обчислення норми лінійного обмеженого оператора.
13. Поняття спряженого простору.
14. Сформулювати означення лінійної множини.
15. Сформулювати означення замкненої множини в нормованому просторі.
16. Сформулювати означення опуклої множини.
17. Сформулювати означення опуклого тіла.
18. Сформулювати теорему Хана-Банаха.
19. Сформулювати наслідки з теореми Хана-Банаха.

ТЕМА 2. Числові ряди

☝ 🗁**Означення 2.1.** Числовий ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n$ називають *збіжним*, якщо збігається числова послідовність його часткових сум $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} x_k$. Число $s = \lim\limits_{n} S_n$ називають сумою ряду (у випадку існування границі); позначення: $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n = s$.

☝ 🗁**Означення 2.2.** Числовий ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n$ називають *абсолютно збіжним*, якщо збігається ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |x_n|$.

☝ 🗁**Означення 2.3.** Числовий ряд називають *умовно збіжним*, якщо він збігається, але не абсолютно.

Теорема 2.1 [**5**, с. 11] (*необхідна умова збіжності ряду*). Якщо ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n$ збігається, тоді $\lim\limits_{n} x_n = 0$.

2.1. Ознаки збіжності знакопостійних рядів

☝ ***Загальна ознака порівняння***. Якщо члени двох рядів $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n$ ($x_n \ge 0\ \forall n \in \mathbb{N}$) і $\sum\limits_{n=1}^{\infty} y_n$ ($y_n \ge 0\ \forall n \in \mathbb{N}$) задовольняють співвідношення $x_n \le y_n\ \forall n \in \mathbb{N}$, то із збіжності другого ряду випливає збіжність першого , а з розбіжності першого – розбіжність другого. Тобто

$$\text{I.}\left.\begin{array}{l} x_n \le y_n\ \forall n\in\mathbb{N}, \\ \sum\limits_{n=1}^{\infty} y_n - \text{зб.}, \end{array}\right\} \Rightarrow \sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n - \text{зб.};\quad \text{II.}\left.\begin{array}{l} x_n \le y_n\ \forall n\in\mathbb{N}, \\ \sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n - \text{розб.}, \end{array}\right\} \Rightarrow \sum\limits_{n=1}^{\infty} y_n - \text{розб.}\quad \boxed{\begin{array}{c} x_n \le y_n\quad \forall n\in\mathbb{N} \\ \text{зб.} \Leftarrow \text{зб.} \\ \text{розб.} \Rightarrow \text{розб.} \end{array}}$$

☝ ***Ознака порівняння в граничній формі.*** Якщо члени рядів $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n$ і $\sum\limits_{n=1}^{\infty} y_n$ з додатними членами задовольняють співвідношення $\lim \dfrac{x_n}{y_n} = const \ne 0$, то обидва ряди збігаються або розбігаються одночасно.

☝ ***Ознака Д'Аламбера.*** Розглянемо ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n$ ($x_n > 0\ \forall n \in \mathbb{N}$).

$$\left.\begin{array}{l} \exists\ \lim\limits_{n} \dfrac{x_{n+1}}{x_n} = q\ \text{(скінченна} \\ \text{або нескінченна)} \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} \text{при } q < 1 \text{ ряд збігається,} \\ \text{при } q > 1 \text{ розбігається,} \\ \text{при } q = 1 \text{ про збіжність ряду нічого не} \\ \text{можна сказати (сумнівний випадок).} \end{array}$$

☝ ***Ознака Коші (радикальна):*** Розглянемо ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n$ ($x_n > 0\ \forall n \in \mathbb{N}$).

$$\left.\begin{array}{l}\exists\ \lim\limits_{n} \sqrt[n]{x_n} = q \text{ (скінченна} \\ \text{або нескінченна)}\end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l}\text{при } q<1 \text{ ряд збігається,} \\ \text{при } q>1 \text{ розбігається,} \\ \text{при } q=1 - \text{сумнівний випадок.}\end{array}$$

☝ ***Ознака Коші-Маклорена (інтегральна).*** Якщо для членів ряду $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n$ ($x_n \ge 0\ \forall n \in \mathbb{N}$) існує така функція $f(x)$, що

$$\left.\begin{array}{l}1)\ f(n) = x_n \text{ для всіх} \\ \text{натуральних } n \ge n_0, \\ 2)\ f(x) - \searrow \text{ (нестрого) на} \\ [n_0; +\infty),\end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l}\text{ряд } \sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n \text{ збігається або розбігається} \\ \text{одночасно з невласним інтегралом} \\ \int_{n_o}^{\infty} f(x)dx.\end{array}$$

☝ ***Наслідок із інтегральної ознаки Коші-Маклорена*** .

$$\text{Узагальнений гармонічний ряд } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p} \begin{array}{l} \nearrow \text{ збігається при } p > 1, \\ \searrow \text{ розбігається при } p \le 1. \end{array}$$

☝ ***Ознака Раабе*** **.**

$$\left.\begin{array}{l}\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n,\ x_n > 0\ \forall n \in \mathbb{N}, \\ \exists \lim\limits_{n} n\left(\dfrac{x_n}{x_{n+1}} - 1\right) = r,\end{array}\right\} \Rightarrow \begin{cases}1) r < 1 \Rightarrow \sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n - \text{розбігається,} \\ 2) r > 1 \Rightarrow \sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n - \text{збігається,} \\ 3) r = 1 \Rightarrow ???\ \text{(сумнівний випадок).}\end{cases}$$

☝ ***Ознака Гаусса.***

$$\left.\begin{array}{l}\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n,\quad x_n > 0\ \ \forall n \in \mathbb{N}, \\ q_n = \dfrac{x_n}{x_{n+1}} = \lambda + \dfrac{\mu}{n} + \dfrac{\theta_n}{n^2}\ ,\quad 0 < \theta_n < 1,\end{array}\right\} \Rightarrow \begin{cases}1)\, \lambda > 1\ \wedge\ (\lambda = 1 \wedge \mu > 1) \Rightarrow \sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n - \text{збігається,} \\ 2)\, \lambda < 1\ \wedge (\lambda = 1 \wedge \mu \le 1) \Rightarrow \sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n - \text{розбігається.}\end{cases}$$

2.2. Ознаки збіжності знакозмінних рядів

☝ ***Ознака Лейбніца.*** Розглянемо знакопочережний ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} c_n = c_1 - c_2 + c_3 - c_4 + \ldots + (-1)^{n+1} c_n + \ldots\ ,\quad c_n \ge 0\ \ \forall n \in \mathbb{N}.$$

$$\left.\begin{array}{l}1) \{c_n\} \searrow \text{(нестрого),} \\ 2) \lim\limits_{n} c_n = 0,\end{array}\right\} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} c_n - \text{збігається.}$$

☝ ***Ознака Діріхле.*** $$\left.\begin{array}{l} 1) A_n=\sum\limits_{k=1}^{n} a_k,\ \{A_n\}-\text{обмежена},\\ 2)\{b_n\}\searrow,\ 3)\ \lim\limits_{n} b_n=0, \end{array}\right\}\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n-\text{збіг.}$$

☝ ***Ознака Абеля.*** $$\left.\begin{array}{l} 1)\ \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n-\text{збігається},\\ 2)\ \{b_n\}-\text{монотонна},\ 3)\ \{b_n\}-\text{обм.}, \end{array}\right\}\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n-\text{збіг.}$$

Практичні завдання до підтем 2.1 і 2.2
Дослідження збіжності числових рядів

Задача 2.1. Дослідити на збіжність числові ряди за означенням. У випадку їх збіжності знайти суму ряду.

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{6}{9n^2+12n-5}$; б) $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\dfrac{24}{9n^2-12n-5}$; в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{6}{9n^2+6n-8}$;

г) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{9}{9n^2+21n-8}$; д) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{2}{4n^2+8n+3}$; е) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{14}{49n^2-28n-45}$.

Задача 2.2. Дослідити на збіжність числові ряди

а) $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\dfrac{n+1}{2^n\cdot(n-1)!}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(n!)^2}{2^{n^2}}$; в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{2^{n+1}\cdot(n^3+1)}{(n+1)!}$;

г) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{2n+2}{3n+1}\right)^n\cdot(n+1)^3$; д) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{2n+1}{3n-2}\right)^{n^2}$; е) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}n^4\cdot\left(\dfrac{2n}{3n+5}\right)^n$;

э) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{(2n+3)\cdot\ln^2(2n+1)}$; ж) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n\cdot\ln^2(2n+1)}$; з) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{(2n+1)\cdot\ln^2(2n+3)}$;

и) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\sqrt{n^3+2}}{n^2\cdot\sin^2 n}$; і) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\arcsin\dfrac{3+(-1)^n}{4}}{2^n+n}$; к) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{3+(-1)^n}{2^{n+2}}$;

л) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}n^4\cdot arctg^{2n}\left(\dfrac{\pi}{4n}\right)$; м) $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\sqrt[3]{n}\cdot\left(\dfrac{n-2}{2n+1}\right)^{3n}$; н) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}n!\cdot\sin\dfrac{\pi}{2^n}$;

о) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\cdot\dfrac{n+1}{\sqrt{n^3}}$; п) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-2)^{n-1}}{(n+1)\cdot 3^n}$; р) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\dfrac{2n+1}{n^2+n}$;

с) $\sum\limits_{n=3}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{n\cdot\ln(2n)}$; т) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\cos n}{3n+1}$; у) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\cdot\cos\dfrac{\pi}{6n}$;

ф) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\cos n}{n^2}$; х) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\cdot\dfrac{1}{\ln(n+1)}$; ц) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{\cos\dfrac{\pi}{3\sqrt{n}}\cdot\sqrt[3]{3n+\ln n}}$;

ч) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n\cdot\sin\dfrac{\pi}{2\sqrt{n}}}{\sqrt{3n+1}}$; ш) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\cdot\sin\dfrac{\pi}{2^n}$; щ) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\cdot\dfrac{n}{n+1}\cdot\dfrac{1}{\sqrt{n}}$.

✍ Теоретичні питання до підтем 2.1 і 2.2

1. Сформулювати означення збіжного числового ряду.
2. Сформулювати означення абсолютно збіжного числового ряду.
3. Сформулювати означення умовно збіжного числового ряду.
4. Сформулювати загальну ознаку порівняння в граничній формі.
5. Сформулювати ознаку порівняння.
6. Сформулювати ознаку Д’Аламбера.
7. Сформулювати радикальну ознаку Коші.
8. Сформулювати інтегральну ознаку Коші-Маклорена.
9. Сформулювати ознаку Раабе.
10. Сформулювати ознаку Гаусса.
11. Сформулювати ознаку Лейбніца.
12. Сформулювати ознаку Діріхле.
13. Сформулювати ознаку Абеля.

2.3. Переставлення числових рядів.

☝ 🗀**Означення 2.4.** *Переставленням* множини A називається взаємно однозначне відображення $\pi : A \to A$ множини A на себе.

☝ **Теорема 2.2.** Знакопостійний збіжний ряд при переставленні своїх членів не змінює суму.

*Доведення***.** Без обмеження загальності міркувань можна вважати, що $x_k \ge 0 \; \forall k \in \mathbb{N}$. Позначимо часткові суми даного ряду через $S_n = \sum_{k=1}^{n} x_k$, його суму – s, а часткові суми переставленого ряду – $S_n' = \sum_{k=1}^{n} x_{\pi(k)}$.

Оскільки $x_k \ge 0 \; \forall k \in \mathbb{N}$, то $S_1' \le S_2' \le \ldots \le S_n' \le s$. За теоремою Вейєрштрасса [**11**, Ч.1, с. 71] існує границя s' зростаючої обмеженої послідовності $\{S_n'\}$, причому $s' \le s$. З іншого боку, $s = \sum_{k=1}^{\infty} x_k = \sum_{k=1}^{\infty} x_{\pi^{-1}(\pi(k))}$, тому $s \le s'$. Отже, $s' \le s$ і $s \le s'$, звідки $s = s'$. ■

☝ **Теорема 2.3.** Абсолютно збіжний ряд при переставленні своїх членів не змінює суму.

Доведення. Введемо позначення для будь-якого числа a:

$$a^{+} = \begin{cases} a, \text{ якщо } a > 0 \\ 0, \text{ якщо } a \le 0 \end{cases}, \qquad a^{-} = a^{+} - a .$$

Розглянемо два ряди $\sum_{n=1}^{\infty} x_n^{+}$ і $\sum_{n=1}^{\infty} x_n^{-}$. Із оцінок $x_n^{+} \le |x_n|$ і $x_n^{-} \le |x_n|$ та загальної ознаки порівняння випливає їх збіжність, а також можливість подання

$$\sum_{n=1}^{\infty} x_n = \sum_{n=1}^{\infty} x_n^{+} - \sum_{n=1}^{\infty} x_n^{-} . \tag{2.1}$$

Із (2.1) випливає збіжність вихідного ряду. Позначимо суми рядів в записі (2.1) відповідно s, s^{+}, s^{-}, тоді $s = s^{+} - s^{-}$. За теоремою 2.1, при будь-якому переставленні $\pi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ виконується $s^{+} = \sum_{n=1}^{\infty} x_{\pi(n)}^{+}$ і $s^{-} = \sum_{n=1}^{\infty} x_{\pi(n)}^{-}$, звідки

$$\sum_{n=1}^{\infty}x_{\pi(n)}=\sum_{n=1}^{\infty}x^{+}_{\pi(n)}+\sum_{n=1}^{\infty}x^{-}_{\pi(n)}=s^{+}+s^{-}=s=\sum_{n=1}^{\infty}x_{n}\,.\ \blacksquare$$

☝ **Теорема 2.4** *(теорема Рімана).* Якщо числовий ряд $\sum_{n=1}^{\infty}x_n$ збігається умовно, тоді

1) $\forall s\in\mathbb{R}\ \ \exists\pi:\mathbb{N}\to\mathbb{N}:\ \sum_{n=1}^{\infty}x_{\pi(n)}=s$;

2) $\exists\sigma:\mathbb{N}\to\mathbb{N}:\ \sum_{n=1}^{\infty}x_{\sigma(n)}=\infty$.

*Доведення***.** Розглянемо множини

$$A=\{a_1,a_2,...,a_n,...:x_{a_n}\ge 0\},\qquad B=\{b_1,b_2,...,b_n,...:x_{b_n}<0\}$$

та частини даного ряду $\sum_{n=1}^{\infty}x_{a_n}$, $\sum_{n=1}^{\infty}x_{b_n}$, що їм відповідають. Якщо обидва ці ряди збігаються, то даний ряд збігається абсолютно. Якщо один із цих рядів збігається, а інший розбігається, то вихідний ряд є розбіжним. Отже, умовна збіжність вимагає одночасної розбіжності цих рядів, тобто

$$\sum_{n=1}^{\infty}x_{a_n}=\sum_{n=1}^{\infty}x_{b_n}=+\infty\,. \tag{2.2}$$

1) Розглянемо випадок, коли $s\ge 0$. Випадок $s<0$ можна розглянути аналогічно. Якщо $s\ge 0$, тоді переставлення π будуємо наступним чином:

$\pi(1)=a_1$,

$\pi(2)=a_2,\ldots$,

$\pi(j_1)=a_{j_1}$, причому $S_{j_1}=\sum_{k=1}^{j_1}x_{\pi(k)}>s$, а $S_{j_1-1}\le s$;

$\pi(j_1+1)=b_1$,

$\pi(j_1+2)=b_2,\ldots$,

$\pi(j_1+j_2)=b_{j_2}$, де $S_{j_1+j_2}<s$, а $S_{j_1+j_2-1}\ge s$;

$\pi(j_1+j_2+1)=a_{j_1+1},\ldots$,

$\pi(j_1+j_2+j_3)=a_{j_1+j_2}$, де $S_{j_1+j_2+j_3}>s$, а $S_{j_1+j_2+j_3-1}\le s$;

…………………………………

$\pi(j_1+...+j_{2k}+1)=a_{j_1+...+j_k+1},\ldots$,

$\pi(j_1+...+j_{2k+1})=a_{j_1+...+j_k+j_{k+1}}$, $S_{j_1+...+j_{2k+1}}>s$, а $S_{j_1+...+j_{2k+1}-1}\le s$;

$\pi(j_1+...+j_{2k+1}+1)=b_{j_1+...+j_k+1}$,

…………………………………

$\pi(j_1+...+j_{2k+2})=b_{j_1+...+j_{k+1}}$, де $S_{j_1+...+j_{2k+2}}<s$, $S_{j_1+...+j_{2k+2}-1}\ge s$;

…………………………………

Така побудова є можливою завдяки (2.2). Переставлений таким чином ряд буде збігатися до s. Дійсно, нехай номер m задовольняє нерівність $j_1 + j_2 + ... + j_k < m \le j_1 + j_2 + ... + j_{k+1}$, тоді

$$\left|S_m - s\right| \le \left|x_{\pi(j_1+...+j_{k+1})}\right|.$$

Унаслідок збіжності ряду, його загальний член прямує до нуля. Тому із останнього співвідношення отримаємо:

$$\lim_n S_n = s.$$

2) Шукане переставлення σ, при якому ряд розбігається, будуємо таким чином:

$\pi(1) = a_1$,

$\pi(2) = a_2, \ldots, \pi(j_1) = a_{j_1}$, причому $\quad S_{j_1} = \sum_{k=1}^{j_1} x_{\pi(k)} > 1 - x_{b_1}$;

$\pi(j_1 + 1) = b_1$, тоді $\quad S_{j_1+1} > 1$

$\pi(j_1 + 2) = a_{j_1+1}, \ldots,$

$\pi(j_1 + j_2) = a_{j_1+j_2-1}$, де $\quad S_{j_1+j_2} > 2 - x_{b_2}$:

$\pi(j_1 + j_2 + 1) = b_2$, тоді $\quad S_{j_1+j_2+1} > 2$:

……………………………..

$\pi(j_1 + ... + j_k + 2) = a_{j_1+...+j_k+1}, \ldots,$

$\pi(j_1 + ... + j_k + j_{k+1}) = a_{j_1+...+j_k+j_{k+1}-1}$, де $\quad S_{j_1+...+j_k+j_{k+1}} > k - x_{b_k}$

$\pi(j_1 + ... + j_k + j_{k+1} + 1) = b_k$, тоді $\quad S_{j_1+...+j_k+j_{k+1}+1} > k$

………………………………

Якщо $j_1 + j_2 + ... + j_k < m \le j_1 + j_2 + ... + j_{k+1}$, то $S_m > k$. Тому $\lim_n S_n = \infty$. Отже,

$$\sum_{n=1}^{\infty} x_{\sigma(n)} = \infty. \ \blacksquare$$

Практичні завдання до підтеми 2.3
Обчислення сум переставлень числових умовно збіжних рядів

Задача 2.3. Знаючи, що $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} = \ln 2$, знайти суми рядів, що утворюються із даного в результаті переставлення його членів:

а) $1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{3} - \frac{1}{6} - \frac{1}{8} + ...$;

б) ✍ $1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} - \frac{1}{4} + ...$

Розв'язання.

а) *Етап 1.* Доведемо спочатку, що ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} \qquad (2.3)$$

збігається до числа $\ln 2$.

Розглянемо формулу Маклорена для функції $f(x)=\ln(1+x)$

$$\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\ldots+(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}+r_n(x)$$

із залишковим членом у формі Лагранжа

$$r_n(x)=\frac{f^{(n+1)}\left(\Theta x\right)}{(n+1)!}\cdot x^{n+1}\ \ (0<\Theta<1).$$

Оскільки $\left(\ln x\right)^{(n)}=\frac{(-1)^{n+1}\cdot(n-1)!}{x^n}$ ($x>0$), то $f^{(n+1)}\left(\Theta x\right)=\frac{(-1)^n\cdot n!}{\left(1+\Theta x\right)^{n+1}}$. Отже,

$$r_n(x)=\frac{(-1)^n\cdot n!}{\left(1+\Theta x\right)^{n+1}}\cdot\frac{x^{n+1}}{(n+1)!},$$

$$\left|r_n(x)\right|=\frac{\left|x\right|^{n+1}}{\left|1+\Theta x\right|^{n+1}\cdot(n+1)}.$$

При $x=1$

$$\ln 2=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\ldots+\frac{(-1)^{n-1}}{n}+r_n(1),$$

$$\left|r_n(1)\right|=\frac{1}{\left(1+\Theta\right)^{n+1}\cdot(n+1)}\le\frac{1}{(n+1)}.$$

Звідси

$$\left|\left[1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\ldots+\frac{(-1)^{n-1}}{n}\right]-\ln 2\right|\le\frac{1}{n+1}.$$

Позначаючи через S_n n-у часткову суму ряду (2.3), ми можемо переписати останню нерівність у вигляді:

$$\left|S_n-\ln 2\right|\le\frac{1}{n+1}. \qquad (2.4)$$

Із (2.4) випливає, що $\left\{S_n-\ln 2\right\}$ є нескінченно малою послідовністю. Це і доводить збіжність ряду (2.3) до числа $\ln 2$.

Етап 2. Запишемо ряд (2.3) у вигляді

$$\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\ldots+\left(\frac{1}{2k-1}-\frac{1}{2k}\right)+\ldots\ .$$

m-і часткові суми такого перегрупованого ряду відповідають $2m$-им частковим сумам ряду (2.3) і

$$S_{2m}=\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\ldots+\left(\frac{1}{2m-1}-\frac{1}{2m}\right)=\sum_{k=1}^{m}\left(\frac{1}{2k-1}-\frac{1}{2k}\right).$$

Етап 3. Доведемо, що ряд

$$1-\frac{1}{2}-\frac{1}{4}+\frac{1}{3}-\frac{1}{6}-\frac{1}{8}+\ldots, \qquad (2.5)$$

отриманий в результаті переставлення членів ряду (2.3), збігається і має суму, вдвічі меншу, ніж ряд (2.3). Будемо позначати m-і часткові суми ряду (2.5) символом S'_m. Можемо записати:

$$S'_{3m}=\sum_{k=1}^{m}\left(\frac{1}{2k-1}-\frac{1}{4k-1}-\frac{1}{4k-1}\right)=\sum_{k=1}^{m}\left(\frac{1}{4k-2}-\frac{1}{4k}\right)=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{m}\left(\frac{1}{2k-1}-\frac{1}{2k}\right)=\frac{1}{2}S_{2m}.$$

Отже,

$$S'_{3m}=\frac{1}{2}S_{2m}. \tag{2.6}$$

Далі, очевидно, що

$$S'_{3m-1}=\frac{1}{2}S_{2m}+\frac{1}{4m}, \tag{2.7}$$

$$S'_{3m-2}=\frac{1}{2}S_{2m}+\frac{1}{4m-2}. \tag{2.8}$$

Знаючи, що

$$\lim_{m}S'_{3m}=\frac{1}{2}\lim_{m}S_{2m}=\frac{1}{2}\ln 2,$$

$$\lim_{m}S'_{3m-1}=\lim_{m}\left[\frac{1}{2}S_{2m}+\frac{1}{4m}\right]=\frac{1}{2}\ln 2,$$

$$\lim_{m}S'_{3m-2}=\lim_{m}\left[\frac{1}{2}S_{2m}+\frac{1}{4m-2}\right]=\frac{1}{2}\ln 2,$$

можна дійти висновку, що ряд (2.5) збігається і має суму, яка дорівнює $\frac{1}{2}\ln 2$. ■

✍**Задача 2.4.** Знаючи, що $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}=\ln 2$, довести наступне твердження: якщо члени ряду $1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\ldots$ переставити так, щоб групу p послідовних додатних членів змінювала група q послідовних від'ємних членів, тоді сума нового ряду буде дорівнювати $\ln 2+\frac{1}{2}\ln\frac{p}{q}$.

Задача 2.5. Члени збіжного ряду $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n}}$ переставити так, щоб він став розбіжним.

Розв'язання. Розглянемо, наприклад, ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty}a_n=1+\frac{1}{\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{5}}-\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{7}}+\frac{1}{\sqrt{9}}+\frac{1}{\sqrt{11}}-\frac{1}{\sqrt{4}}+\ldots+$$
$$+\frac{1}{\sqrt{6n-5}}+\frac{1}{\sqrt{6n-3}}+\frac{1}{\sqrt{6n-1}}-\frac{1}{\sqrt{2n}}+\ldots\,. \tag{2.9}$$

Очевидно, цей ряд отримано із даного ряду в результаті такого переставлення: за трьома додатними членами слідує один від'ємний.

Покажемо, що ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ розбігається. Для цього розглянемо перегрупований ряд

$$\left(1+\frac{1}{\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{5}}-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)+\left(\frac{1}{\sqrt{7}}+\frac{1}{\sqrt{9}}+\frac{1}{\sqrt{11}}-\frac{1}{\sqrt{4}}\right)+\ldots+$$

$$+\left(\frac{1}{\sqrt{6n-5}}+\frac{1}{\sqrt{6n-3}}+\frac{1}{\sqrt{6n-1}}-\frac{1}{\sqrt{2n}}\right)+\ldots=$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{6n-5}}+\frac{1}{\sqrt{6n-3}}+\frac{1}{\sqrt{6n-1}}-\frac{1}{\sqrt{2n}}\right)=\sum_{n=1}^{\infty} x_n .$$

У силу нерівності

$$\frac{1}{\sqrt{6n-3}}+\frac{1}{\sqrt{6n-1}}-\frac{1}{\sqrt{2n}}>\frac{2}{\sqrt{6n-1}}-\frac{1}{\sqrt{2n}}>0,$$

маємо оцінку загального члена ряду $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$:

$$x_n > \frac{1}{\sqrt{6n-5}}.$$

Оскільки ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{6n-5}}$ розбігається, то (за ознакою порівняння) розбігається ряд $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$.

Часткові суми рядів $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ і $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ позначимо відповідно A_n і X_n. Оскільки

$$X_m = A_{4m} \; \forall m \in \mathbb{N}, \; \lim_{m} X_m = \infty ,$$

то послідовність $\{A_n\}$ містить розбіжну підпослідовність, отже, є розбіжною. Отримане означає розбіжність ряду (2.9).

Аналогічно розв’язанню задачі 2.4 а) самостійно довести, що $\lim_{n} A_n = \infty$ ✍. ■

✍ Теоретичні питання до теми 2.3

1. Сформулювати означення переставлення множини.
2. Теорема про переставлення знакопостійного ряду.
3. Теорема про переставлення абсолютно збіжного ряду.
4. Теорема про переставлення умовно збіжного ряду (теорема Рімана).

ТЕМА 3. Основні означення. Найпростіші властивості векторних рядів

☝ 🗀**Означення 3.1.** Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ у банаховому просторі X називають *збіжним*, якщо збігається послідовність його часткових сум $S_n = \sum_{k=1}^{n} x_k$ по нормі простору, тобто існує елемент $s \in X$ такий, що

$$\lim_{n\to\infty} \|S_n - s\| = 0.$$

Елемент s називають *сумою ряду* і позначають $s = \sum_{n=1}^{\infty} x_n$.

☝ **Теорема 3.1** *(критерій Коші збіжності ряду).* Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ у банаховому просторі X збігається тоді і тільки тоді, коли спрямованість відрізків ряду прямує до нуля, тобто

$$\lim_{\substack{n\to\infty \\ m\to\infty}} \left\| \sum_{k=n+1}^{m} x_k \right\| = 0. \qquad (3.1)$$

Доведення. Відмітимо спочатку, що

$$\sum_{k=n+1}^{m} x_k = S_m - S_n. \qquad (3.2)$$

Необхідність. Оскільки ряд збігається, то знайдеться елемент $s \in X$ такий, що

$$\lim_{n\to\infty} \|S_n - s\| = 0, \quad \lim_{m\to\infty} \|S_m - s\| = 0.$$

З останніх рівностей і (3.2) та нерівності

$$\|S_n - S_m\| \le \|S_n - s\| + \|S_n - s\|$$

отримаємо необхідне співвідношення (3.1).

Достатність. Якщо виконано (3.1), то з (3.2) випливає, що послідовність $\{S_n\}$ – фундаментальна, отже, через повноту простору, вона збігається. Останнє означає збіжність ряду. ■

Зауваження 3.1. Унаслідок критерію Коші, надалі будемо розглядати ряди лише в банахових просторах.

☝ **Задача 3.1.** Довести, що для лінійного неперервного оператора $A : X \to Y$, який переводить банаховий простір X у банаховий простір Y, і для збіжного в X ряду $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ має місце збіжність ряду $\sum_{n=1}^{\infty} A(x_n)$ у Y, а також є вірним співвідношення:

$$A\left(\sum_{n=1}^{\infty} x_n \right) = \sum_{n=1}^{\infty} A(x_n).$$

✍ Теоретичні питання до теми 3

1. Сформулювати означення збіжного ряду в банаховому просторі.
2. Сформулювати критерій Коші збіжності ряду в банаховому просторі.

ТЕМА 4. Попередні відомості про переставлення рядів елементів банахового простора

4.1. Зв’язок між абсолютною та безумовною збіжностями в банахових просторах

☝ 🗀**Означення 4.1.** Ряд $\sum_n x_n$ в банаховому просторі X називають *абсолютно збіжним*, якщо збігається ряд $\sum_n \|x_n\|$.

☝ 🗀**Означення 4.2.** Ряд називають *безумовно збіжним*, якщо він збігається при будь-якому переставленні своїх членів.

4.1.1. Зв’язок між абсолютною та безумовною збіжностями в загальному банаховому просторі, зокрема, нескінченновимірному

Теорема 4.1. Якщо ряд $\sum_n x_n$ у банаховому просторі X абсолютно збігається, то він безумовно збігається.

Доведення. Якщо ряд $\sum_n x_n$ у банаховому просторі абсолютно збігається, то за критерієм Коші збіжності числового ряду $\sum_{k=1}^{\infty} \|x_k\|$ маємо:

$$\lim_{n,m\to\infty} \sum_{k=m+1}^{n} \|x_k\| = 0 .$$

Звідси, з нерівності

$$\left\| \sum_{k=m=1}^{n} x_k \right\| \le \sum_{k=m=1}^{n} \|x_k\|,$$

критерію Коші збіжності ряду у банаховому просторі випливає збіжність даного ряду $\sum_n x_n$.

Таким чином,

☝ ***із абсолютної збіжності ряду випливає його звичайна збіжність.***

Розглянемо ряд $\sum_{k=1}^{\infty} x_{\pi(k)}$ при деякому переставленні π. Оскільки числовий знакододатний ряд $\sum_{k=1}^{\infty} \|x_k\|$ збігається, то він збігається при будь-якому своєму переставленні (*теорема 2.2*). Тобто при будь-якому фіксованому переставленні $\pi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ ряд $\sum_{k=1}^{\infty} \|x_{\pi(k)}\|$ збігається. Тому ряд $\sum_{k=1}^{\infty} x_{\pi(k)}$ абсолютно збігається. Отже, (за доведеним спочатку) ряд $\sum_{k=1}^{\infty} x_{\pi(k)}$ збігається. Через довільність переставлення, безумовну збіжність доведено. ■

Теорема 4.1 стверджує, що

☝ і***з абсолютної збіжності ряду випливає безумовна його збіжність.***

Зворотне *не завжди вірно*, що ілюструє приклад.

☝ Приклад у нескінченновимірному просторі ряду безумовно збіжного, але абсолютно розбіжного

Приклад 4.1. Розглянути в просторі ℓ_2 послідовність

$$x_k = \left(\underbrace{0,0,\ldots,0}_{k-1},\frac{1}{k},0,\ldots\right).$$

Довести, що ряд $\sum_{n} x_n$ в просторі ℓ_2 збігається безумовно, але абсолютно розбігається.

Розв'язання. Доведемо, що при будь-якому переставленні $\pi:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ ряд $\sum_{k=1}^{\infty} x_{\pi(k)}$ збігається до елементу

$$s=\left(1,\frac{1}{2},\ldots,\frac{1}{k},\frac{1}{k+1},\ldots\right)\in\ell_2.$$

Дійсно, позначимо через $S_n=\sum_{k=1}^{n} x_k$ часткову суму даного ряду, а через $S'_n=\sum_{k=1}^{n} x_{\pi(k)}$ – часткову суму його деякого переставлення. Для даного ряду

$$S_n=\left(1,\frac{1}{2},\ldots,\frac{1}{n},0,0\ldots\right),$$

тому

$$\|S_n-s\|==\left\|\left(\underbrace{0,0,\ldots,0}_{n},\frac{1}{n+1},\frac{1}{n+2},\ldots\right)\right\|_{\ell_2}=\sqrt{\left(\frac{1}{n+1}\right)^2+\left(\frac{1}{n+2}\right)^2+\ldots}=\sqrt{\sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{1}{k^2}}.$$

Вираз під знаком кореня прямує до нуля при $n\to\infty$ як залишок збіжності ряду. Тому даний ряд збігається до s.

Для переставленого ряду його часткова сума набуде вигляду

$$S'_n=\Bigg(1,\frac{1}{2},\ldots,\frac{1}{k_1},\underbrace{0,\ldots,0}_{k_2},\frac{1}{k_1+k_2+1},\ldots,\frac{1}{k_1+k_2+k_3},\underbrace{0,..,0}_{k_4},$$

$$\frac{1}{k_1+\ldots+k_4+1},\ldots,\frac{1}{k_1+\ldots+k_4+k_5},0,\ldots,\frac{1}{k_1+\ldots+k_{2j-1}},0,0,\ldots\Bigg),$$

де виписана послідовність має n ненульових елементів-координат, тобто

$$k_1+k_3+\ldots+k_{2j-1}=n.$$

Маємо:

$$\|S'_n-s\|=$$

$$=\Bigg(\left(\frac{1}{k_1+1}\right)^2+\left(\frac{1}{k_1+2}\right)^2+\ldots+\left(\frac{1}{k_1+k_2}\right)^2+\left(\frac{1}{k_1+k_2+k_3+1}\right)^2+\ldots+\left(\frac{1}{k_1+k_2+k_3+k_4}\right)^2+$$

$$+\left(\frac{1}{k_1+\ldots+k_{2j}}\right)^2+\left(\frac{1}{k_1+\ldots+k_{2j}+1}\right)^2+\ldots\Bigg)^{1/2}\le\sqrt{\sum_{m=k_1+1}^{\infty}\frac{1}{m^2}}\,.$$

Якщо зростає номер часткової суми n, то кількість перших ненульових її координат k_1 також не зменшується. Вираз під знаком кореня є залишком збіжного ряду, тому прямує до нуля при $k_1\to\infty$. Отже,

$$\lim_n\|S'_n-s\|=0.$$

Висновок: ряд збігається при будь-якому своєму переставленні, тобто збігається безумовно.

Що стосується абсолютної розбіжності ряду, то вона виходить із співвідношення $\sum_k\|x_k\|=\sum_k\frac{1}{k}$. ■

Вище наведений приклад ряду в нескінченновимірному просторі ℓ_2, який безумовно збігається, однак абсолютно розбігається. З теореми Дворецького-Рождерса [**1**] виходить, що

☝ ***в будь-якому нескінченновимірному просторі Банаха існує ряд, що безумовно збігається, але абсолютно розбігається.***

☝ 🗁**Означення 4.3**. Ряд називають *умовно збіжним*, якщо він збігається, але не безумовно.

Як бачимо, ☝ *означення умовної збіжності числового ряду і ряду в банаховому просторі відрізняються*. Це пов'язано з відмінністю абсолютної і безумовної збіжності цих рядів, про йшла мова вище.

4.1.2. Зв’язок між абсолютною та безумовною збіжностями в скінченновимірному банаховому просторі

Теорема 4.2. Якщо ряд $\sum_{n=1}^{\infty}x_n$ у скінченновимірному просторі X безумовно збігається, то він збігається абсолютно.

Доведення. Оскільки в m-вимірному банаховому просторі всі норми еквівалентні [**2**, с.166], то розглянемо норму, що визначається рівністю:

$$\|x\|=\sum_{i=1}^{m}|x_i|,$$

де $x=\sum_{i=1}^{m}x_ie_i$ ($\{x_i\}_{i=1}^{m}\subset\mathbb{R}$) – розклад елемента $x\in X$ за базисом $\{e_i\}_{i=1}^{m}$.

Розглянемо координатні функціонали

$$f_i(x)=x_i\;\;(i=\overline{1,m}).$$

Очевидно, що вони є лінійними та обмеженими (самостійно доведіть це ✍!). Будь-який елемент x в m-вимірному просторі X та його норму можна подати у вигляді $x=\sum_{i=1}^{m}f_i(x)e_i$ та $\|x\|=\sum_{i=1}^{m}|f_i(x)|$ відповідно.

Ряд $\sum_{n=1}^{\infty}x_n$ можна записати у вигляді:

$$\sum_{n=1}^{\infty} x_n = \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{i=1}^{m} f_i(x_n)e_i .$$

За умовою, даний ряд збігається безумовно. Це означає, що для будь-якого переставлення $\pi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_{\pi(n)}$ збігається. Із задачі 3.1 випливає, що ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_i\left(x_{\pi(n)}\right)$ збігається для будь-якого переставлення $\pi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, тому числовий ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_i\left(x_n\right)$ збігається абсолютно. Отже, збігається кожен з рядів $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left|f_i\left(x_n\right)\right|$ $(i = \overline{1,m})$. Звідки випливає можливість наступних перетворень:

$$\underbrace{\sum_{n=1}^{\infty}\|x_n\|}_{\text{зб.}} \underset{\Leftarrow}{=} \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{i=1}^{m}|f_i(x_n)|}_{\text{зб.}} \underset{\Leftarrow\ \forall i=\overline{1,m}}{=} \sum_{i=1}^{m} \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty}|f_i(x_n)|}_{\text{зб.}} \underset{\Leftrightarrow}{=} \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty}|f_1(x_n)|}_{\text{зб.}} \underset{\wedge}{+} \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty}|f_2(x_n)|}_{\text{зб.}} \underset{\wedge\ \dots\ \wedge}{+\ldots+} \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty}|f_m(x_n)|}_{\text{зб.}}$$

Отже, даний ряд збігається абсолютно. ■

4.2. Єдиність суми переставлень безумовно збіжного ряду

Теорема 4.3. Якщо ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} x_k$ у банаховому просторі X збігається безумовно, то всі його переставлення мають одну і ту ж суму.

Доведення. Припустимо супротивне, що ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} x_k$ має суму S, а деяке його переставлення $\sum\limits_{k=1}^{\infty} x_{\pi(k)}$ – суму S', причому $S \neq S'$. Згідно з теоремою Хана-Банаха існує функціонал $f \in X^*$, що відокремлює елемент S від елементу S', тобто $f(S) \neq f(S')$. Із задачі 3.1 випливає, що справедливість співвідношень:

$$\sum_{k=1}^{\infty} f(x_k) = f\left(\sum_{k=1}^{\infty} x_k\right) = f(S) \neq f(S') = f\left(\sum_{k=1}^{\infty} x_{\pi(k)}\right) = \sum_{k=1}^{\infty} f(x_{\pi(k)}) .$$

Звідки випливає, що числовий ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} f\left(x_k\right)$ не є абсолютно збіжним. Тоді за теоремою Рімана існує переставлення $\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, для якого ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} f\left(x_{\sigma(k)}\right)$ розбігається. З ланцюжка нерівностей

$$\left\|\sum_{k=m+1}^{n} f\left(x_{\sigma(k)}\right)\right\| = \left\|f\left(\sum_{k=m+1}^{n} x_{\sigma(k)}\right)\right\| \leq \|f\| \cdot \left\|\sum_{k=m+1}^{n} x_{\sigma(k)}\right\|$$

та критерію Коші збіжності рядів випливає, що ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} x_{\sigma(k)}$ розбігається. Останнє суперечить безумовній збіжності ряду, що і доводить потрібне. ■

4.3. Критерій безумовної збіжності ряду в банаховому просторі. Досконала збіжність

🗁**Означення 4.4.** Ряд $\sum_{i=1}^{\infty} x_i$ елементів простору Банаха називають *досконало збіжним*, якщо для будь-якого набору знаків $\{\alpha_i = \pm 1\}_{i=1}^{\infty}$ збігається ряд $\sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i x_i$.

Теорема 4.4 *(критерій безумовної збіжності ряду).* Ряд елементів банахового простору збігається безумовно *в тому і лише тому випадку*, якщо він збігається досконало.

Доведення.

Достатність. Нехай досконало збіжний ряд $\sum_{i=1}^{\infty} x_i$ не є безумовно збіжним. Останнє означає, що знайдеться розбіжне переставлення $\sum_{i=1}^{\infty} x_{\pi(i)}$ ряду $\sum_{i=1}^{\infty} x_i$. Тоді, згідно з критерієм Коші, знайдеться послідовність індексів $k_1 < l_1 < k_2 < l_2 < k_3 < \ldots$, для якої виконується нерівність

$$\left\| \sum_{i=k_j}^{l_j} x_{\pi(i)} \right\| \geq \delta > 0, \;\; j = 1,2,\ldots \;.$$

У даному ряді виділимо послідовність відрізків $\Delta_j = \{x_i\}_{m_j}^{n_j}$ $(j = 1,2,3,\ldots)$, кожен з яких містить відповідний відрізок $\Delta'_j = \left\{x_{\pi(i)}\right\}_{i=k_j}^{l_j}$ переставленого ряду. Переходячи, за необхідності, до підпослідовності, доб'ємося, щоб відрізки Δ_j попарно не перетиналися.

Уведемо позначення:

$$U_j = \sum_{x_i \in \Delta'_j} x_i \, , \quad V_j = \sum_{x_i \in \Delta_j \setminus \Delta'_j} x_i \quad (j = 1,2,3,\ldots) .$$

Оскільки

$$\delta \leq \left\| U_j \right\| = \frac{1}{2} \left\| 2U_j \right\| = \frac{1}{2} \left\| U_j + V_j + U_j - V_j \right\| \leq \frac{1}{2} \Big(\left\| U_j + V_j \right\| + \left\| U_j - V_j \right\| \Big),$$

то або

$$\left\| U_j + V_j \right\| \geq \delta \, , \tag{4.1}$$

або

$$\left\| U_j - V_j \right\| \geq \delta \, . \tag{4.2}$$

Необхідний набір знаків, при якому ряд розбігається, будується таким чином:

якщо $x_i \in \Delta_j \setminus \Delta'_j$, то $\alpha_i = +1$;

якщо $x_i \in \Delta'_j$, то

$\alpha_i = +1$ – у разі виконання нерівності (4.1),

$\alpha_i = -1$ – у разі виконання нерівності (4.2).

Для членів ряду, що не потрапили в жоден з відрізків Δ_j, коефіцієнт $\alpha_i = \pm 1$ вибираємо довільним чином.

При такому виборі коефіцієнтів виконуватимуться співвідношення

$$\left\| \sum_{m_j}^{n_j} \alpha_i x_i \right\| = \left\| U_j \pm V_j \right\| \geq \delta > 0 .$$

Отже, згідно з критерієм Коші, ряд $\sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i x_i$ буде розбігатися.

Таким чином, даний ряд не є досконало збіжним. Отримане протиріччя доводить достатність теореми.

Необхідність. Нехай тепер безумовно збіжний ряд $\sum_{i=1}^{\infty} x_i$ не є досконало збіжним. Останнє означає, що існує набір знаків $\{\alpha_i = \pm 1\}_{i=1}^{\infty}$, для якого ряд $\sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i x_i$ розбігається. Згідно з критерієм Коші, знайдеться послідовність індексів $m_1 < n_1 < m_2 < n_2 < \ldots$, для якої виконується нерівність

$$\left\| \sum_{m_j}^{n_j} \alpha_i x_i \right\| \geq \delta > 0 \quad (j = 1, 2, 3, \ldots) .$$

Розіб'ємо кожен відрізок $\Delta_j = \{x_i\}_{m_j}^{n_j}$ ряду $\sum_{i=1}^{\infty} x_i$ на дві підмножини: $\Delta_j = \Delta_j^+ \bigcup \Delta_j^-$, помістивши в множину Δ_j^+ ті x_i із Δ_j, для яких $\alpha_i = +1$, а в Δ_j^- – всі інші. Згідно з нерівністю трикутника

$$\delta \leq \left\| \sum_{m_j}^{n_j} \alpha_i x_i \right\| = \left\| \sum_{x_i \in \Delta_j} \alpha_i x_i \right\| \leq \left\| \sum_{x_i \in \Delta_j^+} x_i \right\| + \left\| \sum_{x_i \in \Delta_j^-} x_i \right\| \quad (j = 1, 2, \ldots)$$

виконана одна з двох нерівностей:

$$\left\| \sum_{x_i \in \Delta_j^+} x_i \right\| \geq \frac{\delta}{2} \qquad \text{або} \qquad \left\| \sum_{x_i \in \Delta_j^-} x_i \right\| \geq \frac{\delta}{2} . \tag{4.3}$$

Позначимо через Δ_j^* ту з множин Δ_j^+ або Δ_j^-, для якої виконано співвідношення (4.3), а через Δ° позначимо множину тих членів ряду $\sum_{i=1}^{\infty} x_i$, які не потрапили в жодну з множин Δ_j^*.

Шукане переставлення ряду $\sum\limits_{i=1}^{\infty} x_i$, що розходиться, будується таким чином: виписуємо підряд всі члени множини Δ_1^*, потім один член із Δ°, виписуємо підряд всі члени множини Δ_2^*, потім ще один член множини Δ° і так далі. Згідно з критерієм Коші розбіжність побудованого переставлення випливає з нерівностей (4.3).

Отже, даний ряд не є безумовно збіжним. Отримана суперечність доводить необхідність в теоремі.

Теорему доведена повністю. ■

Задача 4.1. Довести безумовну збіжність ряду з прикладу 4.1 за допомогою критерію безумовної збіжності.

Розв'язання. Нагадаємо, що членами ряду $\sum\limits_{i=1}^{\infty} x_i$ в просторі ℓ_2 є елементи вигляду

$$x_k = \left(\underbrace{0,0,...,0}_{k-1}, \frac{1}{k}, 0, ... \right).$$

Доведемо досконалу збіжність ряду $\sum\limits_{i=1}^{\infty} x_i$. Тобто покажемо, що для будь-якого набору знаків $\{\alpha_i = \pm 1\}_{i=1}^{\infty}$ ряд $\sum\limits_{i=1}^{\infty} \alpha_i x_i$ збігається.

Зафіксуємо набір знаків $\{\alpha_i = \pm 1\}_{i=1}^{\infty}$ і доведемо, що сумою ряду $\sum\limits_{i=1}^{\infty} \alpha_i x_i$ є

$$s'' = \left(\alpha_1, \frac{\alpha_2}{2}, ..., \frac{\alpha_k}{k}, \frac{\alpha_{k+1}}{k+1}, ... \right) \in \ell_2.$$

Часткова суму $S_n'' = \sum\limits_{k=1}^{n} \alpha_k x_k$ ряду $\sum\limits_{i=1}^{\infty} \alpha_i x_i$ має вигляд

$$S_n'' = \left(\alpha_1, \frac{\alpha_2}{2}, \ldots, \frac{\alpha_n}{n}, 0, 0... \right),$$

тому

$$\|S_n'' - s''\| = \left\| \left(\underbrace{0,0,...,0}_{n}, \frac{\alpha_{n+1}}{n+1}, \frac{\alpha_{n+2}}{n+2}, ... \right) \right\|_{\ell_2} = \sqrt{\left(\frac{\alpha_{n+1}}{n+1} \right)^2 + \left(\frac{\alpha_{n+2}}{n+2} \right)^2 + ...} =$$

$$= \sqrt{\left(\frac{1}{n+1} \right)^2 + \left(\frac{1}{n+2} \right)^2 + ...} = \sqrt{\sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{k^2}}.$$

Вираз під знаком кореня прямує до нуля при $n \to \infty$, як залишок збіжності ряду. Тому сумою ряду $\sum\limits_{i=1}^{\infty} \alpha_i x_i$ є елемент s'' простору ℓ_2.

Унаслідок довільності набору знаків $\{\alpha_i = \pm 1\}_{i=1}^{\infty}$ доходимо висновку про досконалу збіжність ряду $\sum_{i=1}^{\infty} x_i$. Отже, згідно з критерієм безумовної збіжності, ряд $\sum_{i=1}^{\infty} x_i$ збігається безумовно. ■

✍ Практичні завдання до теми 4
Дослідження збіжності векторних рядів

Задача 4.2. Дослідити ряди на збіжність, а у випадку їх збіжності встановити характер збіжності:

а) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{10^n \cdot 2 \cdot n!}{(2n)!}; \frac{\sin n}{n!}\right)$ у $\mathbb{R}_2^2$;   б) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2} \cdot \frac{1}{4^n}; (-1)^n \cdot \frac{2n-1}{3n+2}\right)$ у $\mathbb{R}_2^2$;

в) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n \cdot \ln^2(3n+1)}; \frac{(-1)^n}{(2n+1)\cdot 2^{2n+1}}\right)$ у $\mathbb{R}_2^2$; г) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{(-1)^n}{n \cdot \ln(n+1)}; (-1)^n \cdot \frac{\sin 3^n}{7^n}\right)$ у $\mathbb{R}_2^2$;

д) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{(-1)^n \cdot 2 \cdot n^2}{n^4 - n^2 + 1}; \frac{(-1)^n \cdot tg\frac{\pi}{4\sqrt{n}}}{\sqrt{5n-1}}; \frac{n \cdot 3^{n+2}}{5^n}\right)$ у $\mathbb{R}_2^3$;

е) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n \cdot \ln^2(3n+1)}; \frac{(n+1)^{n^2}}{n} \cdot \frac{1}{2^n}; \frac{(-1)^n \cdot \sin\frac{\pi}{2\sqrt{n}}}{\sqrt{3n+1}}\right)$ у $\mathbb{R}_2^3$;

є) $\sum_{k=1}^{\infty} x_k$: $x_{2n-1} = \left((-1)^n \frac{\ln^{100} n}{n+1}, \quad \frac{1}{3n^2+4}\right)$, $x_{2n} = \left(\frac{1}{n^3+n-1}, \quad (-1)^n \frac{\sin 1/\sqrt{n-1}}{\sqrt[3]{n+2}}\right)$ у $\mathbb{R}_2^2$;

ж) $\sum_{k=1}^{\infty} x_k$: $x_{2n-1} = \left(\frac{n!}{(3n)!}, \quad 0, \quad \frac{\cos\frac{n\pi}{3}}{2n+3}\right)$, $x_{2n} = \left(0, \quad (-1)^n \ln\left(1+\frac{1}{n}\right), \ \frac{n+1}{n^4+2n-5}\right)$ у $\mathbb{R}_2^3$.

✍ Теоретичні питання до теми 4

1. Сформулювати означення безумовно збіжного ряду в банаховому просторі.
2. Сформулювати означення абсолютно збіжного ряду в банаховому просторі.
3. Зв’язок між абсолютною та безумовною збіжностями в загальному банаховому просторі, зокрема, нескінченновимірному.
4. Приклад у нескінченновимірному просторі ряду безумовно збіжного, а абсолютно розбіжного.
5. Зв’язок між абсолютною та безумовною збіжностями в скінченновимірному банаховому просторі.
6. Сформулювати означення досконало збіжного ряду в банаховому просторі.
7. Критерій безумовної збіжності ряду в банаховому просторі.

ТЕМА 5. Область сум ряду в скінченновимірному просторі. Теорема Штейніца

5.1. Означення області сум ряду в банаховому просторі

🗀**Означення 5.1.** Розглянемо ряд $\sum_{k=1}^{\infty} x_k$ у банаховому просторі X. *Областю сум* цього ряду називають множину тих елементів $x \in X$, для яких існує переставлення $\pi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ таке, що $\sum_{\mathrm{i}=1}^{\infty} x_{\pi(\mathrm{i})} = x$ (позначення: $OC\left(\sum_{\mathrm{k}=1}^{\infty} x_k\right)$). А саме:

$$☝\; OC\left(\sum_{\mathrm{k}=1}^{\infty} x_k\right) \overset{def}{=} \left\{x \in X :\ \exists \pi : \mathbb{N} \to \mathbb{N} \text{: } \sum_{\mathrm{i}=1}^{\infty} x_{\pi(i)}\right\}.$$

☝ *Структура області сум* ***числових*** *рядів.*

1) Якщо числовий ряд $\sum_{k=1}^{\infty} x_k$ абсолютно збігається, то

$$OC\left(\sum_{\mathrm{k}=1}^{\infty} x_k\right) = \{S\}, \text{ де } S = \sum_{k=1}^{\infty} x_k .$$

2) Якщо числовий ряд $\sum_{k=1}^{\infty} x_k$ умовно збігається, то за теоремою Рімана

$$OC\left(\sum_{\mathrm{k}=1}^{\infty} x_k\right) = \mathbb{R}.$$

3) Якщо числовий ряд $\sum_{k=1}^{\infty} x_k$ розбігається при будь-якому своєму переставленні, то

$$OC\left(\sum_{\mathrm{k}=1}^{\infty} x_k\right) = \varnothing.$$

Загальний випадок. *Абсолютно збіжний ряд.*

Якщо X – довільний банаховий простір, то абсолютно збіжний ряд є безумовно збіжним (*теорема 4.1*). Із теореми про єдиність суми переставлень безумовно збіжного ряду (*теорема 4.3*) випливає, що $OC\left(\sum_{\mathrm{k}=1}^{\infty} x_k\right) = \{S\}$, де $S = \sum_{\mathrm{k}=1}^{\infty} x_k$.

Приклади області сум рядів, що умовно збігаються, в скінченновимірному просторі. Припустимо, що ряд $\sum_{\mathrm{k}=1}^{\infty} x_k$ умовно збігається в скінченновимірному просторі X. Як ми бачили, у разі, коли $\dim X = 1$, маємо $OC\left(\sum_{\mathrm{k}=1}^{\infty} x_k\right) = X$. У загальному випадку, коли $\dim X = n > 1$, область сум не співпадає зі всім простором X.

Приклад 5.1. Нехай $e \in X$ $(\dim X = n > 1)$, а $\sum\limits_{\mathrm{k}=1}^{\infty} \alpha_k$ – числовий ряд, що умовно збігається. Тоді ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \alpha_k e$ має область сум, що збігається з прямою, направляючим вектором якої є вектор e. Тобто

$$OC\left(\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k e\right) = \left\{\beta e, \beta \in \mathbb{R}\right\} \neq X .$$

Нижче буде доведено, що ☝ *у випадку, коли ряд* $\sum\limits_{\mathrm{k}=1}^{\infty} x_k$ *умовно збігається в скінченновимірному просторі, то його область сум є деяким зсуненим підпростором розмірності, не меншої за 1.*

Для $n = 2$ цей факт довів *П. Леві* в 1905 р.

Для довільного n цей результат отримано *С. Штейніцем* у 1916 р.

Приклад 5.2. Нехай Y – деякий підпростір розмірності m у n-вимірному просторі X, а $x_0 \in X$. Побудувати ряд, область сум якого збігається із зсуненим підпростором $x_0 + Y$.

Розв'язання. Виберемо деякий базис $\left\{e_i\right\}_{i=1}^{m}$ в Y. Ряд складемо з елементів множини

$$\left\{x_0\right\} \cup \left\{\ \alpha_k^i e_i,\ \ k \in \mathbb{N},\ i \in \left\{1,2,...,m\right\}\ \right\},$$

де для кожного $i \in \left\{1,2,...,m\right\}$ числовий ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \alpha_k^i$ умовно збігається. Цей ряд матиме область сум необхідного вигляду. ■

5.2. Лема про округлення коефіцієнтів

Для доведення теореми Штейніца нам знадобляться деякі допоміжні твердження, до доведення яких ми і перейдемо.

Лема 5.1 *(лема про округлення коефіцієнтів).* Якщо $\left\{x_i\right\}_{i=1}^{m}$ – скінченна множина елементів в n-вимірному просторі X, а $\left\{\lambda_i\right\}_{i=1}^{m} \subset \left[0,1\right]$ – множина коефіцієнтів, тоді існує множина, так званих, «округлених» коефіцієнтів $\left\{\theta_i = 0 \vee \theta_i = 1\right\}_{i=1}^{m}$, для яких

$$\max_{1\le k\le m} \left\| \sum_{i=1}^{k} \lambda_i x_i - \sum_{i=1}^{k} \theta_i x_i \right\| \le n \cdot \max_{1\le k\le m} \left\|x_i\right\| .$$

Доведення проводитиме індукцією за m.

Крок 0. При $m \le n$ твердження випливає із нерівностей

$$\max_{1\le k\le m} \left\| \sum_{i=1}^{m} (\lambda_i - \theta_i) x_i \right\| \le \max_{1\le i\le m} \left\|x_i\right\| \sum_{i=1}^{m} 1 \le n \cdot \max_{1\le i\le m} \left\|x_i\right\| .$$

Нехай тепер $m > n$.

Крок 1. Оскільки $\dim X = n$, то вектори $\left\{x_i\right\}_{i=1}^{n+1}$ лінійно залежні, тому існує набір коефіцієнтів $\left\{\ t_i^{(1)}\right\}_{i=1}^{n+1}$, для яких

$$\sum_{i=1}^{n+1} t_i^{(1)} x_i = 0 .$$

Останнє співвідношення помножимо на $(-\varepsilon)$ і додамо до обох частин отриманої рівності $\sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i x_i$, отримаємо:

$$\sum_{i=1}^{n+1} \left(\lambda_i - \varepsilon t_i^{(1)} \right) x_i = \sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i x_i .$$

Підберемо таке число $\varepsilon^{(1)}$, щоб $\lambda_i^{(1)} = \lambda_i - \varepsilon^{(1)} t_i \in [0,1]$, а одне з чисел набору $\left\{ \lambda_i^{(1)} \right\}_{i=1}^{n+1}$ з номером $k_1 \le n+1$ було б нулем або одиницею (тобто $\lambda_{k_1}^{(1)} \in \{0,1\}$). Перепозначимо $\lambda_{k_1}^{(1)} = \theta_{k_1}$.

Таким чином, *у результаті кроку 1* матимемо:

$$\exists \left\{ \lambda_i^{(1)} \right\}_{i=1}^{n+1} \subset [0,1] \ \wedge \exists k_1 \le n+1 \colon \ \lambda_{k_1}^{(1)} = \theta_{k_1} \in \{0,1\} ,$$

причому

$$\sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i x_i = \sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i^{(1)} x_i = \sum_{i=1, i \ne k_1}^{n+1} \lambda_i^{(1)} x_i + \theta_{k_1} x_{k_1} .$$

Крок 2. Виходячи з останнього співвідношення, одержимо:

$$\sum_{1}^{n+2} \lambda_i x_i = \sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i^{(1)} x_i + \lambda_{n+2} x_{n+2} .$$

Нехай $\lambda_{n+2}^{(1)} = \lambda_{n+2}$, тоді $\sum_{i=1}^{n+2} \lambda_i x_i = \sum_{i=1}^{n+2} \lambda_i^{(1)} x_i$.

Розглянемо множину $\{x_i\}_{i=1,\ i \ne k_1}^{n+2}$, яка містить $n+1$ елемент. Для неї знайдемо набір чисел $\left\{ t_i^{(2)} \right\}_{i=1,\ i \ne k_1}^{n+2}$ такий, що

$$\sum_{i=1, i \ne k_1}^{n+2} t_i^{(2)} x_i = 0 .$$

До обох частин останньої рівності, попередньо помножених на $(-\varepsilon)$, додамо вираз $\sum_{i=1,\ i \ne k_1}^{n+2} \lambda_i^{(1)} x_i$. У результаті отримаємо

$$\sum_{i=1,\ i \ne k_1}^{n+2} \left(\lambda_i^{(1)} - \varepsilon t^{(2)} \right) x_i = \sum_{i=1,\ i \ne k_1}^{n+2} \lambda_i^{(1)} x_i ;$$

$$\sum_{i=1}^{n+2} \lambda_i x_i = \sum_{i=1}^{n+2} \lambda_i^{(1)} x_i = \sum_{i=1,\ i \ne k_1}^{n+2} \lambda_i^{(1)} x_i + \theta_{k_1} x_{k_1} = \sum_{i=1, i \ne k_1}^{n+2} \left(\lambda_i^{(1)} - \varepsilon t_i^{(2)} \right) x_i + \theta_{k_1} x_{k_1} .$$

Підберемо число $\varepsilon^{(2)}$ таким, щоб $\left\{ \lambda_i^{(2)} = \lambda_i^{(1)} - \varepsilon^{(2)} t^{(2)} \right\}_{i=1, i \ne k_1}^{n+2} \subset [0,1]$ і існував номер $k_2 \le n+2$, для якого $\lambda_{k_2}^{(2)} \in \{0,1\}$.

Нехай $\theta_{k_2} = \lambda_{k_2}^{(2)}$, при цьому $\theta_{k_1} = \lambda_{k_1}^{(1)} = \lambda_{k_1}^{(2)}$, тоді

$$\sum_{i=1}^{n+2} \lambda_i x_i = \sum_{i=1}^{n+2} \lambda_i^{(2)} x_i = \sum_{i=1,\ i \ne k_1, k_2}^{n+2} \lambda_i^{(2)} x_i + \theta_{k_1} x_{k_1} + \theta_{k_2} x_{k_2} .$$

Після $m-n$ кроків буде побудовано множину номерів $k_1, k_2,...,k_{m-n}$, де $k_j \le j+n$ $(j=1,2,...,m-n)$ і коефіцієнтів θ_{k_1}, $\theta_{k_2},...,$ $\theta_{m-n} \in \{0,1\}$, $\left\{ \lambda_i^{(j)} \right\}_{i=1}^{j+n} \subset [0,1]$ таких, що

$$\sum_{i=1}^{n+j}\lambda_i^{(j)}x_i=\sum_{i=1}^{n+j}\lambda_i x_i\,,\ \lambda_{k_l}^{(j)}=\theta_{k_l} \text{ при } l\le j\ \ (j=1,2,...,m-n),$$

тобто

$$\sum_{i=1}^{n+j}\lambda_i x_i = \sum_{\substack{i=1,\\ i\ne k_l, l\le j}}^{n+j} \lambda_i^{(j)}x_i+\theta_{k_1}x_{k_1}+\theta_{k_2}x_{k_2}+...+\theta_{k_j}x_{k_j}\ \ (j=1,2,...,m-n).$$

Довизначимо значення $\theta_k\in\{0,1\}$ з номерами $k\notin\left\{k_j\right\}_{j=1}^{m-n}$ довільним чином. У результаті, для $j\le m-n$ матимемо:

$$\left\|\sum_{i=1}^{n+j}\theta_i x_i-\sum_{i=1}^{n+j}\lambda_i x_i\right\|=\left\|\sum_{i=1}^{n+j}\underbrace{\left(\theta_i-\lambda_i^{(j)}\right)x_i}_{\substack{n \text{ НЕнульових}\\ \text{доданкіх}}}\right\|\le n\cdot\max_{1\le i\le m}\left\|x_i\right\|.$$

З останньої нерівності випливає потрібне. ■

5.3. Лема про переставлення

Наступну лему приведемо без доведення.

Лема 5.2 *(С.А. Чобанян).* Для будь-якої скінченної множини $\left\{x_i\right\}_{i=1}^{m}$ елементів в довільному банаховому просторі X, для якої $\sum_{i=1}^{m}x_i=0$, існує переставлення $\pi:\{1,2,...,m\}\to\{1,2,...,m\}$ таке, що для кожного набору знаків $\left\{\nu_i=\pm1\right\}_{i=1}^{m}$ виконана нерівність

$$\max_{k\le n}\left\|\sum_{i=1}^{k}x_{\pi(\mathrm{i})}\right\|\le\max_{k\le n}\left\|\sum_{i=1}^{k}\nu_i x_{\pi(\mathrm{i})}\right\|.$$

Лема 5.3 *(лема про переставлення).* Нехай X – n-вимірний простір. Тоді для будь-якої скінченної множини $\left\{x_i\right\}_{i=1}^{m}$ елементів X існує переставлення $\omega:\{1,2,...,m\}\to\{1,2,...,m\}$ таке, що

$$\max_{k\le n}\left\|\sum_{i=1}^{k}x_{\omega(\mathrm{i})}\right\|\le 2n\cdot\max_{k\le n}\left\|x_k\right\|+\left(2n+1\right)\cdot\left\|\sum_{i=1}^{m}x_i\right\|.$$

Доведення. Нехай $x_0=-\sum_{i=1}^{m}x_i$. Скориставшись лемою С.А. Чобаняна, знайдемо переставлення $\pi:\{0,1,2,...,m\}\to\{0,1,2,...,m\}$, для якого виконана нерівність

$$\max_{0\le k\le n}\left\|\sum_{i=0}^{k}x_{\pi(\mathrm{i})}\right\|\le\max_{0\le k\le n}\left\|\sum_{i=0}^{k}\alpha_i x_{\pi(\mathrm{i})}\right\|. \tag{5.1}$$

Унаслідок леми про округлення коефіцієнтів для множин елементів скінченновимірного простору $\{x_i\}_{i=0}^{m}\subset X$ і коефіцієнтів $\left\{\lambda_i=\frac{1}{2}\right\}_{i=0}^{m}$ знайдеться множина «округлених» коефіцієнтів $\{\theta_i=0\vee\theta_i=1\}_{i=0}^{m}$ така, що

$$\max_{0\le k\le n}\left\|\frac{1}{2}\sum_{i=0}^{k}x_{\pi(i)}-\sum_{i=0}^{k}\theta_i x_{\pi(i)}\right\|\le n\cdot\max_{0\le k\le n}\|x_k\|$$

або, що те саме, для $\alpha_i=\operatorname{sgn}\left(\frac{1}{2}-\theta_i\right)$ $(i=0,1,2,...,m)$

$$\max_{0\le k\le n}\left\|\sum_{i=0}^{k}\alpha_i x_{\pi(i)}\right\|\le 2n\cdot\max_{0\le k\le n}\|x_k\|.$$

Після з'єднання останньої нерівності і (5.1) отримаємо

$$\max_{0\le k\le n}\left\|\sum_{i=0}^{k}x_{\pi(i)}\right\|\le 2n\cdot\max_{0\le k\le n}\|x_k\|. \qquad (5.2)$$

Відокремимо нульовий член, збільшивши праву частину нерівності і зменшивши ліву:

$$\max_{0\le k\le n}\|x_k\|\le\max_{1\le k\le n}\|x_k\|+\|x_{i_0}\|;$$

$$\max_{0\le k\le n}\left\|\sum_{i=0}^{k}x_{\pi(i)}\right\|\ge\left|\max_{0\le k\le n}\left\|\sum_{i=0,\ i\ne i_0}^{k}x_{\pi(i)}\right\|-\left\|x_{\pi(i_0)}\right\|\right|,$$

де $0=\pi(i_0)$. Побудуємо переставлення $\omega:\{1,2,...,m\}\to\{1,2,...,m\}$:

$\omega(1)=\pi(0)$, $\omega(2)=\pi(1),\dots$, $\omega(i_0)=\pi(i_0-1)$, $\omega(i_0+1)=\pi(i_0+1)$, $\omega(n)=\pi(n)$.

Остання нерівність набуде вигляду:

$$\max_{0\le k\le n}\left\|\sum_{i=0}^{k}x_{\pi(i)}\right\|\ge\left|\max_{1\le k\le n}\left\|\sum_{i=1}^{k}x_{\omega(i)}\right\|-\|x_0\|\right|. \qquad (5.3)$$

З нерівностей (5.1) – (5.3) отримаємо:

$$\left|\max_{1\le k\le n}\left\|\sum_{i=1}^{k}x_{\omega(i)}\right\|-\|x_0\|\right|\le 2n\cdot\left(\max_{1\le k\le n}\|x_k\|+\|x_0\|\right).$$

Після елементарних перетворень отримаємо нерівність, що доводиться. ■

5.4. Область граничних точок ряду в банаховому просторі

5.4.1. Означення та властивості області граничних точок. Розглянемо ще одну множину – область граничних точок (ОГТ) ряду. У багатьох задачах, особливо теоретичного характеру, простіше знайти для даного ряду структуру ОГТ, а потім вже переходити до вивчення структури області сум даного ряду.

🗁**Означення 5.2.** *Область граничних точок ряду* $\sum_{n=1}^{\infty}x_n$ в банаховому просторі X (позначення: $ОГТ\left(\sum_{n=1}^{\infty}x_n\right)$) – це множина всіх граничних точок множини часткових сум переставлень даного ряду. Іншими словами, це сукупність тих елементів $x \in X$, для яких існує переставлення $\pi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ таке, що підпослідовність часткових сум переставленого ряду збігається до x, тобто

$$\lim_{k \to \infty} \sum_{i=1}^{n_k} x_{\pi(i)} = x,$$

де $1 < n_1 < n_2 < \ldots < n_k < \ldots$. Інакше:

$$☝\ ОГТ\left(\sum_{n=1}^{\infty} x_n\right) \overset{def}{=} \left\{ x \in X :\ \exists \pi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}, \exists \{n_k\} :\ 1 < n_1 < n_2 < \ldots < n_k < \ldots\ \wedge\ \lim_{k \to \infty} \sum_{i=1}^{n_k} x_{\pi(i)} = x \right\}.$$

З означення випливає, що ОГТ містить в собі ОС, оскільки кожен елемент ОС є границею послідовності часткових сум переставленого ряду, а, тим більше, граничною точкою цієї послідовності. Зворотне включення не завжди вірно, що випливає з прикладу.

Приклад 5.3. Знайти ОГТ ряду $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} = 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \ldots$.

Розв'язання.

1) Підпослідовність часткових сум даного ряду $S_{2k} = 0$ збігається до 0.

Висновок 1: $0 \in ОГТ\left(\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1}\right)$.

2) Якщо $n \in \mathbb{N}$, то для переставлення даного ряду

$$\underbrace{1 + 1 + \ldots + 1}_{n} + 1 - 1 + 1 - 1 + \ldots$$

підпослідовність часткових сум $S_{n+2k} = n$ збігається до n.

Висновок 2: $n \in ОГТ\left(\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1}\right)$.

3) Якщо $(-m) \in \mathbb{N}$, то для переставлення даного ряду

$$\underbrace{-1 - 1 - \ldots - 1}_{(-m)} + 1 - 1 + 1 - 1 + \ldots$$

підпослідовність часткових сум $S_{-m+2k} = m$ збігається до m.

Висновок 3: $m \in ОГТ\left(\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1}\right)$.

Загальний висновок: $\mathbb{Z} \subseteq ОГТ\left(\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1}\right)$.

Оскільки будь-яка часткова сума довільного переставлення ряду є цілочисловою, то всі її граничні точки належать $\mathbb{Z}$. *Отже* $\mathbb{Z} \supseteq ОГТ\left(\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1}\right)$.

☝ *Відповідь:* $ОГТ\left(\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1}\right) = \mathbb{Z}$.

Ряд з розглянутого прикладу має порожню область сум і непорожню область граничних точок.

☝ **Лема 5.4** *(критерій належності ОГТ).* Для того, щоб елемент $x \in X$ належав ОГТ ряду $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ необхідно й достатньо, щоб для будь-якого додатного числа ε і будь-якої скінченної індексної множини (СІМ) U існує скінченна індексна множина V, ширша за U, для якої

$$\left\|\sum_{i\in V} x_i - x\right\| < \varepsilon .$$

Доведення.

Необхідність. Із належності елементу x області граничних точок ряду випливає існування переставлення $\pi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ і послідовності індексів $1 < m_1 < m_2 < \ldots < m_j < \ldots$ таких, що

$$\lim_{j\to\infty}\left\|\sum_{k=1}^{m_j} x_{\pi(k)} - x\right\| = 0 .$$

Це означає, що для кожного додатного ε існує такий індекс n_0, що для будь-якого індексу j, не меншого за n_0, виконано

$$\left\|\sum_{k=1}^{m_j} x_{\pi(k)} - x\right\| < \varepsilon .$$

Зафіксуємо ε і скінченну множину індексів U. Введемо індексні множини вигляду $D_j = \left\{ \pi(1), \pi(2), \ldots, \pi(m_j) \right\}$, $j \in \mathbb{N}$. Для них мають місце включення

$$D_1 \subset D_2 \subset \ldots \subset D_j \subset \ldots \text{ і } \bigcup_{j\in\mathbb{N}} D_j = \mathbb{N} .$$

Звідси випливає можливість знаходження такого номеру N, не меншого за n_0, для якого $D_N \supset U$. Тоді

$$\sum_{i\in D_N} x_i = \sum_{k=1}^{m_N} x_{\pi(k)} \quad \text{і} \quad \left\|\sum_{i\in D_N} x_i - x\right\| = \left\|\sum_{k=1}^{m_N} x_{\pi(k)} - x\right\| < \varepsilon .$$

Вибравши, нарешті, шукану скінченну множину індексів V, що збігається з множиною D_N, отримаємо:

$$V \supset U \text{ і } \left\|\sum_{i\in V} x_i - x\right\| < \varepsilon .$$

Достатність. Нехай

$$\forall \varepsilon > 0 ,\ \forall U - \text{СІМ} \ \ \exists V - \text{СІМ:} \ \ V \supset U \wedge \left\|\sum_{i\in V} x_i - x\right\| < \varepsilon . \qquad (5.4)$$

Нижче побудуємо підмножини натурального ряду $V_1 \subset V_2 \subset \ldots \subset V_j \subset \ldots$, для яких

$$\left\|\sum_{i\in V_j} x_i - x\right\| < \frac{1}{2^j} .$$

Уведемо множини $A_j = \{1, 2, \ldots, j\}$.

За СІМ U_1 візьмемо A_1, тобто $U_1 = A_1$. Тоді, внаслідок (5.4), для цієї СІМ U_1 знайдеться така СІМ $V_1 \supset U_1$, для якої справедливою є нерівність

$$\left\| \sum_{i\in V_1} x_i - x \right\| < \frac{1}{2}.$$

За множину U_2 візьмемо об'єднання множин A_2 та V_1, а саме: $U_2 = A_2 \bigcup V_1$. Тоді, внаслідок (5.4), існує СІМ $V_2 \supset U_2$ така, що

$$\left\| \sum_{i\in V_2} x_i - x \right\| < \frac{1}{2^2}.$$

Індуктивне припущення: нехай множину V_j вже побудовано і для неї виконується нерівність

$$\left\| \sum_{i\in V_j} x_i - x \right\| < \frac{1}{2^j}.$$

Унаслідок (5.4), для СІМ $U_{j+1} = A_{j+1} \bigcup V_j$ існує СІМ $V_{j+1} \supset U_{j+1}$, що задовольняє умову

$$\left\| \sum_{i\in V_{j+1}} x_i - x \right\| < \frac{1}{2^{j+1}}.$$

Таким чином, побудовано послідовність скінченних індексних множин

$$U_1 \subset V_1 \subset U_2 \subset V_2 \subset \ldots \subset U_j \subset V_j \subset \ldots .$$

Оскільки $U_j \supset A_j \;\; \forall j \in \mathbb{N}$, то $\bigcup\limits_{j\in\mathbb{N}} V_j = \mathbb{N}$.

Нехай n_j – кількість елементів множини V_j. Тоді (за побудовою) $1 < n_1 < n_2 < \ldots < n_j < \ldots$ Переставлення π утворюємо, виписуючи спочатку елементи ряду з номерами із множини V_1, потім із множин $V_2 \setminus V_1$, $V_3 \setminus V_2$, $V_4 \setminus V_3$, …, $V_{j+1} \setminus V_j$, … . Тоді

$$\left\| \sum_{i\in V_j} x_i - x \right\| = \left\| \sum_{i=1}^{n_j} x_{\pi(i)} - x \right\| < \frac{1}{2^j}.$$

Отже,

$$\lim_{j\to\infty} \sum_{i=1}^{n_j} x_{\pi(i)} = x.$$

Тим самим показано, що x є елементом ОГТ ряду $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n$. ■

Область граничних точок ряду в довільному банаховому просторі має *структурні властивості*, сформульовані в наступних двох твердженнях.

☝ **Твердження 5.1.** Для будь-якого ряду область граничних точок є замкненою множиною.

Доведення. Нехай $\{y_m\}_{m=1}^{\infty}$ – послідовність з області граничних точок ряду $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n$, яка збігається до елементу y. Покажемо, що $y \in ОГТ\left(\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n \right)$. Оскільки $y_m \to y$ при $m \to \infty$, то

$$\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists M \in \mathbb{N} : \forall m \ge M \;\; \left\| y_m - y \right\| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Згідно з лемою 5.4, з того, що $y_M \in ОГТ\left(\sum_{n=1}^{\infty} x_n\right)$ випливає наступне:

$$\forall\varepsilon>0,\ \forall U-\text{СІМ}\ \ \exists V-\text{СІМ}:\ \ V\supset U\ \wedge\ \left\|\sum_{i\in V}x_i-y_M\right\|<\frac{\varepsilon}{2}.$$

Тоді з нерівностей

$$\left\|\sum_{i\in V}x_i-y\right\|\le\left\|\sum_{i\in V}x_i-y_M\right\|+\left\|y_M-y\right\|<\varepsilon$$

і леми 5.4 отримаємо: $y\in ОГТ\left(\sum_{n=1}^{\infty}x_n\right)$. Тому з кожною своєю збіжною послідовністю, область граничних точок містить і її границю. Отже, область граничних точок є замкненою множиною. ■

☝ **Твердження 5.2**. Область граничних точок ряду має структуру зсуненої групи, тобто для всіх x, y, z з $ОГТ\left(\sum_{n=1}^{\infty}x_n\right)$ справедливо

$$(x-z)+(y-z)+z\in ОГТ\left(\sum_{n=1}^{\infty}x_n\right).$$

Доведення. Нехай $x, y, z\in ОГТ\left(\sum_{n=1}^{\infty}x_n\right)$. Зафіксуємо $\varepsilon>0$ і СІМ U. Маємо:

$$x\in ОГТ\left(\sum_{n=1}^{\infty}x_n\right)\Rightarrow\exists СІМ\ V_x\supset U:\ \left\|\sum_{i\in V_x}x_i-x\right\|<\frac{\varepsilon}{3};$$

$$z\in ОГТ\left(\sum_{n=1}^{\infty}x_n\right)\Rightarrow\exists СІМ\ V_z\supset V_x:\ \left\|\sum_{i\in V_z}x_i-z\right\|<\frac{\varepsilon}{3};$$

$$y\in ОГТ\left(\sum_{n=1}^{\infty}x_n\right)\Rightarrow\exists СІМ\ V_y\supset V_z:\ \left\|\sum_{i\in V_y}x_i-y\right\|<\frac{\varepsilon}{3}.$$

СІМ V утворюємо як об'єднання множин V_x і $V_y\setminus V_z$ (див. рис. 5.1), тобто $V=V_x\bigcup\left(V_y\setminus V_z\right)$. Очевидно, що множина U міститься в V і виконуються оцінки:

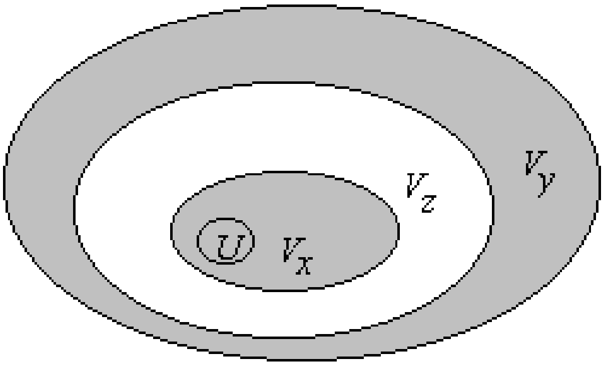


Рис. 5.1

$$\left\|\sum_{i\in V}x_i-(x+y-z)\right\|=$$

$$=\left\|\sum_{i\in V_x}x_i-x+\sum_{i\in V_y}x_i-y-\sum_{i\in V_z}x_i+z\right\|\le$$

$$\le\left\|\sum_{i\in V_x}x_i-x\right\|+\left\|\sum_{i\in V_y}x_i-y\right\|+\left\|\sum_{i\in V_z}x_i-z\right\|<\varepsilon.$$

Згідно з лемою 5.4, елемент $x+y-z$ належить області граничних точок ряду $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$. Тим самим доведено, що $ОГТ\left(\sum_{n=1}^{\infty} x_n\right)$ має структуру зсуненої групи. ■

✍ **Задача 5.1.** Довести, що непорожня замкнена множина, що має структуру зсуненої групи в просторі $\mathbb{R}^1$, може мати одну з наступних структур:

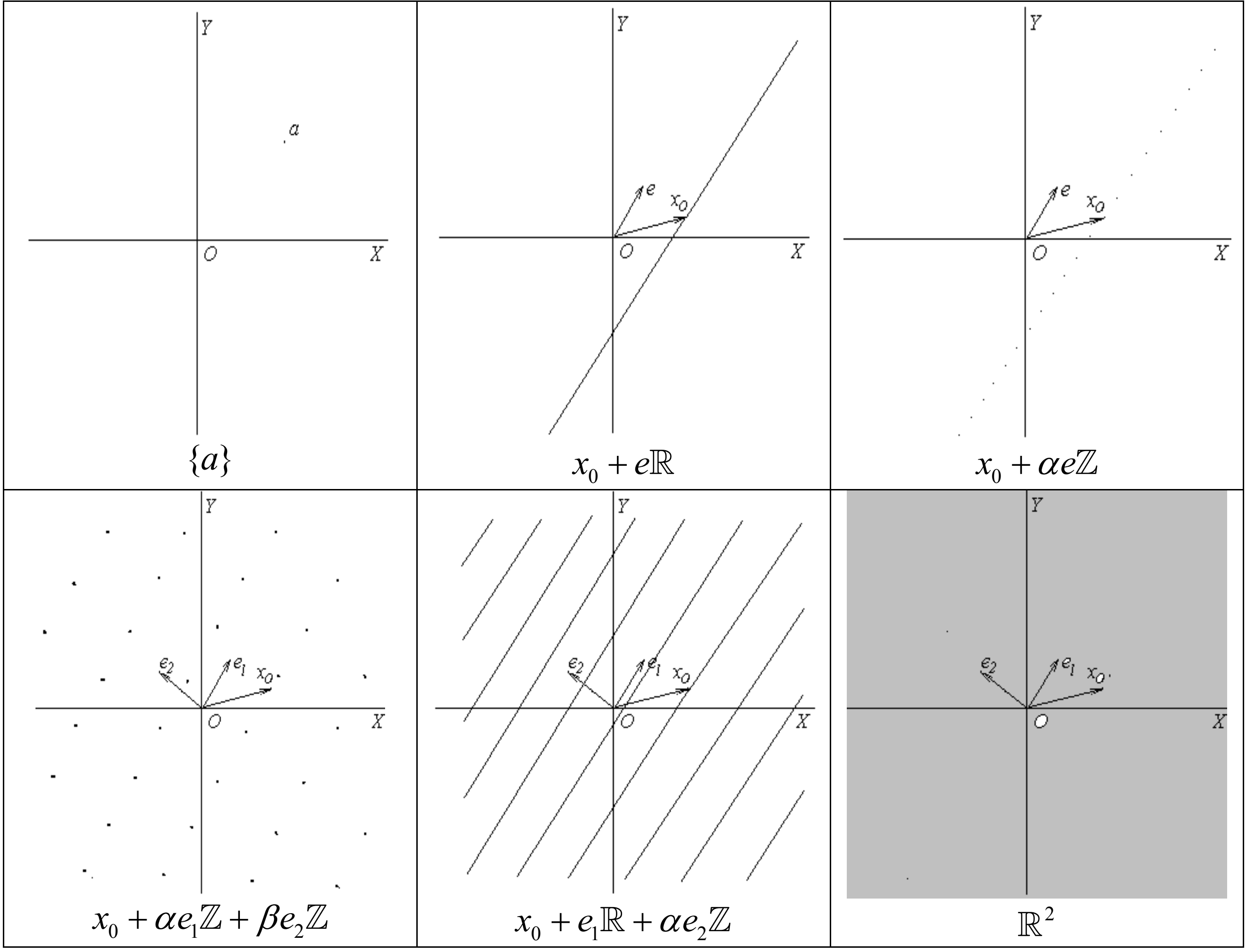
1) $\{a\}$;
2) $\mathbb{R}$;
3) $\alpha+\beta\mathbb{Z}$ (при деяких $\alpha,\beta\in\mathbb{Z}$).

Задача 5.2. Навести приклади числових рядів, що мають ОГТ, що збігається з множинами для кожного випадку, наведеного в задачі 5.1.

Зауваження 5.1. Відомо, що непорожня замкнена множина, що має структуру зсуненої групи в n-вимірному банаховому просторі X, може бути подана у вигляді $x_0+\sum_{i=1}^{m}\alpha_i e_i\mathbb{Z}+\sum_{i=m+1}^{k} e_i\mathbb{R}$, де $\{e_i\}_{i=1}^{k}$ ($k\le n$) – лінійно незалежні елементи з X.

Приклад 5.4. Зобразити на координатній площині всі можливі види непорожніх замкнених множин в просторі $\mathbb{R}_2^2$ зі структурою зсуненої групи.

Розв'язання. На рис. 5.2 зображені необхідні множини.



$\{a\}$ | $x_0+e\mathbb{R}$ | $x_0+\alpha e\mathbb{Z}$

$x_0+\alpha e_1\mathbb{Z}+\beta e_2\mathbb{Z}$ | $x_0+e_1\mathbb{R}+\alpha e_2\mathbb{Z}$ | $\mathbb{R}^2$

Рис. 5.2.

Задача 5.3. Навести приклади рядів $\mathbb{R}_2^2$, що мають ОГТ, яка збігається з множинами для кожного випадку, наведеного в прикладі 5.4.

5.4.2. Зв'язок між областю граничних точок і областю сум ряду із загальним членом, що прямує до нуля, в скінченновимірному просторі. Наступне твердження, що описує зв'язок між ОГТ і ОС ряду (при певному обмеженні на загальний член) дозволяє знаходити структуру ОС, знаючи вигляд ОГТ.

☝ **Твердження 5.3.** Нехай $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n$ – ряд в просторі X $(\dim X < \infty)$, причому $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$, тоді

$$ОГТ\left(\sum_{n=1}^{\infty} x_n\right) = ОС\left(\sum_{n=1}^{\infty} x_n\right).$$

Доведення. Знаючи, що

$$ОГТ\left(\sum_{n=1}^{\infty} x_n\right) \supseteq ОС\left(\sum_{n=1}^{\infty} x_n\right)$$

для будь-якого ряду, залишається показати лише зворотне, тобто справедливість включення

$$ОГТ\left(\sum_{n=1}^{\infty} x_n\right) \subseteq ОС\left(\sum_{n=1}^{\infty} x_n\right).$$

Нехай $x \in ОГТ\left(\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n\right)$. Тоді існує переставлення π і деяка послідовність індексів $1 < n_1 < n_2 < \ldots < n_k < \ldots$, для яких виконано $\lim\limits_{k} \sum\limits_{i=1}^{n_k} x_{\pi(i)} = x$. Доведемо, що $x \in ОС\left(\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n\right)$. Для цього покажемо, що існує таке переставлення ω, при якому

$$\lim_{m} \sum_{i=1}^{m} x_{\omega(i)} = x.$$

Застосуємо до кожної k-ої групи елементів ряду з номерами $\pi(n_k+1), \pi(n_k+2), \ldots, \pi(n_{k+1})$ лему про переставлення. А саме: побудуємо переставлення σ_k «блоку» множин індексів $\pi(n_k+1), \pi(n_k+2), \ldots, \pi(n_{k+1})$ в себе так, щоб для будь-якого $m \in \{n_k+1, n_k+2, ..., n_{k+1}\}$ виконувалося співвідношення

$$\left\| \sum_{i=n_k+1}^{m} x_{\sigma_k(\pi(i))} \right\| \le 2\dim X \max_{n_k+1 \le i \le n_{k+1}} \left\| x_{\pi(i)} \right\| + (2\dim X + 1) \left\| \sum_{i=n_k+1}^{n_{k+1}} x_{\sigma_k(\pi(i))} \right\|.$$

Переставлення $\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ утворюється як сума переставлень, що діють на множинах $\pi(n_k+1), \pi(n_k+2), \ldots, \pi(n_{k+1})$, залишаючи множину $\pi(1), \pi(2), \ldots, \pi(n_k)$ на місці. Нехай $\omega(i) = \sigma(\pi(i))$. Відмітивши, що сума всіх елементів «блоку» не змінюється при переставленні її членів, розглянемо

$$\left\|\sum_{i=1}^{m} x_{\omega(i)} - x\right\| = \left\|\sum_{i=1}^{n_k} x_{\omega(i)} + \sum_{i=n_k+1}^{m} x_{\omega(i)} - x\right\| \le \left\|\sum_{i=1}^{n_k} x_{\omega(i)} - x\right\| + \left\|\sum_{i=n_k+1}^{m} x_{\omega(i)}\right\| \le$$

$$\le \left\|\sum_{i=1}^{n_k} x_{\omega(i)} - x\right\| + 2\dim X \max_{n_k+1\le i\le n_{k+1}} \left\|x_{\pi(i)}\right\| + (2\dim X + 1)\left\|\sum_{i=n_k+1}^{n_{k+1}} x_{\sigma(\pi(i))}\right\| =$$

$$= \left\|\sum_{i=1}^{n_k} x_{\pi(i)} - x\right\| + 2\dim X \max_{n_k+1\le i\le n_{k+1}} \left\|x_{\pi(i)}\right\| + (2\dim X + 1)\left\|\sum_{i=n_k+1}^{n_{k+1}} x_{\pi(i)}\right\|. \qquad (5.5)$$

Скористаємося наступними фактами:
1) за умовою

$$\lim_k \left\|\sum_{i=1}^{n_k} x_{\pi(i)} - x\right\| = 0,$$

звідки

$$\lim_k \left\|\sum_{i=n_k+1}^{n_{k+1}} x_{\pi(i)}\right\| = 0;$$

2) $\lim\limits_{k\to\infty} x_{\pi(k)} = 0$, отже

$$\lim_k \max_{n_k+1\le i\le n_{k+1}} \left\|x_{\pi(i)}\right\| = 0.$$

Тому із співвідношення (5.5) можна зробити висновок про прямування до нуля норми $\left\|\sum\limits_{i=1}^{m} x_{\omega(i)} - x\right\|$ або, що те саме,

$$\lim_{m\to\infty} \sum_{i=1}^{m} x_{\omega(i)} = x.$$

Тому $x \in OC\left(\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n\right)$. Таким чином,

$$O\Gamma T\left(\sum_{n=1}^{\infty} x_n\right) \subseteq OC\left(\sum_{n=1}^{\infty} x_n\right).$$

Що і потрібно було довести. ■

5.5. Теорема Штейніца

Уведемо до розгляду множини

$$\Gamma = \left\{ f \in X^* : \sum_k \left| f\left(x_k\right)\right| - \text{зб.} \right\},$$

$$\Gamma_0 = \left\{ x \in X : f\left(x\right) = 0 \;\; \forall f \in \Gamma \right\} - \textit{аннулятор } \Gamma,$$

$$Q\left\{x_k\right\}_{k=1}^{\infty} = \left\{ \sum_{i=1}^{N} \lambda_i x_i : 0 \le \lambda_i \le 1, \;\; N = 1,2,... \right\},$$

$$P\left\{x_k\right\}_{k=1}^{\infty} = \left\{ x_{i_1} + x_{i_2} + ... + x_{i_P} : i_1 < i_2 < ... i_P ; p \in \mathbb{N} \right\}.$$

Задача 5.4. Довести, що множина $Q = \left\{x_k\right\}_{k=1}^{\infty}$ – опукла.

Задача 5.5. Знайти множину функціоналів збіжності і аннулятори наступних рядів $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$:

$$\text{а)}\ x_n = \left(\frac{1}{2^n};\quad \frac{(-1)^n}{n} \right) \text{ у } \mathbb{R}_2^2;\quad \text{б)}\, x_n = \left(\frac{1}{3^n};\quad \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}};\quad \frac{1}{3^n} \right) \text{ у } \mathbb{R}_2^3.$$

Задача 5.6. Побудувати на координатній площині множину:

$Q\{x_i\}_{i=1}^3$, де $x_1 = (0;1),\quad x_2 = (1;1),\quad x_1 = (1;0)$.

Лема 5.5 *(лема Штейніца)***.** Нехай X – банаховий простір, $\sum_{k=1}^{\infty} x_k$ – умовно збіжний ряд в X. Тоді якщо $x \in \overline{Q}$, то $x + \Gamma_0 \subset \overline{Q}$.

Доведення. Нехай $f \in X^* \setminus \Gamma$, тоді ряд $\sum_k f(x_k)$ збігається умовно, і тому $\sum_k f^+(x_k) = \sum_k f^-(x_k) = +\infty$. Звідси випливає, що

$$\sup\left\{ f(y) : y \in P\{x_k\}_{k=1}^{\infty} \right\} = +\infty.$$

Оскільки $Q\{x_k\}_{k=1}^{\infty} \supset P\{x_k\}_{k=1}^{\infty}$, то

$$\sup\left\{ f(y) : y \in Q\{x_k\}_{k=1}^{\infty} \right\} = +\infty. \tag{5.6}$$

Далі доведення проводитимемо від супротивного. Припустимо, що не виконується твердження леми: існують $x \in \overline{Q}$ і $z \in \Gamma_0$ такі, що $x + z \notin \overline{Q}$. Внаслідок теореми Хана-Банаха, можна знайти функціонал $f \in X^*$, який відокремлює опуклу замкнену множину $\overline{Q}$ від точки $x + z$, тобто

$$\sup\left\{ f(y) : y \in \overline{Q} \right\} < f(x + z). \tag{5.7}$$

а) Нехай $f \in \Gamma$. Оскільки $z \in \Gamma_0$, то $f(x + z) = f(x)$. Тоді нерівність (5.7) буде еквівалентною твердженню:

$$\forall y \in \overline{Q} \quad f(y) < f(x).$$

Оскільки $x \in \overline{Q}$, то останнє твердження є хибним.

б) У разі, коли $f \in X^* \setminus \Gamma$, виконано (5.6), але тоді нерівність (5.7) не можлива.

Отримані протиріччя доводять потрібне. ■

Наслідок 5.1. Нехай X – банаховий простір, $\sum_{k=1}^{\infty} x_k$ – ряд, що умовно збігається, в X. Тоді якщо $x \in \overline{Q}(x_i)_{i=1}^{\infty}$ то $x - \sum_{i=1}^{N} x_i + \Gamma_0 \subset \overline{Q}(x_i)_{i=N+1}^{\infty}$.

☝ **Теорема 5.1** *(теорема Штейніца).* Нехай ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} x_k$ умовно збігається в n-вимірному просторі X і $\sum\limits_{k=1}^{\infty} x_k = S$. Тоді $OC\left(\sum\limits_{k=1}^{\infty} x_k\right) = S + \Gamma_0$.

Доведення. Нехай $f \in \Gamma$ і $\underline{x \in OC\left(\sum\limits_{i} x_i\right)}$. Тоді існує переставлення $\pi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ таке, що $x = \sum\limits_{i=1}^{\infty} x_{\pi(i)}$. Отже, внаслідок задачі 3.1, через неперервність і лінійність функціонала маємо $f(x) = \sum\limits_{i=1}^{\infty} f\left(x_{\pi(i)}\right)$. А оскільки $f \in \Gamma$, то числовий ряд $\sum\limits_{i=1}^{\infty} f(x_i)$ збігається абсолютно, тому

$$\sum_{i} f\left(x_{\pi(i)}\right) = \sum_{i} f(x_i) = f(S).$$

Таким чином, $f(x) = f(S)$ для $f \in \Gamma$. Звідки $x - S \in \Gamma_0$, тобто $\underline{x \in S + \Gamma_0}$.

Висновок 1: $OC\left(\sum\limits_{i=1}^{\infty} x_i\right) \subseteq S + \Gamma_0$.

Доведемо включення в інший бік. Нехай $\underline{\underline{x \in S + \Gamma_0}}$. Оскільки $S \in OC\left(\sum\limits_{i} x_i\right)$, то $S \in \bar{Q}$. Тоді, згідно з лемою 5.5, виконується :

$$S - \sum_{i=1}^{N} x_i + \Gamma_0 \in \bar{Q}\{x_i\}_{i=N+1}^{\infty}.$$

Оскільки $x \in S + \Gamma_0$, то

$$x \in \sum_{i=1}^{N} x_i + \bar{Q}\{x_i\}_{i=N+1}^{\infty}.$$

Останнє співвідношення означає, що для будь-якого $\varepsilon > 0$ існує номер $n_0 > N$ і набір коефіцієнтів $\{x_i\}_{i=N+1}^{n_0}$ таких, що

$$\left\| x - \sum_{i=1}^{N} x_i - \sum_{i=N+1}^{n_0} \lambda_i x_i \right\| < \frac{\varepsilon}{2}. \qquad (5.8)$$

За лемою про округлення коефіцієнтів можна знайти «округлені» коефіцієнти, для яких

$$\left\| \sum_{i=N+1}^{n_0} \lambda_i x_i - \sum_{i=N+1}^{n_0} \theta_i x_i \right\| < n \cdot \max_{i>N} \|x_i\|. \qquad (5.9)$$

Вище номер N повинен бути обраний так, щоб, починаючи з нього, виконувалася нерівність

$$\|x_n\| < \frac{\varepsilon}{2n} \quad (\forall n \geq N). \tag{5.10}$$

З (5.8) – (5.10) випливає, що для індексної множини $U = \{1,2,...,N\}$ знайдено множину $V = \{1,2,...,N\} \bigcup \{i : \theta_i = 1,\ \mathrm{N} < \mathrm{i} \leq n_0\}$, що містить в собі U (тобто $U \subset V$), для якої

$$\left\| \sum_{i \in V} x_i - x \right\| = \left\| \sum_{i=1}^{N} x_i + \sum_{i=N+1}^{n_0} \theta_i x_i - x \right\| \leq \left\| \sum_{i=1}^{N} x_i - x + \sum_{i=N+1}^{n_0} \lambda_i x_i \right\| + \left\| \sum_{i=N+1}^{n_0} \theta_i x_i - \sum_{i=N+1}^{n_0} \lambda_i x_i \right\| <$$

$$< \frac{\varepsilon}{2} + n \cdot \max_{i>N} \|x_i\| < \frac{\varepsilon}{2} + n \cdot \frac{\varepsilon}{2n} = \varepsilon.$$

Таким чином, за критерієм належності ОГТ маємо: $x \in ОГТ\left(\sum_{i=1}^{\infty} x_i\right)$. Оскільки даний ряд збігається, то $\lim_{i \to \infty} x_i = 0$, тому (внаслідок твердження 5.3) має місце рівність $ОГТ\left(\sum_{i=1}^{\infty} x_i\right) = ОС\left(\sum_{i=1}^{\infty} x_i\right)$. Таким чином, $\underline{\underline{x \in ОС\left(\sum_{i=1}^{\infty} x_i\right)}}$.

Висновок 2: $S + \Gamma_0 \subseteq ОС\left(\sum_{i=1}^{\infty} x_i\right)$.

Сполучаючи два отримані включення, приходимо до необхідної множинної рівності. ■

5.6. Структурні властивості області сум ряду в скінченновимірному банаховому просторі

Теорема Штейніца стверджує, що область сум умовно збіжного ряду в скінченновимірному банаховому просторі є деяким зсуненим підпростором, а тому є множиною лінійною і замкненою. Виникає бажання розповсюдити цей результат на нескінченновимірний випадок. Розглянемо контрприклади, які показують, що без додаткових обмежень розповсюдити результати теореми Штейніца неможливо.

У прикладі Марцинкевича-Корнілова наводиться умовно збіжний ряд в нескінченновимірному банаховому просторі з нелінійною областю сум. У прикладі М.І. Островського – умовно збіжний ряд з незамкненою областю сум.

5.6.1. Приклад Марцинкевича-Корнілова. Основна частина твердження теореми Штейніца – це лінійність області сум умовно збіжного ряду в скінченновимірному просторі, тобто той факт, що область сум такого ряду разом з кожними двома своїми різними точками містить і пряму, що їх сполучає.

Наведемо приклад, який показує, що в нескінченновимірному гільбертовому просторі є ряди з нелінійною областю сум. Але перш, ніж приступити до викладу, розповімо історію питання.

Математики Львівської школи часто збиралися в Шотландському кафе, де обговорювали безліч математичних проблем. При цьому всі записи проводилися прямо на столі. Після того, як відвідувачі розходилися, офіціант старанно все витирав. Так, навіки зникали безцінні матеріали. Дружина Стефана Банаха вчасно усвідомила всю «трагічність» ситуації і придбала товстий зошит з картонною обкладинкою, яку віддала офіціантові. Туди математики і почали записувати все, що ними обговорюється. Якщо після обговорення деякої проблеми обґрунтоване її розв'язання не пропонувалося присутніми, то її фіксували в книзі, а її автор призначав за неї приз від чашки кави або кухля пива до гусака. Потім, в повоєнні роки, книга була перероблена і видана в США учнем С. Банаха – С. Уламом – під назвою «Шотландська книга».

Задача про наведення прикладу ряду в нескінченновимірному просторі з нелінійною ОС значиться в цій книзі під номером 106. Розв'язання цієї задачі було запропоноване, ймовірно, Юзефом Марцинкевічем, і записане в першоджерелі «Шотландської книги». Проте в ньому були знайдені помилки. Довгий час вважалося, що проблема 106 не розв'язана. Перше загальноприйняте розв'язання належить Є.М. Нікішину. Пізніше П.А. Корніловим було запропоноване дуже красиве розв'язання цієї задачі, після чого стало зрозуміло, що воно збігається з розв'язанням Ю. Марцинкевича, який просто заплутався в індексах. Ми розглянемо саме цей приклад, який, дотримуючись історичної хронології, називатимемо «прикладом Марцинкевича-Корнілова».

Приклад 5.5 *(приклад Марцинкевича-Корнілова)***.** Функцію, що набуває значення 1 на відрізку $[a,b]$ і 0 поза відрізком, позначатимемо $I(a,b)$. Наш ряд складатиметься з таких елементів:

$$x_{i,k} = I\left(\frac{k}{2^i} : \frac{k+1}{2^i}\right); \quad y_{i,k} = -x_{i,k},$$

де $0 \le i < \infty$, $0 \le k < 2^i$. Це послідовність елементів з простору $L_2[0,1]$.

Якщо суму записати в наступному порядку:

$$x_{0,0} + y_{0,0} + x_{1,0} + y_{1,0} + x_{1,1} + y_{1,1} + x_{2,0} + \ldots,$$

то ряд збігається до нуля. Якщо змінити порядок:

$$x_{0,0} + x_{1,0} + x_{1,1} + y_{0,0} + x_{2,0} + x_{2,1} + y_{1,0} + x_{2,2} + x_{2,3} + y_{1,1} + \ldots,$$

то ряд збігатиметься до тотожної одиниці. При цьому, до функції, рівної $\frac{1}{2}$ в усіх точках відрізка $[0,1]$, ряд не може збігатися при жодному переставленні, оскільки будь-яка часткова сума ряду – це функція, що набуває тільки цілочислових значень.

Задача 5.7. Знайти ОС ряду з прикладу Марцинкевича-Корнілова.

Задача 5.8. Чи є лінійною множина слабких границь часткових сум переставлень ряду з прикладу Марцинкевича-Корнілова?

5.6.2. Приклад Островського. Наступний приклад, що належить М.І. Островському, показує, що область сум умовно збіжного ряду в гільбертовому просторі може бути незамкненою множиною.

Приклад 5.6 *(приклад Островського).* Приклад будуватимемо в гільбертовому просторі $L_2[0,1]\times[0,1]$ – просторі класів еквівалентних функцій, сумовних за Лебеґом на квадраті $K=\left\{(x;y)\in\mathbb{R}^2:\ 0\le x\le 1,\ 0\le y\le 1\right\}$. Нехай $\sum\limits_{k=1}^{\infty} f_k(t)$ – ряд, побудований в прикладі Марцинкевича-Корнілова. Наш ряд виглядатиме таким чином:

$$\sum_{k=1}^{\infty} g_k(x,y)=f_1(x)+\sqrt{2}f_1(y)+f_2(x)+\sqrt{2}f_2(y)+\ldots\ .$$

Функції вигляду $u(x,y)=const$ належать області сум ряду в тому і лише в тому випадку, коли $u(x,y)=n+\sqrt{2}m$, де n, m – цілі числа.

Множина $M=\left\{n+\sqrt{2}m:n,m\in\mathbb{Z}\right\}$ незамкнена, оскільки $\frac{1}{2}$ є її граничною точкою, проте не належить цій множині. Дійсно, збіжність послідовності $n_k+\sqrt{2}m_k$ до $\frac{1}{2}$ рівносильна збіжності послідовності $\frac{1-2n_k}{2m_k}$ до $\sqrt{2}$. Наближення дійсного числа послідовностями скінченних десяткових дробів $\{x_k\}$ з надлишком і $\{y_k\}$ з нестачею (де $x_k-y_k<10^{-k}$) дозволяє вибрати при кожному k з двох дробів x_k або y_k такий дріб z_k, подання якого у вигляді звичайного дробу має непарний чисельник. Отриману послідовність z_k, що складається з елементів x_k або y_k, подамо в необхідному вигляді $\frac{1-2n_k}{2m_k}$ за правилом:

$$m_k=10^k/2,\ n_k=(1-z_k10^k)/2\,.$$

Таким чином, множина M незамкнена, отже, $\text{ОС}\left(\sum\limits_{k=1}^{\infty} g_k(x,y)\right)$ – незамкнена множина.

Практичні завдання до теми 5

Область сум ряду в скінченновимірному просторі

Задача 5.9. Знайти області сум рядів:

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{10^n\cdot 2\cdot n!}{(2n)!};\frac{\sin n}{n!}\right)$ у $\mathbb{R}_2^2$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2}\cdot\frac{1}{4^n};(-1)^n\cdot\frac{2n-1}{3n+2}\right)$ у $\mathbb{R}_2^2$;

в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n\cdot\ln^2(3n+1)};\frac{(-1)^n}{(2n+1)\cdot 2^{2n+1}}\right)$ у $\mathbb{R}_2^2$; г) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{(-1)^n}{n\cdot\ln(n+1)};(-1)^n\cdot\frac{\sin 3^n}{3^n}\right)$ у $\mathbb{R}_2^2$;

д) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n\cdot\ln^2(3n+1)};\frac{(n+1)^{n^2}}{n}\cdot\frac{1}{2^n};\frac{(-1)^n\cdot\sin\frac{\pi}{2\sqrt{n}}}{\sqrt{3n+1}}\right)$ у $\mathbb{R}_2^3$;

е) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{(-1)^n\cdot 2\cdot n^2}{n^4-n^2+1};\frac{(-1)^n\cdot tg\frac{\pi}{4\sqrt{n}}}{\sqrt{5n-1}};\frac{n\cdot 3^{n+2}}{5^n}\right)$ у $\mathbb{R}_2^3$.

Задача 5.10. Знайти області сум рядів:

а) у $\mathbb{R}_2^2$: $\sum\limits_{k=1}^{\infty}x_k$: $\begin{aligned} x_{2n-1} &= \left((-1)^n\frac{\ln^{100}n}{n+1}, \quad \frac{1}{3n^2+4}\right), \\ x_{2n} &= \left(\frac{1}{n^3+n-1}, \quad (-1)^n\frac{\sin 1/\sqrt{n-1}}{\sqrt[3]{n+2}}\right); \end{aligned}$

б) у $\mathbb{R}_2^3$: $\sum\limits_{k=1}^{\infty}x_k$: $\begin{aligned} x_{2n-1} &= \left(\frac{n!}{(3n)!}, \quad 0, \quad \frac{\cos\frac{n\pi}{3}}{2n+3}\right), \\ x_{2n} &= \left(0, \quad (-1)^n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right), \frac{n+1}{n^4+2n-5}\right); \end{aligned}$

в) у $\mathbb{R}_2^3$: $\sum\limits_{k=1}^{\infty}x_k$: $\begin{aligned} x_{3n-2} &= \left(\frac{n!}{n^2}, \frac{(-1)^n}{(2n^2+1)\ln(n+2)}, \frac{(-1)^n\cdot\sqrt[n]{0,5}}{n+3}\right), \\ x_{3n-1} &= \left(\frac{\ln n}{(2n)!}, \quad \frac{\cos n}{n^4+\cos^2 n}, \quad (-1)^n\frac{\operatorname{arctg} n}{n^n+3}\right), \\ x_{3n} &= \left(0, \quad (-1)^n\left(e^{1/n}-1\right), \quad \frac{\operatorname{arctg}(1/n)}{n+5}\right). \end{aligned}$

Область граничних точок ряду в скінченновимірному просторі

Задача 5.11. Знайти області граничних точок наступних рядів $\sum\limits_{n=1}^{\infty}x_n$ у $\mathbb{R}_2^2$. Зробити схематичний рисунок.

а) $x_n=\left(\frac{e^n\cdot 3\cdot n!}{(3n)!};2\cdot(-1)^n\right)$; б) $x_n=\left((-1)^n;\quad \frac{(-1)^n}{(n+1)\ln^3 n}\right)$;

в) $x_n=\left(\frac{1}{n^2};\quad \frac{(-1)^n}{n\ln n}\right)$; г) $x_n=\left(\frac{arctg\ n}{2^n};\quad \frac{(-1)^n}{arctg\ n}\right)$; д) $x_n=\left(\frac{\cos\pi n}{n\sqrt[n]{n}};\quad \frac{3(-1)^n}{n\sqrt[n]{n}}\right)$;

е) $\sum\limits_{k=1}^{\infty}x_k$: $\begin{aligned} x_{2n-1} &= \left(\frac{1}{n}\left[\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\right]^2;(-1)^n\right), \\ x_{2n} &= \left((-1)^n;\quad \frac{\ln n}{n^2}\right); \end{aligned}$ ж) $\sum\limits_{k=1}^{\infty}x_k$: $\begin{aligned} x_{2n-1} &= \left(\sin\frac{1}{n^2};\quad \frac{(-1)^n}{n}\sqrt[n]{3}\right), \\ x_{2n} &= \left(\frac{\sin\pi n/12}{2n+1};\quad \frac{2^n}{n!}\right); \end{aligned}$

з) $$\sum_{k=1}^{\infty} x_k : \quad \begin{aligned} x_{2n-1} &= \left(\frac{\cos n}{(7n-6)^2}; (-1)^n \operatorname{arctg} \frac{1}{\sqrt{n}} \right), \\ x_{2n} &= \left(\frac{\cos n}{\sqrt{3n+2}}; \quad \frac{(-1)^n}{n^n} \right). \end{aligned}$$

Задача 5.12. Знайти області граничних точок наступних рядів $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ у $\mathbb{R}_2^3$. Зробити схематичний рисунок:

а) $$x_n = \left(\frac{1}{(n+1) \cdot \ln^2 (7n+1)}; \left(\frac{n-1}{n} \right)^{n^2} \cdot 2^n; \frac{(-1)^n \cdot \sin \frac{\pi}{2n}}{\sqrt{3n+1}} \right);$$

б) $$x_n = \left(3 \cdot (-1)^{n+3}; \frac{2^n}{(2n-1)!!}; \frac{\sin n!}{\sqrt{3n^3+1}} \right);$$

в) $$\sum_{k=1}^{\infty} x_k : \quad \begin{aligned} x_{3n-2} &= \left(\frac{\ln n}{(n+6)^2}; \quad (-1)^n; \quad (-1)^n tg \frac{1}{\sqrt{n^5+1}} \right), \\ x_{3n-3} &= \left(\frac{\sin n}{\sqrt{2n+1}}; \quad \frac{(-1)^n}{\sqrt[n]{n} \cdot n!}; \quad \frac{(0,5)^n}{\ln n} \right), \\ x_{3n} &= \left(\frac{e^{1/n}-1}{\ln^2 n}; \quad sh \frac{1}{n^2+n+1}; \quad 2 \cdot (-1)^n \right). \end{aligned}$$

✍ Теоретичні питання до теми 5

1. Означення області сум ряду в банаховому просторі.
2. Структура області сум числових рядів.
3. Структура області сум абсолютно збіжного ряду в банаховому просторі.
4. Приклад ряду з областю сум, що є наперед заданим зсуненим підпростором.
5. Лема про округлення коефіцієнтів.
6. Лема про переставлення.
7. Означення області граничних точок ряду в банаховому просторі.
8. Область граничних точок числового ряду $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} = 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \dots$.
9. Критерій належності області граничних точок.
10. Довести замкненість ОГТ.
11. Довести, що ОГТ має структуру зсуненої групи.
12. Приклади замкнених множин в $\mathbb{R}^1, \mathbb{R}_2^2, \mathbb{R}_2^3$, що мають структуру зсуненої групи.
13. Теорема про зв'язок між областю граничних точок і областю сум ряду в скінченновимірному просторі із загальним членом, що прямує до нуля.
14. Лема Штейніца.
15. Теореми Штейніца.
16. Приклад Марцинкевича-Корнілова.
17. Приклад Островського.

Розділ ІІ. ІНДИВІДУАЛЬНЕ ЗАВДАННЯ

Формальні вимоги щодо виконання індивідуального завдання. Індивідуальне завдання оформлюється в зошиті обсягом 12-18 аркушів і здається не пізніше 14 тижня навчального семестру, протягом якого вивчається спеціальний курс. Розв’язки повинні містити усі необхідні обґрунтування з посиланням на відповідні формули, теореми та властивості. У разі не зарахування індивідуального завдання студент повинен його доопрацювати до 15 навчального тижня. Захист індивідуального завдання проводиться на 16 тижні. Студент, у якого індивідуальне завдання не зараховано, не допускається до заліку.

ІІ.1. Варіанти індивідуальних типових завдань

Тут N – номер варіанта.

1. Дослідити числові ряди на збіжність:

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n^{(1а)}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n^{(1б)}$.

2. Дослідити числові ряди на абсолютну та умовну збіжність:

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n^{(2а)}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n^{(2б)}$.

3. Розв’язати задачу 2.4.

4. Дослідити ряди в скінченновимірних просторах на абсолютну та умовну збіжності:

а) у $\mathbb{R}_2^2$ $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n = \left(\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n^{(4,1а)}; \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n^{(4,2а)} \right)$;

б) у $\mathbb{R}_2^3$ $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n = \left(\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n^{(4,1б)}; \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n^{(4,2б)}; \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n^{(4,3б)} \right)$.

5. Знайти множину функціоналів збіжності та їх аннулятори для наступних рядів $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n$:

$$x_n = \left(\frac{1}{N^n}; \quad \frac{(-1)^n}{n} \right) \text{ у } \mathbb{R}_2^2; \qquad x_n = \left(\frac{1}{(N+1)^n}; \quad \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}; \quad \frac{1}{(N+1)^n} \right) \text{ у } \mathbb{R}_2^3.$$

6. Знайти області сум рядів в скінченновимірних просторах; зробити схематичний рисунок:

а) у $\mathbb{R}_2^2$ $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n = \left(\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n^{(6а)}; \left(1 + N \cdot (-1)^{N+1}\right) \cdot \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n^{(6а)} \right)$;

б) у $\mathbb{R}_2^2$ $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n$: $\begin{array}{l} x_{2n-1} = \left(a_n^{(6,1б)}; \quad 0 \right); \\ x_{2n} = \left(0; \quad a_n^{(6,2б)} \right); \end{array}$.

$$\text{в) у } \mathbb{R}_2^3\ \sum_{n=1}^{\infty} x_n:\ \begin{aligned} x_{3n-2} &= \left(a_n^{(6,1\text{в})};\, a_n^{(6,2\text{в})};\, a_n^{(6,3\text{в})}\right); \\ x_{3n-1} &= \left(a_n^{(6,4\text{в})};\, a_n^{(6,5\text{в})};\, a_n^{(6,6\text{в})}\right); \\ x_{3n} &= \left(a_n^{(6,7\text{в})};\, a_n^{(6,8\text{в})};\, a_n^{(6,9\text{в})}\right). \end{aligned}$$

7. Знайти області граничних точок рядів в скінченновимірних просторах. Зробити схематичний рисунок отриманої множини:

$$\text{а) у } \mathbb{R}_2^2\ \sum_{n=1}^{\infty} x_n:\ \begin{aligned} x_{2n-1} &= \left(a_n^{(7,1a)}; a_n^{(7,2a)}\right); \\ x_{2n} &= \left(a_n^{(7,3a)}; (-1)^{n+N}\right); \end{aligned}.$$

$$\text{б) у } \mathbb{R}_2^3\ \sum_{n=1}^{\infty} x_n:\ \begin{aligned} x_{3n-2} &= \left(a_n^{(7,1\text{б})};\, a_n^{(7,2\text{б})};\, a_n^{(7,3\text{б})}\right); \\ x_{3n-1} &= \left(a_n^{(7,4\text{б})};\, a_n^{(7,5\text{б})};\, a_n^{(7,6\text{б})}\right); \\ x_{3n} &= \left(a_n^{(7,7\text{б})};\, a_n^{(7,8\text{б})};\, a_n^{(7,9\text{б})}\right). \end{aligned}$$

У табл. ІІ.1 наведено список рядів, що застосовуються в умовах завдань, а в табл.. ІІ.2 – номери рядів із табл. ІІ.1 відповідно до 13 варіантів.

Таблиця ІІ.1

1) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2}\cdot\frac{1}{4^n};$	**2)** $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n+2)!}{3n+5}\cdot\frac{1}{n^n};$	**3)** $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{n+1}{2^n\cdot(n-1)!};$
4) $\sum_{n=3}^{\infty}\frac{1}{(3n-5)\cdot\ln^2(4n-7)};$	**5)** $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3^n}\cdot\left(\frac{n}{n+1}\right)^{-n^2};$	**6)** $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2n+2}{3n+1}\right)^n\cdot(n+1)^3;$
7) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{10^n\cdot 2\cdot n!}{(2n)!};$	**8)** $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\cdot\ln^2(3n+1)};$	**9)** $\sum_{n=3}^{\infty}\frac{n}{(n^2-3)\cdot\ln^2 n};$
10) $\sum_{n=3}^{\infty}\frac{1}{n^2\cdot\ln n+\sqrt[3]{\ln^2 n}};$	**11)** $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2+3}{n^4\cdot\left(2+\sin\frac{\pi n}{2}\right)};$	**12)** $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n\cdot\ln n}{n^3-3};$
13) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n\cdot 3^{n+2}}{5^n};$	**14)** $\sum_{n=1}^{\infty}\sqrt{n}\cdot\left(\frac{n}{3n-1}\right)^{2n};$	**15)** $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+1}{2^n-n};$
16) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n\cdot\sqrt[4]{2n+3}};$	**17)** $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{(n+1)\cdot 2^{2n}};$	**18)** $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)\cdot 2^{2n+1}};$
19) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin n}{n!};$	**20)** $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\cdot\frac{\sin 3^n}{3^n};$	**21)** $\sum_{n=3}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(n+1)\cdot\ln n};$
22) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\cdot tg\frac{1}{n};$	**23)** $\sum_{n=3}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n\cdot\ln(n+1)};$	**24)** $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n\cdot 2\cdot n^2}{n^4-n^2+1};$

Продовження таблиці ІІ.1

25) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\left(-1\right)^{n}\cdot tg\frac{\pi}{4\sqrt{n}}}{\sqrt{5n-1}}$;	**26)** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(-1\right)^{n}\cdot\frac{2n-1}{3n^{2}+2}$;	**27)** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\left(-1\right)^{n}\cdot\sin\frac{\pi}{2\sqrt{n}}}{\sqrt{3n+1}}$;
28) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\cos\frac{\pi n}{3}}{n+4}$;	**29)** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\sin\frac{\pi n}{12}}{\sqrt{n+2}}$;	**30)** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\cos\frac{\pi n}{13}}{\sqrt{3n+5}}$;
31) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n}\frac{\sin\frac{1}{n}}{\sqrt[n]{n}}$;	**32)** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n}\frac{tg\frac{1}{n}}{\sqrt[2n]{2n}}$;	**33)** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n}\frac{\sin\frac{1}{\sqrt{n}}}{\sqrt{n+1}\cdot\sqrt[n]{n}}$;
34) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{\left(3n\right)!}$;	**35)** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{7^{2n}}{\left(2n-1\right)!}$;	**36)** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n^{n}}{\left(n!\right)^{2}}$;
37) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n+2}{3n-1}\right)^{n^{2}}$;	**38)** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n-1}{n}\right)^{n}\cdot\frac{n}{5^{n}}$;	**39)** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3n+2}{4n-1}\right)^{n}\cdot\left(n-1\right)^{2}$;
40) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\left(2n-1\right)\cdot\ln^{3}\left(2n\right)}$;	**41)** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\left(\sqrt{2}n+1\right)\cdot\ln^{2}\left(\sqrt{3}n+1\right)}$;	**42)** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\left(2n+1\right)\cdot\ln^{2}\left(\sqrt{5}n+1\right)}$
43) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{arctg\frac{1+\left(-1\right)^{n}}{2}n}{n^{3}+2}$;	**44)** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\cos^{2}\frac{\pi n}{2}}{n\cdot\left(n+1\right)\cdot\left(n+2\right)}$;	**45)** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\ln n}{\sqrt[3]{n^{7}}}$;
46) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n^{5}\cdot 3^{n}}{\left(2n+1\right)^{n}}$;	**47)** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n^{n+2}}{\left(2n^{2}+1\right)^{\frac{n}{2}}}$;	**48)** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}2^{n-1}\cdot e^{-n}$;
49) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(-1\right)^{n+1}\cdot\frac{n^{3}}{2^{n}}$;	**50)** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(-1\right)^{n+1}\cdot\frac{2n^{2}}{n!}$;	**51)** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\left(-1\right)^{n}}{n-\ln n}$;
52) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\cos n}{n!}$;	**53)** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(-1\right)^{n}\cdot\cos\frac{\pi}{2^{n}}$;	**54)** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(-1\right)^{n}\cdot\sin\frac{\pi}{6n}$;
55) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\left(-1\right)^{n}\cdot tg\frac{\pi}{3\sqrt{n}}}{\sqrt{4n+1}}$;	**56)** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\left(-1\right)^{n}\cdot\left(n+1\right)}{\ln\left(n+3\right)}$;	**57)** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\left(-1\right)^{n}}{n\cdot\ln\left(3n\right)}$;
58) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\left(-1\right)^{n}\cdot n}{\ln\left(n+2\right)}$;	**59)** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\left(-1\right)^{n}\cdot\sin\frac{\pi}{3\sqrt{n}}}{\sqrt{4n-1}}$;	**60).** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\left(-1\right)^{n}}{n^{2}+\sin^{2}n}$;
61) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\cos\frac{\pi n}{4}}{n-0,4}$;	**62)** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\sin\frac{\pi n}{6}}{\sqrt{n-0,2}}$;	**63)** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\cos\frac{\pi n}{24}}{\sqrt{3n-5}}$;
64) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n}\frac{\sin\frac{1}{\sqrt{n}}}{\sqrt[n]{n+1}}$;	**65)** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n}\frac{tg\frac{1}{\sqrt{n+1}}}{\sqrt[2n]{2n}}$;	**66)** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n}\frac{\ln\left(1+\frac{1}{\sqrt{n}}\right)}{\sqrt{n+1}\cdot\sqrt[n]{n}}$;

Продовження таблиці II.1

67) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n!)^2}{2^{n^2}}$;	**68)** $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^{n+1}\cdot(n^3+1)}{(n+1)!}$;	**69)** $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n-1)!!}{3^n\cdot(n+1)!}$;
70) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2n-1}{3n+2}\right)^{n^2}$;	**71)** $\sum_{n=1}^{\infty}n^5\cdot\left(\frac{2n-1}{3n+4}\right)^n$;	**72)** $\sum_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2}\cdot\frac{1}{2^n}$;
73) $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{n^2}{(n^3+1)\cdot\ln^2 n}$;	**74)** $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3}{n\cdot\ln^2(n+7)}$;	**75)** $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(3n+4)\cdot\ln^2(5n+2)}$;
76) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n\cdot\cos^2 n}{n^3+5}$;	**77)** $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{\ln\sqrt{n^2+3n}}{\sqrt{n^3-n}}$;	**78)** $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{\arcsin\frac{n-1}{n}}{\sqrt[3]{n^6-3n}}$;
79) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt[3]{n}}\cdot arctg\frac{\pi}{4\sqrt{n}}$;	**80)** $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt[5]{n+1}}\cdot\sin\frac{1}{\sqrt{n}}$;	**81)** $\sum_{n=1}^{\infty}n^2\cdot\sin^n\frac{\pi}{2n}$;
82) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\cdot\frac{1}{(2n-1)^3}$;	**83)** $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin 7n}{n^2}$;	**84)** $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\cdot\frac{1}{n\cdot 2^n}$;
85) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n\cdot(n+3)}{\ln(n+4)}$;	**86)** $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\cdot\frac{1}{\ln(n+2)}$;	**87)** $\sum_{n=3}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n\cdot\ln n\cdot\ln(\ln n)}$;
88) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\cdot\ln\left(1+\frac{1}{n^2}\right)$;	**89)** $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\cdot\left(\frac{n}{2n+1}\right)^n$;	**90)** $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\arcsin(-1)^n/n}{n^{1/2}}$;
91) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n+\cos\frac{2}{\sqrt{n+4}}}$;	**92)** $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\cos\frac{\pi}{2\sqrt{n}}\cdot\sqrt[3]{2n+\ln n}}$;	**93)** $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\cdot\frac{n^3}{(n+1)!}$;
94) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos 2n}{2n-0{,}4}$;	**95)** $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin n}{\sqrt{n+2}}$;	**96)** $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos 3n}{\sqrt{3n+1}}$;
97) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{n\cdot\ln n\cdot\sqrt[n]{n+1}}$;	**98)** $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{n}{(n^2+1)\sqrt[2n]{2n}}$;	**99)** $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{n+1}{n^2\cdot\sqrt[n]{n}}$;
100) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n^2+1)\cdot\ln(2n)}$;	**101)** $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+1}{n^2\cdot\sqrt[3]{3n+1}}$;	**102)** $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{5^n\cdot(n+1)!}{(2n)!}$;
103) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+5}{n}\cdot\sin\frac{2}{3^n}$;	**104)** $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{4n-3}{5n+1}\right)^{n^3}$;	**105)** $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n^2+3}}\cdot\left(e^{\frac{1}{\sqrt{n}}}-1\right)$;
106) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(n+2)\cdot\ln^2\left(\sqrt{2n}\right)}$;	**107)** $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin 2n}{n!}$;	**108)** $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n\cdot tg\frac{\pi}{2\sqrt{n}}}{\sqrt{5n+1}}$;
109) $\sum_{n=1}^{\infty}2\cdot(-1)^n$;	**110)** $\sum_{n=1}^{\infty}3\cdot(-1)^n$;	**111)** $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n$.

Таблиця II.2

Ряд	**Варіант** № завдання	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
$\sum a_n^{(1а)}$	**1а**	2	3	7	34	35	36	67	68	69	102	2	7	36
$\sum a_n^{(1б)}$	**1б**	4	8	9	10	11	12	40	41	42	43	73	77	78
$\sum a_n^{(2а)}$	**2а**	33	32	31	61	62	63	96	95	94	31	32	33	62
$\sum a_n^{(2б)}$	**2б**	28	29	30	64	65	66	97	98	99	28	30	29	98
$\sum a_n^{(4,1а)}$	**4а**	102	103	57	56	106	107	51	26	90	93	23	22	84
$\sum a_n^{(4,2а)}$		108	91	104	105	55	54	88	89	25	24	82	83	21
$\sum a_n^{(4,1б)}$	**4б**	51	102	67	104	70	26	74	76	22	80	83	59	90
$\sum a_n^{(4,2б)}$		100	54	105	68	27	72	25	77	78	81	84	88	58
$\sum a_n^{(4,3б)}$		101	1	55	69	71	73	75	23	79	82	85	89	93
$\sum a_n^{(6а)}$	**6а**	91	92	85	86	87	51	54	55	56	57	58	59	27
$\sum a_n^{(6,1б)}$	**6б**	95	54	91	19	20	21	26	25	27	52	53	54	58
$\sum a_n^{(6,2б)}$		96	57	94	22	23	24	37	38	39	55	56	57	59
$\sum a_n^{(6,1в)}$	**6в**	16	46	79	3	2	22	36	35	58	90	92	67	100
$\sum a_n^{(6,2в)}$		17	47	80	6	23	1	39	38	37	87	89	70	101
$\sum a_n^{(6,3в)}$		18	48	81	26	5	4	51	41	40	84	83	73	102
$\sum a_n^{(6,4в)}$		19	49	82	9	8	7	54	44	43	96	80	76	103
$\sum a_n^{(6,5в)}$		20	50	83	12	11	25	42	56	46	81	86	79	104
$\sum a_n^{(6,6в)}$		21	51	84	15	14	10	45	47	49	78	77	91	105
$\sum a_n^{(6,7в)}$		22	52	85	18	17	13	48	50	52	75	74	85	106
$\sum a_n^{(6,8в)}$		24	53	88	24	16	19	60	53	55	72	71	88	107
$\sum a_n^{(6,9в)}$		15	45	89	36	20	16	69	59	34	69	68	82	108
$\sum a_n^{(7,1а)}$	**7а**	41	108	17	91	92	34	85	86	87	8	55	56	1
$\sum a_n^{(7,2а)}$		42	20	18	39	37	35	15	13	11	9	6	4	2
$\sum a_n^{(7,3а)}$		43	24	19	40	38	36	16	14	12	10	7	5	3
$\sum a_n^{(7,1б)}$	**7б**	108	100	73	56	89	106	3	36	35	67	74	34	109
$\sum a_n^{(7,2б)}$		67	110	74	80	90	108	6	39	38	67	110	35	40
$\sum a_n^{(7,3б)}$		68	101	108	81	23	107	110	42	41	54	75	108	41
$\sum a_n^{(7,4б)}$		69	2	75	82	93	2	9	25	109	69	76	109	42
$\sum a_n^{(7,5б)}$		109	3	76	22	110	5	12	45	44	70	77	36	43
$\sum a_n^{(7,6б)}$		70	21	77	83	100	109	15	48	47	71	51	37	44
$\sum a_n^{(7,7б)}$		71	104	110	84	109	8	110	60	50	108	78	38	45
$\sum a_n^{(7,8б)}$		72	105	78	88	101	11	18	108	55	72	79	57	46
$\sum a_n^{(7,9б)}$		27	106	79	110	102	14	24	69	53	73	1	39	26

2. Приклад виконання індивідуального завдання

Задача II.1. Дослідити ряди на збіжність:

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2^n n!}{n^n}$**;** **б)** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(3n+1)\ln(7n+4)}$**.**

Розв'язання. **а)** Застосуємо для дослідження на збіжність ряду ознаку Д'Аламбера:

$$x_n=\frac{2^n n!}{n^n};$$

$$x_{n+1}=\frac{2^{n+1}(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}=\left\|\begin{matrix}(n+1)!=(n+1)\cdot n!;\\ (n+1)^{n+1}=(n+1)^n\cdot(n+1);\\ 2^{n+1}=2^n\cdot 2\end{matrix}\right\|=\frac{2^n\cdot 2\cdot(n+1)\cdot n!}{(n+1)^n\cdot(n+1)}=\frac{2^n\cdot 2\cdot n!}{(n+1)^n};$$

$$\lim_n\frac{x_{n+1}}{x_n}=\lim_n\frac{2^n\cdot 2\cdot n!}{(n+1)^n}\cdot\frac{n^n}{2^n n!}=\lim_n 2\cdot\left(\frac{n}{n+1}\right)^n=\lim_n\frac{2}{\left(\frac{n+1}{n}\right)^n}=\lim_n\frac{2}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}=\frac{2}{e}=q.$$

Оскільки $q=\frac{2}{e}<1$, то за ознакою Д'Аламбера даний ряд збігається.

б) Розглянемо ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}x_n$, де $x_n=\frac{1}{(3n+1)\ln(7n+4)}$ і ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}y_n$, де $y_n=\frac{1}{(7n+4)\ln(7n+4)}$. Для них маємо:

$$\lim_n\frac{y_n}{x_n}=\lim_n\frac{1}{(7n+4)\ln(7n+4)}\cdot\frac{(3n+1)\ln(7n+4)}{1}=\lim_n\frac{3n+1}{7n+4}=\frac{3}{7}=const\neq 0.$$

Отже, за ознакою порівняння в граничній формі ряди $\sum\limits_{n=1}^{\infty}x_n$ і $\sum\limits_{n=1}^{\infty}y_n$ збігаються або розбігаються одночасно.

Дослідимо тепер ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}y_n$ за допомогою інтегральної ознаки Коші-Маклорена. Для функції

$$f(x)=\frac{1}{(7x+4)\ln(7x+4)}$$

маємо:

1) $f(n)=\frac{1}{(7n+4)\ln(7n+4)}=y_n\ \forall n\in\mathbb{N}$;

2) $f(x)-\nearrow$ на $[1;+\infty)$, оскільки

$$\forall x_1, x_2 \in [1;+\infty)\; x_1 < x_2 \Rightarrow 7x_1 + 4 < 7x_2 + 4 \Rightarrow \ln(7x_1+4) < \ln(7x_2+4);$$

$$\forall x_1, x_2 \in [1;+\infty)\; x_1 < x_2 \Rightarrow (7x_1+4)\ln(7x_1+4) < (7x_2+4\,)\ln(7x_2+4) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{1}{(7x_1+4)\ln(7x_1+4)} > \frac{1}{(7x_2+4\,)\ln(7x_2+4)} \Rightarrow f(x_1) > f(x_2).$$

3) Невласний інтеграл

$$\int_1^{+\infty} f(x)dx = \int_1^{+\infty} \frac{dx}{(7x+4)\ln(7x+4)} = \left\| d\big(\ln(7x+4)\big) = \frac{7dx}{7x+4} \right\| =$$

$$= \frac{1}{7}\int_1^{+\infty} \frac{d\big(\ln(7x+4)\big)}{\ln(7x+4)} = \ln\left|\ln(7x+4)\right| \Big|_1^{+\infty} = +\infty$$

розбігається, тому (за інтегральною ознакою Коші-Маклорена) розбігається ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} y_n$. Отже, даний ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n$ розбігається . ■

Задача II.2. Дослідити ряди на абсолютну та умовну збіжність:

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(3n+1)\ln(7n+4)}$; **б)** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(n/3)}{\sqrt[3]{n+5}}$; **в)** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n-1}{n+1}\cdot\frac{1}{\sqrt[100]{n}}$.

Розв'язання.

а) *Абсолютна збіжність.* Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left| \frac{(-1)^n}{(3n+1)\ln(7n+4)} \right| = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(3n+1)\ln(7n+4)}$ розбігається. Це було доведено в попередній задачі. Отже, абсолютної збіжності немає.

Збіжність. Даний ряд є знакопочережним, оскільки його можна подати у вигляді:

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n c_n, \text{ де } c_n = \frac{1}{(3n+1)\ln(7n+4)} > 0 \;\; \forall n \in \mathbb{N}.$$

Застосуємо ознаку Лейбніца.

1) $c_{n+1} = \frac{1}{(3(n+1)+1)\ln(7(n+1)+4)} = \frac{1}{(3n+4)\ln(7n+11)}$;

$$c_n = \frac{1}{(3n+1)\ln(7n+4)} > \frac{1}{(3n+4)\ln(7n+11)} = c_{n+1} \;\; \forall n \in \mathbb{N}.$$

Тому $\{c_n\} - \searrow$.

2) $\lim\limits_{n} c_n = \lim\limits_{n} \frac{1}{(3n+1)\ln(7n+4)} = 0$.

Отже, за ознакою Лейбніца ряд збігається.

Оскільки ряд збігається, однак абсолютно розбігається, то він збігається умовно.

б) *Збіжність.* Розглянемо ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(n/3)}{\sqrt[3]{n+5}}$. Застосуємо ознаку Діріхле. Нехай

$$a_n = \cos(n/3), \quad b_n = \frac{1}{\sqrt[3]{n+5}}.$$

При $x \neq 2\pi m, m \in \mathbb{Z}$ із співвідношень

$$\sum_{k=1}^{n} \cos kx = \cos x + \cos 2x + \cos 3x + \ldots + \cos nx =$$

$$= \frac{1}{\sin\frac{x}{2}} \cdot \left(\sin\frac{x}{2}\cdot\cos x + \sin\frac{x}{2}\cdot\cos 2x + \sin\frac{x}{2}\cdot\cos 3x + \ldots + \sin\frac{x}{2}\cdot\cos nx \right) =$$

$$= \frac{1}{2\sin\frac{x}{2}} \cdot \left(-\sin\frac{x}{2} + \sin\frac{3x}{2} - \sin\frac{3x}{2} + \sin\frac{5x}{2} - \sin\frac{5x}{2} + \sin\frac{7x}{2} - \ldots - \right.$$

$$\left. -\sin\left[\left(n-\frac{1}{2}\right)x\right] + \sin\left[\left(n+\frac{1}{2}\right)x\right] \right) = \frac{1}{2\sin\frac{x}{2}} \cdot \left(-\sin\frac{x}{2} + \sin\left[\left(n+\frac{1}{2}\right)x\right] \right)$$

випливає, що

$$\left|\sum_{k=1}^{n} \cos kx\right| = \frac{1}{2\left|\sin\frac{x}{2}\right|} \cdot \left(\left|\sin\frac{x}{2}\right| + \left|\sin\left[\left(n+\frac{1}{2}\right)x\right]\right| \right) \leq \frac{1}{2\left|\sin\frac{x}{2}\right|} \cdot 2 = \frac{1}{\left|\sin\frac{x}{2}\right|}.$$

Аналогічна нерівність виконується для синусів кратних дуг. Таким чином:

$$\boxed{\begin{gathered} \left|\sum_{k=1}^{n} \cos kx\right| \leq \frac{1}{\left|\sin\frac{x}{2}\right|} \\ \left|\sum_{k=1}^{n} \sin kx\right| \leq \frac{1}{\left|\sin\frac{x}{2}\right|}, \\ x \neq 2\pi m, m \in \mathbb{Z} \end{gathered}}$$

1) Перша із отриманих нерівностей для $x = \frac{1}{3}$ набуває вигляду:

$$|A_n| = \left|\sum_{k=1}^{n} a_k\right| = \left|\sum_{k=1}^{n} \cos(k/3)\right| \leq \frac{1}{\left|\sin\frac{1}{6}\right|} \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Звідси випливає, що $\{A_n\}$ – обмежена.

2) Оскільки $b_n = \frac{1}{\sqrt[3]{n+5}} > b_{n+1} = \frac{1}{\sqrt[3]{n+6}} \quad \forall n \in \mathbb{N}$, то $\{b_n\} \searrow$.

3) $\lim\limits_{n} b_n = \lim\limits_{n} \frac{1}{\sqrt[3]{n+5}} = 0$.

Отже, за ознакою Діріхле ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n b_n = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(n/3)}{\sqrt[3]{n+5}}$ – збігається.

Абсолютна збіжність. Має місце нерівність

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{\cos(n/3)}{\sqrt[3]{n+5}}\right|\ge\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos^2(n/3)}{\sqrt[3]{n+5}}=\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt[3]{n+5}}+\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos(2n/3)}{\sqrt[3]{n+5}}. \qquad (1)$$

Ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt[3]{n+5}}$ розбігається, оскільки

$$\begin{array}{ccc} \dfrac{1}{\sqrt[3]{n+5}} & \overset{n\to\infty}{\sim} & \dfrac{1}{\sqrt[3]{n}}. \\ \sum\frac{1}{\sqrt[3]{n+5}}-\text{розб.} & \begin{array}{l}\Leftarrow\\ \text{(за ознакою}\\ \text{порівняння}\\ \text{в граничній}\\ \text{формі)}\end{array} & \begin{array}{l}\sum\frac{1}{n^{1/3}}\ \text{розбігається}\\ \text{(як узагальнений}\\ \text{гармонічний ряд з показником}\\ \text{степеня знаменника } p{=}1/3{\le}1)\end{array} \end{array}$$

Розглянемо ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos(2n/3)}{\sqrt[3]{n+5}}$. Застосуємо ознаку Діріхле:

$$\left.\begin{array}{l} a_n=\cos\dfrac{2k}{3},\ b_n=\dfrac{1}{\sqrt[3]{n+5}};\\ 1)\ |A_n|=\left|\sum\limits_{k=1}^{n}a_k\right|=\left|\sum\limits_{k=1}^{n}\cos\dfrac{2k}{3}\right|\le\dfrac{1}{\left|\sin\dfrac{1}{3}\right|}\Rightarrow\{A_n\}-\text{обм.};\\ 2\ \{b_n\}\searrow;\ \ 3)\ \lim\limits_{n}b_n=0; \end{array}\right\}\Rightarrow\sum_{n=1}^{\infty}a_nb_n=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos(2n/3)}{\sqrt[3]{n+5}}-\text{зб.}$$

Оскільки ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt[3]{n+5}}$ розбігається, а ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos(2n/3)}{\sqrt[3]{n+5}}$ збігається, то із нерівності II.1) випливає, що ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos(n/3)}{\sqrt[3]{n+5}}$ абсолютно розбігається. Внаслідок збіжності цього ряду матимемо його умовну збіжність.

в) *Абсолютна збіжність.* Ряд абсолютно розбігається:

$$\begin{array}{ccc} \left|(-1)^n\dfrac{n-1}{n+1}\cdot\dfrac{1}{\sqrt[100]{n}}\right| & \overset{n\to\infty}{\sim} & \dfrac{1}{\sqrt[100]{n}}. \\ \sum(-1)^n\frac{n-1}{n+1}\cdot\frac{1}{\sqrt[100]{n}}-\text{абс. розб.} & \begin{array}{l}\Leftarrow\\ \text{(за ознакою}\\ \text{порівняння}\\ \text{в граничній}\\ \text{формі)}\end{array} & \begin{array}{l}\sum\frac{1}{n^{1/100}}\ \text{розбігається}\\ \text{(як узагальнений гармонічний}\\ \text{ряд } \sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p} \text{ з показником}\\ \text{степеня знаменника } p{=}1/100{\le}1)\end{array} \end{array}$$

Збіжність. Розглянемо ряд $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{n-1}{n+1}\cdot\frac{1}{\sqrt[100]{n}}$. Застосуємо ознаку Абеля. Нехай

$$a_n=\frac{(-1)^n}{\sqrt[100]{n}},\quad b_n=\frac{n-1}{n+1}.$$

1) Розглянемо ряд $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$. Застосуємо ознаку Лейбніца:

$$\left.\begin{array}{l}\left\{c_n=\frac{1}{\sqrt[100]{n}}\right\}\searrow;\\[2ex] \lim\limits_{n} c_n=\lim\limits_{n}\frac{1}{\sqrt[100]{n}}=0;\end{array}\right\}\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n c_n=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt[100]{n}}=\sum_{n=1}^{\infty}a_n\ \text{збігається.}$$

2) Оскільки $b_n=\frac{n-1}{n+1}=1-\frac{2}{n+1}<b_{n+1}=1-\frac{2}{n+2}$ $\forall n\in\mathbb{N}$, то $\{b_n\}\nearrow$.

3) Оскільки $0<b_n=\frac{n-1}{n+1}<1\,\forall n\in\mathbb{N}$, то $\{b_n\}$ – обмежена.

Отже, ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_nb_n=\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{n-1}{n+1}\cdot\frac{1}{\sqrt[100]{n}}$ – збігається. Внаслідок його абсолютної збіжності матимемо висновок про умовну збіжність даного ряду. ■

Задача ІІ.3. Знаючи, що $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}=\ln 2$, довести наступне твердження: якщо члени ряду $1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\ldots$ переставити так, щоб групу p послідовних додатних членів заміняла група q послідовних від’ємних членів, тоді сума нового ряду буде дорівнювати $\ln 2+\frac{1}{2}\ln\frac{p}{q}$

Розв’язання цієї задачі розібрати самостійно в [**12**, с. 35].

Задача ІІ.4. Дослідити ряди в скінченновимірних просторах на абсолютну та умовну збіжність:

а) у $\mathbb{R}_2^2$ $\sum\limits_{n=1}^{\infty}x_n=\left(\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n n}{n^3+n+3};\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\ln n}{\sqrt[3]{n^4+7}}\right)$;

б) у $\mathbb{R}_2^3$ $\sum\limits_{n=1}^{\infty}x_n=\left(\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n\sin\frac{1}{\sqrt{n}}}{\sqrt{n+4}};\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2+\sin^2 n};\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\operatorname{tg}\frac{1}{n}\right)$.

Розв’язання.

а) Розглянемо ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n n}{n^3+n+3}$. Маємо:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{(-1)^n n}{n^3+n+3}\right|=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{n^3+n+3};$$

$$\frac{n}{n^3+n+3}\overset{n\to\infty}{\sim}\frac{n}{n^3}=\frac{1}{n^2}.$$

Для показника степеня знаменника $p=2>1$ в узагальненому гармонічному ряді $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}$ має місце збіжність ряду $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$. Тому, за ознакою порівняння в граничній формі, ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n}{n^3+n+3}$ збігається. Отже, ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n n}{n^3+n+3}$ збігається абсолютно.

Розглянемо ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\ln n}{\sqrt[3]{n^4+7}}$. Оскільки $\forall n\in\mathbb{N}\ \forall\lambda>0\ \ln n\le n^{\lambda}$, то для $\lambda=\frac{1}{6}$ виконується нерівність $\ln n\le n^{1/6}$. Отже,

$$\frac{\ln n}{\sqrt[3]{n^4+7}}\le\frac{n^{1/6}}{n^{4/3}}=\frac{1}{n^{7/6}}\quad\forall n\in\mathbb{N}.$$

Для показника степеня знаменника $p=\frac{7}{6}>1$ в узагальненому гармонічному ряді $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}$ має місце збіжність ряду $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{7/6}}$. Тому за загальною ознакою порівняння знакододатний ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\ln n}{\sqrt[3]{n^4+7}}$ збігається.

Кожен з координатних рядів збігається при будь-якому переставленні своїх членів (див. теореми 2.1 і 2.2). Оскільки в скінченновимірному просторі $\mathbb{R}_2^2$ збіжність послідовності (послідовності частинних сум ряду) еквівалентна покоординатній збіжності, то даний ряд збігається в просторі $\mathbb{R}_2^2$ при будь-якому переставленні. Тому даний ряд <u>збігається безумовно</u>, а, отже, (за теоремою 4.2) <u>й абсолютно</u>.

б) Розглянемо координатні ряди для ряду в $\mathbb{R}_2^3$

$$\sum_{n=1}^{\infty}x_n=\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n\sin\frac{1}{\sqrt{n}}}{\sqrt{n+4}};\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2+\sin^2 n};\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\operatorname{tg}\frac{1}{n}\right).$$

Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n\sin\frac{1}{\sqrt{n}}}{\sqrt{n+4}}$ абсолютно розбігається:

$$\underbrace{\left|\frac{(-1)^n\sin\frac{1}{\sqrt{n}}}{\sqrt{n+4}}\right|}_{\sum\frac{(-1)^n\sin\frac{1}{\sqrt{n}}}{\sqrt{n+4}}-\text{абс. розб.}}\ \underset{\substack{\Leftarrow\\ \text{(за ознакою}\\ \text{порівняння}\\ \text{в граничній}\\ \text{формі)}}}{\overset{n\to\infty}{\sim}}\ \frac{\frac{1}{\sqrt{n}}}{\sqrt{n}}=\underbrace{\frac{1}{n}}_{\substack{\sum\frac{1}{n}\ \text{розбігається}\\ \text{(як гармонічний ряд)}}}.$$

При цьому цей ряд збігається. Покажемо це. Нехай

$$c_n=\frac{\sin\frac{1}{\sqrt{n}}}{\sqrt{n+4}}>\left\|\begin{array}{l}\frac{1}{\sqrt{n}}\in(0;1]\subset\left(0;\frac{\pi}{2}\right)\Rightarrow\text{кут }\frac{1}{\sqrt{n}}\text{ належить}\\ \text{I чверті}\Rightarrow\sin\frac{1}{\sqrt{n}}>0;\qquad \sqrt{n+4}>0;\end{array}\right\|>0.$$

Тоді

1) $\forall n\in\mathbb{N}\ \ n<n+1;$

$$\left.\begin{array}{l}\left.\begin{array}{l}\frac{1}{\sqrt{n}}>\frac{1}{\sqrt{n+1}};\\ \text{для кута,}\\ \text{що належить I чверті,}\\ \text{функція }\sin x\ \nearrow;\end{array}\right\}\Rightarrow\sin\frac{1}{\sqrt{n}}>\sin\frac{1}{\sqrt{n+1}};\\ \frac{1}{\sqrt{n+4}}>\frac{1}{\sqrt{n+5}};\end{array}\right\}\Rightarrow\left|\begin{array}{c}\frac{1}{\sqrt{n+4}}\sin\frac{1}{\sqrt{n}}>\frac{1}{\sqrt{n+5}}\sin\frac{1}{\sqrt{n+1}}\\ c_n>c_{n+1}\ \forall n\in\mathbb{N}\Rightarrow\\ \Rightarrow\{c_n\}-\searrow;\end{array}\right.$$

2) $\lim\limits_{n}c_n=\lim\limits_{n}\frac{\sin\frac{1}{\sqrt{n}}}{\sqrt{n+4}}=0.$

Отже, за ознакою Лейбніца, ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n c_n=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n\sin\frac{1}{\sqrt{n}}}{\sqrt{n+4}}$ збігається. Оскільки цей ряд абсолютно розбігається, то він збігається умовно.

Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2+\sin^2 n}$ збігається абсолютно:

$$\begin{array}{ccc}\left|\frac{(-1)^n}{n^2+\sin^2 n}\right|=\frac{1}{n^2+\sin^2 n} & \le & \frac{1}{n^2}\quad\forall n\in\mathbb{N}.\\ \sum\frac{(-1)^n}{n^2+\sin^2 n}\text{–абс. зб.} & \begin{array}{l}\Leftarrow\\ \text{(за загальною}\\ \text{ознакою}\\ \text{порівняння)}\end{array} & \begin{array}{l}\sum\frac{1}{n^2}\text{ збігається}\\ \text{(як узагальнений}\\ \text{гармонічний ряд з показником}\\ \text{степеня знаменника } p=2>1)\end{array}\end{array}$$

Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\operatorname{tg}\frac{1}{n}$ абсолютно розбігається:

$$\begin{array}{ccc}\left|(-1)^n\operatorname{tg}\frac{1}{n}\right| & \overset{n\to\infty}{\sim} & \frac{1}{n},\\ \sum(-1)^n\operatorname{tg}\frac{1}{n}\text{–абс. розб.} & \begin{array}{l}\Leftarrow\\ \text{(за ознакою}\\ \text{порівняння}\\ \text{в граничній}\\ \text{формі)}\end{array} & \begin{array}{l}\sum\frac{1}{n}\text{ розбігається}\\ \text{(як гармонічний ряд)}\end{array}\end{array}$$

однак збігається:

$$c_n=\operatorname{tg}\frac{1}{n}>\left\|\begin{array}{l}\frac{1}{n}\in(0;1]\subset\left(0;\frac{\pi}{2}\right)\Rightarrow\text{кут }\frac{1}{n}\text{ належить}\\ \text{I чверті}\Rightarrow\operatorname{tg}\frac{1}{n}>0;\end{array}\right\|>0;$$

1) $\forall n\in\mathbb{N}\ \ n<n+1;$

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{1}{n}>\dfrac{1}{n+1};\\ \text{для кута,}\\ \text{що належить I чверті,}\\ \text{функція } \sin x-\nearrow; \end{array}\right\}\Rightarrow\left|\begin{array}{l} \mathrm{tg}\dfrac{1}{n}>\mathrm{tg}\dfrac{1}{n+1};\\ c_n>c_{n+1}\ \forall n\in\mathbb{N}\Rightarrow\\ \Rightarrow\{c_n\}-\searrow; \end{array}\right.$$

2) $\lim\limits_{n} c_n=\lim\limits_{n}\mathrm{tg}\dfrac{1}{n}=0,$

отже, за ознакою Лейбніца, ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n c_n=\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\mathrm{tg}\dfrac{1}{n}$ збігається. Оскільки цей ряд абсолютно розбігається, то він збігається умовно.

У скінченновимірному просторі $\mathbb{R}_2^3$ збіжність послідовності (зокрема, послідовності частинних сум ряду) еквівалентна покоординатній збіжності, тому даний ряд *збігається* в просторі $\mathbb{R}_2^3$.

За теоремою Рімана перший координатний ряд при деякому переставленні членів розбігається. Тому даний ряд при зазначеному переставлені розбігається в просторі $\mathbb{R}_2^3$. Отже, даний ряд *не є безумовно збіжним*.

Таким чином, цей ряд – *умовно збіжний*. ■

Задача II.5. Знайти множину функціоналів збіжності і аннулятори наступних рядів $\sum\limits_{n=1}^{\infty}x_n$:

а) $x_n=\left(\dfrac{1}{2^n};\ \ \dfrac{(-1)^n}{n}\right)$ у $\mathbb{R}_2^2$; **б)** $x_n=\left(\dfrac{1}{3^n};\ \ \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}};\ \ \dfrac{1}{3^n}\right)$ у $\mathbb{R}_2^3$.

Розв'язання. Розглянемо ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}x_n$, $x_n=\left(\dfrac{1}{2^n};\ \ \dfrac{(-1)^n}{n}\right)$ у просторі $\mathbb{R}_2^2$.

Знайдемо множину функціоналів збіжності:

$$\mathit{Г}=\left\{f\in\left(\mathbb{R}_2^2\right)^*:\sum_{n=1}^{\infty}\left|f\left(x_n\right)\right|-\text{зб.}\right\}.$$

Відомо [**2**], що

$$\forall f\in\left(\mathbb{R}_2^2\right)^*\ \exists!\,y=(y_1;y_2)\in\mathbb{R}_2^2:\forall x=(x_1;x_2)\in\mathbb{R}_2^2\ f(x)=y_1x_1+y_2x_2.$$

Розглянемо деякий функціонал $f\in\left(\mathbb{R}_2^2\right)^*$ і знайдемо елемент $y=(y_1;y_2)\in\mathbb{R}_2^2$, що задовольняє зазначену вище умову. Тоді

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left|f\left(x_n\right)\right|=\sum_{n=1}^{\infty}\left|y_1\frac{1}{2^n}+y_2\frac{(-1)^n}{n}\right|.$$

У випадку, коли $y_2 \neq 0$, для $z_n = \frac{1}{n}$ і $\left|f\left(x_n\right)\right| = \left|y_1 \frac{1}{2^n} + y_2 \frac{(-1)^n}{n}\right|$ мають місце співвідношення:

$$\lim_n \frac{\left|f\left(x_n\right)\right|}{\left|z_n\right|} = \lim_n \left|y_1 \cdot \frac{1}{2^n} + y_2 \frac{(-1)^n}{n}\right| \cdot n = \lim_n \left|y_1 \cdot \frac{n}{2^n} + y_2 (-1)^n\right| = \left|y_2\right|,$$

$$\left|\left|y_2\right| - \underbrace{\left|y_1\right| \cdot \frac{n}{2^n}}_{\to 0}\right| \le \left|y_1 \cdot \frac{n}{2^n} + y_2 (-1)^n\right| \le \underbrace{\left|y_1\right| \cdot \frac{n}{2^n}}_{\to 0} + \left|y_2\right|.$$

$$\searrow \qquad\qquad \Downarrow \qquad\qquad \swarrow$$

$$\left|y_2\right|$$

Звідки (за ознакою порівняння в граничній формі) випливає, що ряди $\sum_{n=1}^{\infty} z_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ і $\sum_{n=1}^{\infty} \left|f\left(x_n\right)\right| = \sum_{n=1}^{\infty} \left|y_1 \frac{1}{2^n} + y_2 \frac{(-1)^n}{n}\right|$ розбігаються одночасно у випадку, коли $y_2 \neq 0$.

Якщо $y_2 = 0$, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \left|f\left(x_n\right)\right| = \sum_{n=1}^{\infty} \left|y_1 \frac{1}{2^n} + y_2 \frac{(-1)^n}{n}\right| = \left|y_1\right| \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$ збігається.

Таким чином, множина функціоналів збіжності утворюється із тих функціоналів, які визначаються елементами $y = (y_1; y_2) \in \mathbb{R}_2^2$ з другою нульовою координатою $y_2 = 0$:

$$\varGamma = \left\{ f \in \left(\mathbb{R}_2^2\right)^* :\ \exists y_1 \in \mathbb{R}\ \ \forall x = (x_1; x_2) \in \mathbb{R}_2^2\ \ f(x) = y_1 x_1 \right\}.$$

Така множина $\varGamma \subset \left(\mathbb{R}_2^2\right)^*$ в спряженому просторі до $\mathbb{R}_2^2$ ізоморфна множині точок на прямій $A = \left\{ y = (y_1; y_2) \in \mathbb{R}_2^2 : y_2 = 0 \right\}$ у $\mathbb{R}_2^2$.

Аннулятор множини $\varGamma \subset \left(\mathbb{R}_2^2\right)^*$:

$$\varGamma_0 = \left\{ x \in \mathbb{R}_2^2 : f\left(x\right) = 0\ \ \forall f \in \varGamma \right\} = \left\{ x = (x_1; x_2) \in \mathbb{R}_2^2 :\ y_1 x_1 = 0\ \ \forall y_1 \in \mathbb{R} \right\} =$$

$$= \left\{ x = (x_1; x_2) \in \mathbb{R}_2^2 :\ x_1 = 0 \right\} -$$

це множина точок на прямій з рівнянням $x_1 = 0$.

б) Розглянемо ряд $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$, $x_n = \left(\frac{1}{3^n};\ \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}};\ \frac{1}{3^n} \right)$ у просторі $\mathbb{R}_2^3$. Знайдемо множину функціоналів збіжності. Розглянемо деякий функціонал $f \in \left(\mathbb{R}_2^3\right)^*$ і знайдемо елемент $y = (y_1; y_2; y_3) \in \mathbb{R}_2^3$, що задовольняє умову $f(x) = y_1 x_1 + y_2 x_2 + y_3 x_3$. Тоді

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left|f\left(x_n\right)\right|=\sum_{n=1}^{\infty}\left|y_1\frac{1}{3^n}+y_2\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}+y_3\frac{1}{3^n}\right|.$$

У випадку, коли $y_2\neq 0$, ряди $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left|f\left(x_n\right)\right|=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left|y_1\frac{1}{3^n}+y_2\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}+y_3\frac{1}{3^n}\right|$ і $\sum\limits_{n=1}^{\infty}z_n=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}$ розбігаються одночасно.

Якщо $y_2=0$, то ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left|f\left(x_n\right)\right|=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left|y_1\frac{1}{3^n}+y_2\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}+y_3\frac{1}{3^n}\right|=\left|y_1+y_3\right|\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3^n}$ збігається.

Таким чином, множина функціоналів збіжності утворюється із тих функціоналів, які визначаються елементами $y=(y_1;y_2;y_3)\in\mathbb{R}_2^3$ з другою нульовою координатою $y_2=0$:

$$\Gamma=\left\{f\in\left(\mathbb{R}_2^2\right)^*:\ \exists y_1,y_3\in\mathbb{R}\ \ \forall x=(x_1;x_2;x_3)\in\mathbb{R}_2^3\quad f(x)=y_1x_1+y_3x_3\ \right\}.$$

Така множина $\Gamma\subset\left(\mathbb{R}_2^3\right)^*$ в спряженому просторі до $\mathbb{R}_2^3$ ізоморфна множині точок площини $B=\left\{y=(y_1;y_2;y_3)\in\mathbb{R}_2^3:y_2=0\ \right\}$ у $\mathbb{R}_2^3$.

Аннулятор множини $\Gamma\subset\left(\mathbb{R}_2^3\right)^*$:

$$\Gamma_0=\left\{\ x\in\mathbb{R}_2^2:f\left(x\right)=0\ \ \forall f\in\Gamma\right\}=\left\{x=(x_1;x_2;x_3)\in\mathbb{R}_2^3:y_1x_1+y_3x_3=0\ \ \forall y_1,y_3\in\mathbb{R}\right\}=$$
$$=\left\{x=(x_1;x_2;x_3)\in\mathbb{R}_2^3:x_1=0\wedge x_3=0\ \right\}\ –$$

це множина точок прямої з рівнянням $\begin{cases}x_1=0;\\x_3=0.\end{cases}$ ■

Задача II.6. Знайти області сум рядів в скінченновимірних просторах; зробити схематичний рисунок:

а) у $\mathbb{R}_2^2$ $\sum\limits_{n=1}^{\infty}x_n=\left(\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\cos(n/3)}{\sqrt[3]{n+5}};(-2)\cdot\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\cos(n/3)}{\sqrt[3]{n+5}}\right);$

б) у $\mathbb{R}_2^2$ $\sum\limits_{n=1}^{\infty}x_n:$ $\begin{aligned}x_{2n-1}&=\left(\frac{(-1)^n}{n};\qquad 0\qquad\right);\\ x_{2n}&=\left(\ 0;\quad(-1)^n\frac{n-1}{n+1}\cdot\frac{1}{\sqrt[100]{n}}\right);\end{aligned}$.

в) у $\mathbb{R}_2^3$ $\sum\limits_{n=1}^{\infty}x_n:$ $\begin{aligned}x_{3n-2}&=\left(\ (-1)^n\operatorname{tg}\frac{1}{n};\quad(-1)^n\sin\frac{1}{3n^2+2};\quad\frac{\sin n}{n!}\ \right);\\ x_{3n-1}&=\left(\frac{(-1)^n}{n\cdot\ln^2(n+1)};\quad(-1)^n\frac{1}{n\cdot\sqrt[n]{2}};\quad\frac{(-1)^n}{n^2\ln(n+1)}\right);\\ x_{3n}&=\left(\ \frac{\operatorname{arctg}n}{n^n+n};\quad\left[\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\right]^2\cdot\frac{1}{n};\ (-1)^n\frac{(n!)^2}{(2n)!}\right).\end{aligned}$

Розв'язання. **а)** Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\cos(n/3)}{\sqrt[3]{n+5}}$ збігається умовно (див. задачу II.2 б), тому за теоремою Рімана для будь-якого дійсного числа s при деякому переставленні цей ряд буде збігатися до s. Отже,

$$OC\left(\sum_{n=1}^{\infty}x_n\right)=OC\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos(n/3)}{\sqrt[3]{n+5}};(-2)\cdot\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos(n/3)}{\sqrt[3]{n+5}}\right)=\left\{(s;-2s):s\in\mathbb{R}\right\}.$$

На рис. II.1 а) зображено цю множину на декартовій площині.

б) Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}$ умовно збігається (доведіть це самостійно ✍!). В задачі II.2 в) була доведена умовна збіжність ряду $\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n=\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{n-1}{n+1}\cdot\frac{1}{\sqrt[100]{n}}$.

Нехай $(a,b)\in\mathbb{R}^2$ – довільна точка площини. Застосовуючи теорему Рімана, побудуємо переставлення $\pi_1:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ таке, що $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_{\pi_1(n)}=a$, а також переставлення $\pi_2:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$, для якого $\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_{\pi_2(n)}=b$.

Тоді переставлення даного ряду $\sum\limits_{k=1}^{\infty}x_{\pi(k)}$

$$\begin{aligned}
x_{\pi(1)} &=\left(a_{\pi_1(1)};\ 0\right);\\
x_{\pi(2)} &=\left(0;\ b_{\pi_2(1)}\right);\\
x_{\pi(3)} &=\left(a_{\pi_1(2)};\ 0\right);\\
x_{\pi(4)} &=\left(0;\ b_{\pi_2(2)}\right);\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
x_{\pi(2n-1)} &=\left(a_{\pi_1(n)};\ 0\right);\\
x_{\pi(2n)} &=\left(0;\ b_{\pi_2(n)}\right);\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}$$

збігається до (a,b) в просторі $\mathbb{R}_2^2$. Внаслідок довільності вибору точки на площині отримаємо висновок про те, що в просторі $\mathbb{R}_2^2$

$$OC\left(\sum_{n=1}^{\infty}x_n\right)=\mathbb{R}\times\mathbb{R}=\mathbb{R}^2.$$

Отриману множину зобразити на декартовій площині самостійно ✍!

Додатково зазначимо, що можна зобразити схематично результат щодо типів збіжності координатних рядів у вигляді:

$$\boxed{\begin{array}{l} x_{2n-1} = \left(y;\ \ 0 \ \right); \\ x_{2n} \ \ = \left(\ 0;\ \ y \right); \end{array}}$$

тут позначення «y» відповідає місцю розташування умовно збіжного координатного ряду. Аналогічний результат щодо структури області сум в просторі $\mathbb{R}_2^2$ можна отримати для такої схеми:

$$\boxed{\begin{array}{l} x_{2n-1} = \left(y;\ \ a \ \right); \\ x_{2n} \ \ = \left(a;\ \ y \ \right); \end{array}}$$

тут позначка «a» відповідає абсолютно збіжному числовому ряду.

в) Знайдемо область сум ряду $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n$ у $\mathbb{R}_2^3$

$$\begin{array}{l}
x_{3n-2} = \left(\ (-1)^n \operatorname{tg}\dfrac{1}{n};\quad (-1)^n \sin\dfrac{1}{3n^2+2};\qquad \dfrac{\sin n}{n!} \ \right); \\
x_{3n-1} = \left(\dfrac{(-1)^n}{n\cdot\ln^2(n+1)};\qquad (-1)^n \dfrac{1}{n\cdot\sqrt[n]{2}};\quad \dfrac{(-1)^n}{n^2\ln(n+1)} \right); \\
x_{3n} \ \ = \left(\quad \dfrac{\operatorname{arctg} n}{n^n+n};\quad \left[\dfrac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \right]^2 \cdot \dfrac{1}{n};\ (-1)^n \dfrac{(n!)^2}{(2n)!} \right).
\end{array}$$

Дослідимо по черзі кожен із координатних рядів на абсолютну та умовну збіжність.

<u>1.1.</u>[1] Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n \operatorname{tg}\dfrac{1}{n}$ збігається умовно (див. задачу II.4 в).

<u>1.2.</u> Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n \sin\dfrac{1}{3n^2+2}$ збігається абсолютно:

$$\left| (-1)^n \sin\frac{1}{3n^2+2} \right| \quad \overset{n\to\infty}{\sim} \quad \frac{1}{n^2}.$$

$\sum(-1)^n \sin\frac{1}{3n^2+2}$–абс. зб. $\Leftarrow$ (за ознакою порівняння в граничній формі) $\sum\frac{1}{n^2}$ збігається (як узагальнений гармонічний ряд з показником степеня знаменника p=2>1)

<u>1.3</u>. Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\sin n}{n!}$ збігається абсолютно:

$$\left.\begin{array}{l}
1)\ |a_n| = \left| \dfrac{\sin n}{n!} \right| \le \dfrac{1}{n!} = b_n; \\
2)\ \lim\limits_{n} \dfrac{b_{n+1}}{b_n} = \lim\limits_{n} \dfrac{1}{(n+1)!}\cdot\dfrac{n!}{1} = \lim\limits_{n} \dfrac{1}{(n+1)} = 0 = q < 1 \Rightarrow \\
\quad \Rightarrow \text{за ознакою Д'Аламбера ряд } \sum\ \sum b_n - \text{збігається}
\end{array}\right\} \Rightarrow \left| \begin{array}{l}
\text{за загальною ознакою} \\
\text{порівняння ряд} \\
\sum |a_n| - \text{збігається} \Rightarrow \\
\Rightarrow \sum a_n - \text{абс. зб.}
\end{array}\right.$$

---

[1] Нижче нумерація досліджуваних рядів відповідатиме номеру рядка і стовпця, в якому за умовою розташовується член відповідного ряду.

2.1. Розглянемо ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n\cdot\ln^2(n+1)}$.

1) Маємо: $|x_n|=\left|\frac{(-1)^n}{n\cdot\ln^2(n+1)}\right|\overset{n\to\infty}{\sim}\frac{1}{(n+1)\cdot\ln^2(n+1)}=y_n$.

2) Дослідимо ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}y_n=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+1)\cdot\ln^2(n+1)}$ за інтегральною ознакою Коші-Маклорена . Для функції $f(x)=\frac{1}{(x+1)\ln^2(x+1)}$ маємо:

$$\left.\begin{array}{l}
\bullet\ f(n)=\dfrac{1}{(n+1)\ln^2(n+1)}=y_n\ \forall n\in\mathbb{N};\\[2ex]
\bullet\ \forall x_1,x_2\in[1;+\infty)\ x_1<x_2\Rightarrow\ f(x_1)=\dfrac{1}{(x_1+1)\ln^2(x_1+1)}>\dfrac{1}{(x_2+1)\ln^2(x_2+1)}=f(x_2),\\[2ex]
\quad\text{тому}\,f(x)-\nearrow\text{ на }[1;+\infty);\\[2ex]
\bullet\ \displaystyle\int_1^{+\infty}f(x)dx=\int_1^{+\infty}\frac{dx}{(x+1)\ln^2(x+1)}=\int_1^{+\infty}\frac{d\big(\ln(x+1)\big)}{\ln^2(x+1)}=-\frac{1}{\ln(x+1)}\bigg|_1^{+\infty}=\frac{1}{\ln 2}<\infty;
\end{array}\right\}\Rightarrow$$

$\Rightarrow$ ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}y_n=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+1)\cdot\ln^2(n+1)}$ збігається.

Отже, ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|x_n|=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\cdot\ln^2(n+1)}$ збігається (за ознакою порівняння в граничній формі), тому ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n\cdot\ln^2(n+1)}$ збігається абсолютно.

2.2. Розглянемо ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{n\cdot\sqrt[n]{2}}$. *Абсолютна збіжність*:

$$\left|(-1)^n\frac{1}{n\cdot\sqrt[n]{2}}\right|\qquad\overset{n\to\infty}{\sim}\qquad\frac{1}{n}.$$

$$\sum(-1)^n\frac{1}{n\cdot\sqrt[n]{2}}-\text{абс. розб.}\ \underset{\substack{\text{(за ознакою}\\ \text{порівняння}\\ \text{в граничній формі)}}}{\Leftarrow}\ \underset{\text{(як гармонічний ряд)}}{\sum\frac{1}{n}\text{ розбігається}}$$

Збіжність. Застосуємо ознаку Абеля:

$$a_n=\frac{(-1)^n}{n},\quad b_n=\frac{1}{\sqrt[n]{2}};$$

1) ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}$ збігається за ознакою Лейбніца (доведіть ✍!);

2) оскільки $b_n=\left(\frac{1}{2}\right)^{1/n}<b_{n+1}=\left(\frac{1}{2}\right)^{1/(n+1)}$ $\forall n\in\mathbb{N}$, то $\{b_n\}\nearrow$;

3) оскільки $0<b_n=\left(\frac{1}{2}\right)^{1/n}<1\ \forall n\in\mathbb{N}$, то $\{b_n\}$ – обмежена.

Отже, ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n b_n = \sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n \dfrac{1}{n \cdot \sqrt[n]{2}}$ – збігається. Внаслідок його абсолютної збіжності матимемо висновок про умовну збіжність цього ряду.

<u>2.3.</u> Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^n}{n^2 \ln(n+1)}$ збігається абсолютно:

$$\left| \frac{(-1)^n}{n^2 \ln(n+1)} \right| \qquad \le \qquad \frac{1}{n^2 \ln 2} \quad \forall n \ge 1.$$

$$\begin{array}{lll} \sum \dfrac{(-1)^n}{n^2 \ln(n+1)} \text{– абс. зб.} & \Leftarrow & \sum \dfrac{1}{n^2} \text{ збігається} \\ & \text{(за загальною} & \text{(як узагальнений} \\ & \text{ознакою} & \text{гармонічний ряд з показником} \\ & \text{порівняння)} & \text{степеня знаменника } p=2>1\text{)} \end{array}$$

<u>3.1.</u> Знакододатний ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\operatorname{arctg} n}{n^n + n}$ збігається:

$$\left. \begin{array}{l} \text{1) } x_n = \dfrac{\operatorname{arctg} n}{n^n + n} \le \dfrac{\pi/2}{n^n} = y_n \quad \forall n \in \mathbb{N}; \\ \text{2) } \lim\limits_n \sqrt[n]{y_n} = \lim\limits_n \sqrt[n]{\dfrac{\pi/2}{n^n}} = \lim\limits_n \sqrt[n]{\pi/2} \cdot \dfrac{1}{n} = 1 \cdot 0 = 0 = q < 1 \Rightarrow \\ \Rightarrow \sum\limits_{n=1}^{\infty} y_n \text{ –зб. (за радикальною ознакою Коші);} \end{array} \right\} \Rightarrow \left| \begin{array}{l} \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\operatorname{arctg} n}{n^n + n} - \text{зб.} \\ \text{(за загальною} \\ \text{ ознакою} \\ \text{порівняння).} \end{array} \right.$$

<u>3.2.</u> Знакододатний ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left[\dfrac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \right]^2 \cdot \dfrac{1}{n}$ збігається за ознакою Раабе:

$$x_n = \left[\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \right]^2 \cdot \frac{1}{n}, \quad x_{n+1} = \left[\frac{(2n+1)!!}{(2n+2)!!} \right]^2 \cdot \frac{1}{n+1} = \left[\frac{(2n-1)!! \cdot (2n+1)}{(2n)!! \cdot (2n+2)} \right]^2 \cdot \frac{1}{n+1},$$

$$\frac{x_n}{x_{n+1}} = \left[\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \right]^2 \cdot \frac{1}{n} \cdot \left[\frac{(2n)!! \cdot (2n+2)}{(2n-1)!! \cdot (2n+1)} \right]^2 \cdot (n+1) = \left[\frac{(2n+2)}{(2n+1)} \right]^2 \cdot \frac{n+1}{n};$$

$$\lim_n n \cdot \left(\frac{x_n}{x_{n+1}} - 1 \right) = \lim_n n \cdot \left(\left[\frac{(2n+2)}{(2n+1)} \right]^2 \cdot \frac{n+1}{n} - 1 \right) =$$

$$= \lim_n \frac{(2n+2)^2 (n+1) - (2n+1)^2 n}{(2n+1)^2} = \lim_n \frac{8n^2 + 11n + 4}{4n^2 + 4n + 1} = 2 = r > 1.$$

<u>3.3.</u> Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n \dfrac{(n!)^2}{(2n)!}$ збігається абсолютно:

$$\left. \begin{array}{l} \text{1) } |x_n| = \left| (-1)^n \dfrac{(n!)^2}{(2n)!} \right| = \dfrac{(n!)^2}{(2n)!} = y_n; \\ \text{2) } \lim\limits_n \dfrac{y_{n+1}}{y_n} = \lim\limits_n \dfrac{((n+1)!)^2}{(2n+2)!} \cdot \dfrac{(2n)!}{(n!)^2} = \lim\limits_n \dfrac{(n+1)^2}{(2n+1)(2n+1)} = \\ = \dfrac{1}{4} = q < 1 \Rightarrow \sum\limits_{n=1}^{\infty} y_n \text{ –зб. (за ознакою Д'Аламбера);} \end{array} \right\} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{(n!)^2}{(2n)!} - \text{абс. зб.}$$

Результати досліджень координатних рядів відповідають такій схемі:

$$\boxed{\begin{array}{l} x_{3n-2} = \left(\ \ y;\ \ a;\ a\right); \\ x_{3n-1} = \left(\ \ a;\ \ y;\ a\right); \\ x_{3n}\ \ \ = \left(з\oplus;\ з\oplus;\ a\right). \end{array}}$$

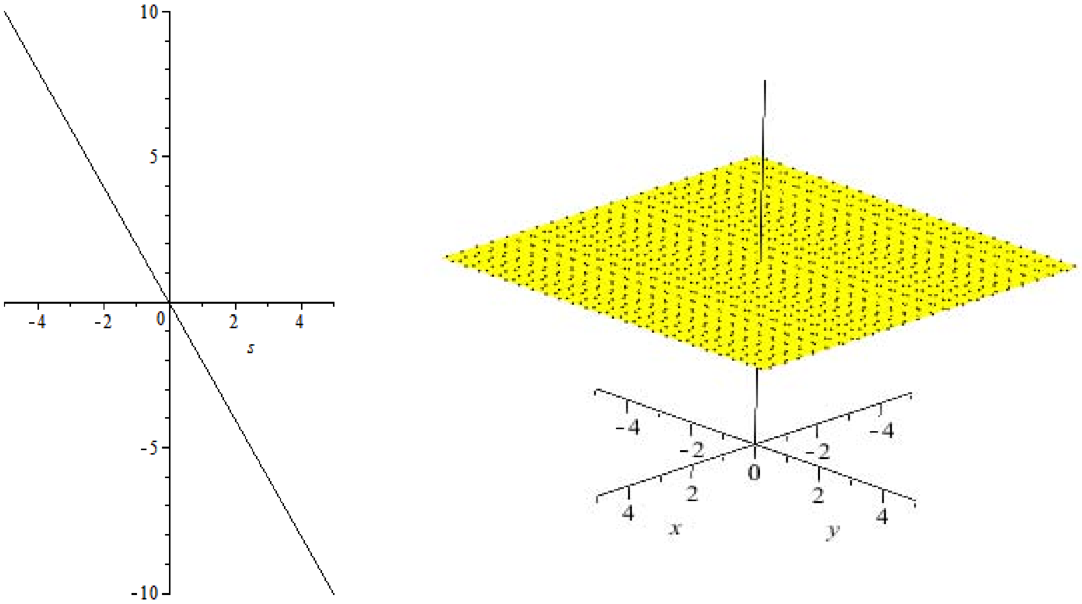
Тут позначка «$з\oplus$» відповідає знакододатному збіжному ряду. Аналогічно задачі II.6 б) можна довести, що в просторі $\mathbb{R}_2^3$

$$OC\left(\sum_{n=1}^{\infty} x_n\right) = \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \{a\},$$

де a дорівнює сумі трьох абсолютно збіжних рядів, що відповідають координатним рядам третього стовпця, тобто

$$a = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n}{n!} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2 \ln(n+1)} + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{(n!)^2}{(2n)!}.$$

На рис. II.1 б) схематично зображено цю множину в декартовому просторі.



а б

Рис. II.1.

Задача II.7. Знайти області граничних точок рядів в скінченновимірних просторах; зробити схематичний рисунок отриманої множини:

а) у $\mathbb{R}_2^2$ $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$:

$$\begin{array}{l} x_{2n-1} = \left(\dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n+(-1)^{n+1}}}; \qquad (-1)^n \dfrac{\operatorname{arctg} 2^n}{2^n} \right); \\ x_{2n} \ \ \ = \left(\cos \pi n \cdot \ln\left(1 + \dfrac{1}{\sqrt{n^3}}\right); \qquad (-1)^n \qquad \right); \end{array}$$

$$x_{3n-2} = \left(\frac{(-1)^{n+1}}{n \cdot \sqrt[5]{3n+1}}; \qquad \frac{\cos \pi n}{n}; \qquad \left(\frac{2n+5}{3n-5}\right)^{n^2} \right);$$

б) у $\mathbb{R}_2^3$ $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n$: $x_{3n-1} = \left(\frac{\cos\frac{\pi n}{3}}{\sqrt{n+5}}; \qquad \frac{2^n n!}{n^n}; \qquad \left(\frac{n-1}{n}\right)^n \cdot \frac{n}{2^n} \right);$

$$x_{3n} = \left(\frac{n!}{(3n)!}; \quad (-1)^n \left(e^{\frac{1}{n^2}} - 1 \right); \quad 2 \cdot (-1)^{n+1} \right).$$

Розв'язання. **а)** 1.1. Подамо загальний член ряду $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n+(-1)^{n+1}}}$ у вигляді:

$$\frac{(-1)^n}{\sqrt{n+(-1)^{n+1}}} = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} \cdot \frac{1}{\sqrt{1+\frac{(-1)^{n+1}}{n}}}.$$

Застосуємо розвинення за формулою Маклорена

$$(1+t)^{-1/2} = 1 - \frac{1}{2}t + o(t)$$

для $t = \frac{(-1)^{n+1}}{n}$, отримаємо:

$$\frac{(-1)^n}{\sqrt{n+(-1)^{n+1}}} = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} \cdot \left(1 - \frac{(-1)^{n+1}}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right) = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} + \frac{1}{2n\sqrt{n}} + o\left(\frac{1}{n\sqrt{n}}\right);$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n+(-1)^{n+1}}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\sqrt{n}} + \sum_{n=1}^{\infty} o\left(\frac{1}{n\sqrt{n}}\right).$$

Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ збігається умовно (доведіть це ✍ !), знакододатний ряд збігається як узагальнений гармонічний з показником степеня знаменника $p = \frac{3}{2} > 1$.

Розглянемо ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} o\left(\frac{1}{n\sqrt{n}}\right)$. Застосуємо ознаку порівняння:

$$\exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall n \geq n_0 \qquad \left| o\left(\frac{1}{n\sqrt{n}}\right) \right| \;\leq\; \frac{1}{n\sqrt{n}}$$

$$\sum_{n=n_0}^{\infty} o\left(\frac{1}{n\sqrt{n}}\right) - \text{абс. зб.} \Leftarrow \sum_{n=n_0}^{\infty} \frac{1}{n\sqrt{n}} - \text{зб.}$$

Оскільки скінченна кількість членів не впливає на збіжність ряду, то і ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} o\left(\frac{1}{n\sqrt{n}}\right)$ абсолютно збігається.

Отже, ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt{n+(-1)^{n+1}}}=\underset{\substack{\text{умовно}\\ \text{збіжний}}}{\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}}+\frac{1}{2}\underset{\substack{\text{знакододатний}\\ \text{збіжний}}}{\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\sqrt{n}}}+\underset{\substack{\text{абсолютно}\\ \text{збіжний}}}{\sum_{n=1}^{\infty}o\left(\frac{1}{n\sqrt{n}}\right)}$$

є умовно збіжним.

1.2. Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{\operatorname{arctg}2^n}{2^n}$ абсолютно збігається:

$$\left.\begin{array}{l}1)\ |x_n|=\left|(-1)^n\frac{\operatorname{arctg}2^n}{2^n}\right|\le\frac{\pi/2}{2^n}=y_n\quad\forall n\in\mathbb{N};\\ 2)\ \lim\limits_{n}\sqrt[n]{y_n}=\lim\limits_{n}\sqrt[n]{2\frac{\pi/2}{n^n}}=\lim\limits_{n}\sqrt[n]{\pi/2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{2}<1\Rightarrow\\ \Rightarrow\sum\limits_{n=1}^{\infty}y_n\text{ –зб. (за радикальною ознакою Коші);}\end{array}\right\}\Rightarrow\left|\begin{array}{l}\sum\limits_{n=1}^{\infty}x_n=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\operatorname{arctg}2^n}{2^n}-\text{зб.}\\ \text{(за загальною ознакою}\\ \text{порівняння)}\Rightarrow\\ \sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{\operatorname{arctg}2^n}{2^n}\ -\text{абс. зб.}\end{array}\right.$$

2.1. Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\cos\pi n\cdot\ln\left(1+\frac{1}{\sqrt{n^3}}\right)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\cdot\ln\left(1+\frac{1}{\sqrt{n^3}}\right)$ збігається абсолютно:

$$\underset{\sum(-1)^n\cdot\ln\left(1+\frac{1}{\sqrt{n^3}}\right)-\text{абс. зб.}}{\left|(-1)^n\cdot\ln\left(1+\frac{1}{\sqrt{n^3}}\right)\right|}\quad\underset{\substack{\Leftarrow\\ \text{(за ознакою}\\ \text{порівняння}\\ \text{в граничній формі)}}}{\overset{n\to\infty}{\sim}}\quad\underset{\substack{\sum\frac{1}{n^{3/2}}\text{ збігається}\\ \text{(як узагальнений}\\ \text{гармонічний ряд з показником}\\ \text{степеня знаменника } p=3/2>1)}}{\frac{1}{n^{3/2}}}.$$

Результати досліджень координатних рядів відповідають такій схемі:

$$\boxed{\begin{array}{l}x_{2n-1}=\left(\ y;\quad a\ \right);\\ x_{2n}\ \ =\left(\ a;\ (-1)^n\right).\end{array}}$$

Отже, в просторі $\mathbb{R}_2^2$

$$O\Gamma T\left(\sum_{n=1}^{\infty}x_n\right)=\mathbb{R}\times\{a+\mathbb{Z}\}=\{(x,a+n):x\in\mathbb{R},n\in\mathbb{Z}\},$$

де a дорівнює сумі абсолютно збіжного ряду, що відповідає першому рядку, другому стовпцю в схемі, тобто $a=\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{\operatorname{arctg}2^n}{2^n}$.

На рис. II.2 а) схематично зображено цю множину на декартовій площині.

б) 1.1. Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n\cdot\sqrt[5]{3n+1}}$ збігається абсолютно:

$$\left|\frac{(-1)^{n+1}}{n\cdot\sqrt[5]{3n+1}}\right| \quad \overset{n\to\infty}{\sim} \quad \frac{1}{3^{1/5}n^{6/5}}.$$

$\sum\frac{(-1)^{n+1}}{n\cdot\sqrt[5]{3n+1}}$ –абс. зб. $\Leftarrow$ (за ознакою порівняння в граничній формі) $\sum\frac{1}{n^{6/5}}$ збігається (як узагальнений гармонічний ряд з показником степеня знаменника $p=6/5>1$)

1.2. Ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos\pi n}{n}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}$ збігається умовно. (Довести самостійно ✍!)

1.3. Знакододатний ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2n+5}{3n-5}\right)^{n^2}$ збігається за радикальною ознакою Коші:

$$\lim_n\sqrt[n]{y_n}=\lim_n\sqrt[n]{\left(\frac{2n+5}{3n-5}\right)^{n^2}}=\lim_n\left(\frac{2n+5}{3n-5}\right)^n=\left\|\left(\frac{2}{3}\right)^{+\infty}\right\|=0=q<1.$$

2.1. Ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos\frac{\pi n}{3}}{\sqrt{n+5}}$ збігається умовно. Це доводиться аналогічно ряду $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos(n/3)}{\sqrt[3]{n+5}}$, дослідження якого проведено вище.

2.2. Знакододатний ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n n!}{n^n}$ збігається (див. задачу II.1 а).

2.3. Знакододатний ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n-1}{n}\right)^n\cdot\frac{n}{2^n}$ збігається за радикальною ознакою Коші:

$$\lim_n\sqrt[n]{y_n}=\lim_n\frac{\overbrace{n-1}^{\to 1}}{n}\cdot\frac{\overbrace{\sqrt[n]{n}}^{\to 1}}{2}=\frac{1}{2}=q<1.$$

3.1. Знакододатний ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{(3n)!}$ збігається за ознакою Д’Аламбера:

$$\lim_n\frac{y_{n+1}}{y_n}=\lim_n\frac{(n+1)!}{(3n+3)!}\cdot\frac{(3n)!}{n!}=\lim_n\frac{n+1}{(3n+1)(3n+2)(3n+3)}=0=q<1.$$

3.2. Ряд $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left(e^{\frac{1}{n^2}}-1\right)$ збігається абсолютно:

$$\left|(-1)^n\left(e^{\frac{1}{n^2}}-1\right)\right| \quad \overset{n\to\infty}{\sim} \quad \frac{1}{n^2}.$$

$\sum(-1)^n\left(e^{\frac{1}{n^2}}-1\right)$ –абс. зб. $\Leftarrow$ (за ознакою порівняння в граничній формі) $\sum\frac{1}{n^2}$ збігається (як узагальнений гармонічний ряд з показником степеня знаменника $p=2>1$)

Результати досліджень координатних рядів відповідають такій схемі:

$$\boxed{\begin{array}{l} x_{3n-2} = (\ \ a; \quad y; \quad \text{з}\oplus \ ); \\ x_{3n-1} = (\ \ y; \quad \text{з}\oplus; \quad \text{з}\oplus \ ); \\ x_{3n} \ \ = \left(\text{з}\oplus; \quad a; \ \ 2\cdot(-1)^n \right). \end{array}}$$

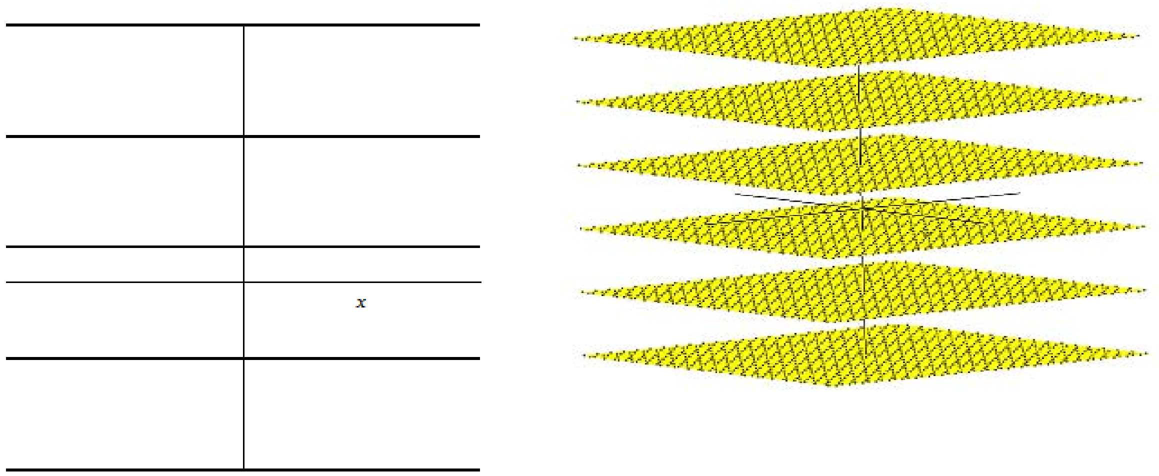
Отже, в просторі $\mathbb{R}_2^3$

$$\text{ОГТ}\left(\sum_{n=1}^{\infty} x_n \right) = \mathbb{R}\times\mathbb{R}\times\{a+2\mathbb{Z}\} = \left\{ (x, y, a+2n) : x\in\mathbb{R}, y\in\mathbb{R}, n\in\mathbb{Z} \right\},$$

де a дорівнює сумі знакодадатних збіжних рядів, що відповідають другому стовпцю (перший і другий рядок) в схемі, тобто

$$a = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2n+5}{3n-5} \right)^{n^2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n-1}{n} \right)^{n} \cdot \frac{n}{2^n}.$$

На рис. II.2 б) схематично зображено цю множину в декартовому просторі.



а) б)

Рис. 2.4.

ВИСНОВКИ

Ряди різної природи – числові, функціональні, векторні – застосовуються в різних розділах математики при розв’язанні багатьох прикладних задач. Різні фізичні процеси моделюються диференціальними та інтегральними рівняннями, розв’язок яких у значній кількості випадків подається рядами в різних банахових просторах, як правило, це $C(X)$ або $L_p(X,\Sigma,\mu)$, залежно від вимог задачі. При різних перетвореннях у ході розв’язування виникає необхідність переставлення членів ряду. При цьому може виникнути небезпека відхилення від початкового розв’язку у разі умовної збіжності ряду. З теореми Штейніца та її аналогів у нескінченновимірних просторах випливає, що для рядів, які умовно збігаються, це відхилення може бути достатньо великим. Тому дуже важливо вміти точно визначати тип збіжності ряду.

Окреслені в цьому посібнику проблеми є частиною розділу математики, що активно розвивається. Це розділ, пов'язаний з переставленнями рядів у банахових просторах і суміжними з ним розділами. Цим проблемам присвятили свої дослідження такі учені: В.М. Кадець, М.І. Кадець, В.П. Фонф, М.І. Островський, Є.М. Нікішин, В.С. Грінберг, С.А. Чобанян та ін. Багато проблем, пов'язаних з сильною збіжністю рядів та їх переставлень у банахових просторах, оформлені стрункою теорією і досить добре вивчені. Проте залишається багато невирішених проблем, наприклад, пов'язаних із слабкою збіжністю і збіжністю за Чезаро та ін. Тому для молодих дослідників у цій галузі відкрито багато шляхів для розвитку.

РЕКОМЕНДОВАНА ЛІТЕРАТУРА

Основна:

1. *Кадец В.М.* Перестановки рядов в пространствах Банаха / *В.М. Кадец, М.И. Кадец.* – Тарту: ТГУ, 1988. – 360 с.
2. *Колмогоров А.Н.* Элементы теории функций и функционального анализа / *А.Н. Колмогоров, С.В. Фомин.* – М.: Наука,1989. – 624 с.
3. *Канторович Л.В.* Функциональный анализ / *Л.В. Канторович, Г.П. Акилов.* – М.: Наука, 1984. – 752 с.
4. *Фихтенгольц Г.М.* Курс дифференциального и интегрального исчисления: В 3-х т. / *Г.М. Фихтенгольц.* – Т.2. – М.: Наука, 1966. – 800 с.

Додаткова:

5. *Ильин В.А.* Математический анализ. Продолжение курса анализ / *В.А. Ильин, В.А. Садовничий, Бл.Х. Сендов.* – М.: Изд-во МГУ, 1987. – 358 с.
6. *Демидович Б.П.* Сборник задач и упражнений по математическому анализу / *Б.П. Демидович.* – М.: Наука, 1990. – 624 с.
7. *Берман Г.Н.*[1] Сборник задач по курсу математического анализа / *Г.Н. Берман.* – М.: Наука, 1985. – 383 с.
8. *Никольский С.М.* Курс математического анализа / *С.М. Никольский.* – Т.1. – 1990. – 528 с.; Т.2. – 1991. – 543 с.
9. *Кудрявцев Л.Д.*[1] Сборник задач по математическому анализу. Т.2 Интегралы. Ряды / *Л.Д. Кудрявцев, А.Д. Кутасов и др.* – М.: Наука, 1986. – 528 с.
10. *Ильин В.А.*[1] Основы математического анализа: В 2 ч. / *В.А. Ильин, Э.Г. Позняк.* – М.: Физматлит. – Ч.1.–2005. – 648 с.; Ч.2. – 2002. – 464 с.
11. *Ильин В.А.*[1] Основы математического анализа: В 2 ч. / *В.А. Ильин, Э.Г. Позняк.* – М.: Наука. – Ч.1. – 1982. – 616 с.; Ч.2. – 1980. – 447 с.
12. *Ляшко И.И.* Математический анализ в примерах и задачах / И.И. Ляшко, А.К. Боярчук, Я.Г. Гай, Г.П. Головач. – К.: Вища школа. – Ч. 2. – 1977. – 672 с.

Інформаційні ресурси

13. http://sites.znu.edu.ua/bank/index.php?action=url/view&url_id=3872
14. http://sites.znu.edu.ua/bank/public_files/2010/10/3872_1227961400_Ryadi_skinch_banah_prost_41_st_met_mater_zabesp_samost_rab.pdf
15. http://kma-znu.ucoz.ru/index/uchebnaja_literatura/0-49
16. http://eqworld.ipmnet.ru/ru/library/mathematics/calculus.htm
17. http://www.newlibrary.ru/genre/nauka/matematika/matematicheskii_analiz/
18. http://www.twirpx.com/files/mathematics/algebra/analysis/
19. http://techlibrary.ru/
20. http://sites.znu.edu.ua/bank/public_files/2009/10/matanaliz/05_metod_SAM_rab.htm

---

[1] http://techlibrary.ru/

Додаток А

Довідковий матеріал

Абель Нільс Генрік (1802-1829) – норвезький математик. Довів нерозв'язність у радикалах загальних алгебраїчних рівнянь п'ятого й вищих степенів. Знайшов функції, що не інтегруються в елементарних функціях, завдяки цьому відкрив еліптичні та гіперболічні функції. Дослідив інтеграли, які були названі на його честь абелевими. Інші важливі праці вченого належать до теорії рядів.

Банах Стефан (1892-1945) – польський математик, професор Львівського університету, декан фізико-математичного факультету цього університету. Член Польской АН и член-кореспондент АН УРСР. Є одним із засновників сучасного функціонального аналізу та Львівської математичної школи. Довів теорему про відкрите відображення та ряд інших теорем.

Польське математичне товариство заснувало премію ім. Банаха, його іменем названо вулиці в різних містах. При Інституті математики Польської АН у 1972 році був створений Міжнародний математичний центр ім. Стефана Банаха. А на честь сторіччя від дня народження встановлена Медаль ім. С. Банаха за визначні досягнення в галузі математики.

Гаусс Йоганн Карл Фрідрих (1777-1855) – видатний німецький математик, астроном, фізик, вважається «королем математиків». Лауреат медалі Коплі, член Шведської та Російської АН, Лондонського королівського товариства.

З ім'ям Гаусса пов'язані майже всі фундаментальні дослідження у багатьох фундаментальних розділах математики: алгебра, диференціальна та неевклідова геометрія, математичний аналіз, теорій функції комплексної змінної, теорія ймовірностей.

Д'Аламбер Жан Лерон (1717-1783) – видатний французький вчений-енциклопедист, філософ, математик та механік. Член Паризької, Французької, Петербургської АН. Його праці було присвячено диференціальному численню, теорії нескінченно малих, динаміці, геометрії. В теорії рядів його ім'ям називається достатня ознака збіжності. Основні його дослідження належать до теорії диференціальних рівнянь, які пізніше, на ряду з роботами Л. Ейлера та Д. Бернуллі, стали основою математичної фізики.

Лагранж Жозеф-Луї (1736-1813) – французький математик, фізик і астроном італійського походження. Член та президент Берлінської АН, іноземний почесний член Петербурзької АН, член Бюро довгот в Парижі. Працював у багатьох галузях математики, розвинув нову галузь – варіаційне числення, зробив великий внесок в теорію диференціальних рівнянь і методів апроксимації функції.

Лежен-Діріхле Йоганн Петер Густав (1805-1859) німецький математик, відомий значним внеском до математичного аналізу, теорії функцій комплексної змінної та теорії чисел.

Коші Огюстен Луи (1789-1857) – великий французький математик, член Паризької та Петербургської АН та Лондонського королівського товариства. Розробив фундамент математичного аналізу, зробив великий внесок в аналіз, алгебру, математичну фізику й інші розділи математики.

Лейбніц Готфрид Вильгельм (1646-1716) – видатний німецький математик, філософ, логік, фізик, юрист, історик, дипломат, винахідник і мовознавець. Він є засновником і першим президентом Берлінської АН, член Французької АН.

Незалежно від Ньютона поклав початок диференціальному та інтегральному численню, яке ґрунтувалося на нескінченно малих; створив комбінаторику як науку; заклав основи математичної логіки; описав двійкову систему числення та багато іншого.

Макло́рен Колін (1698-1746) – видатний англійський математик. Уже у віці 15 років він довід декілька теорем. У 1719 році Коліна було обрано членом Лондонського королівського товариства за його два мемуари, що були присвячені теорії кривих.

Марцинкевич Юзеф (1910-1940) –польський математик, автор робіт в галузі математичного аналізу. Автор «теореми Марцинкевича». В Польщі в пам’ять Марцинкевича молодим математикам щорічно присуджується премія його імені за кращу роботу.

Раабе Йозеф Людвиг (1801-1859) – швейцарський математик. Народився 15 травня 1801 року в українському місті Броди. Займався аналізом нескінченно малих величин, теорією функцій та рядів.

Ріман Георг Фрідріх Бернгард (1826-1866) – німецький математик. У роботах з аналітичної теорії чисел дослідив властивості дзета-функції та показав її зв’язок із розподілом простих чисел. Слідом за Коші розглянув формалізацію поняття «інтеграл» і ввів своє визначення – інтеграл Рімана.

Хан Ханс (Ганс) (1879-1934) – австрійський математик, який зробив внесок у розвиток функціонального аналізу, топології, теорії множин, варіаційного числення та теорії порядку. В основному відомий завдяки теоремі Хана-Банаха та теоремі про рівномірну обмеженість (теорема Банаха-Штейнгауза, яку довів незалежно від цих вчених). Також до його творчої скарбнички належать теорема Хана про розклад, теорема Хана про включення, теорема Хана-Колмогорова, теорема Хана-Мазуркевича, теорема Віталі-Хана-Сакса.

ПРЕДМЕТНИЙ ПОКАЖЧИК

СПИСОК УМОВНИХ ПОЗНАЧЕНЬ

$\overset{def}{\Leftrightarrow}$ – позначення, яке слід читати так: «якщо за означенням…» або «називається за означенням…».

$\overset{def}{=}$ – рівність за означенням; величина, що визначається, стоїть у лівій частині рівності

🗐 – повторити

🗁 – означення

■ – завершення доведення твердження чи розв'язання прикладу

☝ – зверніть увагу, запам'ятайте!

✍ – виконати завдання самостійно

$\exists$ – квантор існування

$\forall$ – квантор загальності

$\wedge$ – логічна операція, кон'юнкція

$\vee$ – логічна операція, диз'юнкція

$\left.\begin{matrix}\Rightarrow,\\ \Leftarrow\end{matrix}\right\}$ – логічна імплікація

$\Leftrightarrow$ – логічна еквівалентність (рівносильність)

$\bigcup$ – множинна операція, об'єднання

$\bigcap$ – множинна операція, перетин

$\in$ – символ належності елемента деякій множині

$\varnothing$ - порожня множина

$\mathbb{R}$ – множина дійсних чисел

$\mathbb{Z}$ – множина цілих чисел

$\mathbb{Q}$ – множина раціональних чисел

$\mathbb{N}$ – множина натуральних чисел

$\nearrow$ – зростаюча функція (послідовність)

$\searrow$ – спадна функція (послідовність)

$x_n \to a$ – послідовність $\{x_n\}$ прямує (збігається) до a

$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$ – границя послідовності $\{x_n\}$ дорівнює a

$\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n$ – ряд із елементів x_n банахового простору

зб. або збіг. – читається так: «ряд збігається»

розб. – читається так: «ряд розбігається»

абс. – читається так: «абсолютно»

обм. – читається так: «обмежений(-а)»

$OC\left(\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n\right)$ – область сум ряду $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n$ в банаховому просторі

$O\Gamma T\left(\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n\right)$ – область граничних точок ряду $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n$ в банаховому просторі

Навчальне видання
(українською мовою)

Д’ЯЧЕНКО НАТАЛІЯ МИКОЛАЇВНА
ТКАЧЕНКО ІРИНА ГРИГОРІВНА

РЯДИ В СКІНЧЕННОМІРНИХ БАНАХОВИХ ПРОСТОРАХ

Навчальний посібник
для студентів напряму підготовки «Математика»
спеціалізації «Математичний аналіз»

Рецензент П.Г. Стєганцева
Відповідальний за випуск Н.М. Д’яченко
Коректор Н.М. Д’яченко