

# Змістовий модуль 1. Основні поняття ймовірності та статистики подій

## Лекція 1.1. Основні поняття ймовірності.

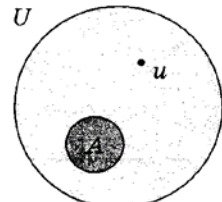
План:

1. Означення ймовірностей подій.
2. Типи елементарних подій.
3. Алгебра випадкових подій.
4. Теорія ймовірності

<b>ПОНЯТТЯ ЙМОВІРНОСТІ ВИПАДКОВОЇ ПОДІЇ</b>				
<b>ВИПАДКОВІ ЕКСПЕРИМЕНТИ ТА ВИПАДКОВІ ПОДІЇ</b>				
Подію, яка може відбутися, а може і не відбутися в процесі спостереження або експерименту в одних і тих самих умовах, називають <i>випадковою подією</i> (а сам експеримент — <i>випадковим експериментом</i> ).				
<b>ПРИКЛАД 1</b>				
Випадання «герба», випадання «числа» при підкиданні монети, виграш у лотерею, випадання певної кількості очок при підкиданні грального кубика тощо.				
<b>ЧАСТОТА ТА ВІДНОСНА ЧАСТОТА ВИПАДКОВОЇ ПОДІЇ</b>				
<p>Якщо при незмінних умовах проведено <math>n</math> випадкових експериментів і в <math>n(A)</math> випадків відбулася подія <math>A</math>, то число <math>n(A)</math> називають <i>частотою події <math>A</math></i></p> <p><i>Відносною частотою випадкової події</i> називають відношення числа появ цієї події до загального числа проведених експериментів, тобто відношення <math>\frac{n(A)}{n}</math>.</p>	<b>ПРИКЛАД 2</b>			
	Подія $A$ — випадання «герба» при підкиданні монети.			
	Експериментатор	Бюффон	Пірсон	Феллер
	Кількість $n$ експериментів	4040	24 000	10 000
	Частота $n(A)$	2048	12 012	4979
Відносна частота	0,5069	0,5005	0,4979	
<b>СТАТИСТИЧНЕ ПОНЯТТЯ ЙМОВІРНОСТІ</b>				
Якщо при проведенні великої кількості випадкових експериментів, у кожному з яких може відбутися або не відбутися подія $A$ , значення відносної частоти близькі до деякого певного числа, то це число називають <i>ймовірністю випадкової події <math>A</math></i> . Позначають $P(A)$ так: $0 \leq P(A) \leq 1$ :				
<b>ПРИКЛАД 3</b>				
Подія $A$ — випадання «герба» при підкиданні монети: $P(A) = 0,5$ .				

Приклад народження хлопчика і дівчинки.

Подія  $A$  – народження дівчинки

<p><b>Вірогідна подія</b> — це подія <math>U</math>, яка обов'язково відбувається при кожному повторенні експерименту:</p> $P(U) = 1$	<p style="text-align: center;"><b>ПРИКЛАД 4</b></p> <p>Випадання менше 7 очок при підкиданні звичайного грального кубика (на гранях якого позначено від 1 до 6 очок)</p>
<p><b>Неможлива подія</b> (її часто позначають <math>\emptyset</math>) не відбувається ні при якому повторенні експерименту:</p> $P(\emptyset) = 0$	<p style="text-align: center;"><b>ПРИКЛАД 5</b></p> <p>Випадання 7 очок при підкиданні звичайного грального кубика</p>
<p><b>КЛАСИЧНЕ ОЗНАЧЕННЯ ЙМОВІРНОСТІ</b></p>	
<p>Для рівноможливих елементарних подій (тобто подій, імовірність яких однакова) імовірність події <math>A</math> — це відношення числа сприятливих для неї подій (<math>m</math>) до числа всіх рівноможливих подій (<math>n</math>) у даному експерименті:</p> $P(A) = \frac{m}{n}$	
<p><b>ПРИКЛАД 6</b></p>	
<p>Знайдіть імовірність випадання числа очок, кратного трьом, при підкиданні грального кубика.  <i>Розв'язання.</i> Розглянемо як елементарні події шість рівноможливих результатів підкидання кубика — випадання 1, 2, 3, 4, 5 або 6 очок (події попарно несумісні, і в результаті експерименту обов'язково відбудеться одна із цих подій, отже, у цій задачі <math>n = 6</math>).          Подія <math>A</math> — випадання числа очок, кратного трьом. Сприятливими для події <math>A</math> є тільки дві елементарні події — випадання 3 або 6 очок (тобто <math>m = 2</math>). Тоді:</p> $P(A) = \frac{m}{n} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$	
<p><b>НЕЗАЛЕЖНІ ВИПРОБУВАННЯ. СХЕМА БЕРНУЛЛІ</b></p>	
<p>Взаємно незалежними називають випробування, у яких імовірність результату кожного з них не залежить від того, які результати має чи матиме решта випробувань.          Якщо імовірність здійснення події <math>A</math> в кожному випробуванні однакова і дорівнює <math>p</math>, а імовірність нездійснення події <math>A</math> — <math>q = 1 - p</math>, то імовірність <math>P_{m,n}</math> того, що подія <math>A</math> відбудеться <math>m</math> разів у цих <math>n</math> випробуваннях, може бути обчислена за формулою:</p> $P_{m,n} = C_n^m p^m q^{n-m} = \frac{n!}{m!(n-m)!} p^m q^{n-m}$	
<p><b>ГЕОМЕТРИЧНЕ ОЗНАЧЕННЯ ЙМОВІРНОСТІ</b></p>	
<p><b>ОСНОВНІ ПОНЯТТЯ</b></p>	
	<p><math>U</math> — деяка фігура на площині;  <math>S(U)</math> — площа фігури <math>U</math>  <b>Експеримент</b> — це випадковий вибір якоїсь точки <math>u</math> з фігури <math>U</math> (можна також вважати, що точку <math>u</math> випадково кинули на фігуру <math>U</math>).  <b>Елементарні події <math>u</math></b> — це точки фігури <math>U</math>. <math>A</math> — частина фігури <math>U</math> (<math>A \subseteq U</math>); <math>S(A)</math> — площа фігури <math>A</math>.</p>
<p>Подія <math>A</math> — попадання точок <math>u</math> у фігуру <math>A</math>. Тоді <i>сприятливими елементарними подіями для події <math>A</math> будуть усі точки фігури <math>A</math></i>. (Припускаємо, що імовірність попадання точки в частину фігури <math>U</math> пропорційна площі цієї частини і не залежить від її конфігурації та розміщення відносно фігури <math>U</math>.)</p>	
<p><b>ОЗНАЧЕННЯ ГЕОМЕТРИЧНОЇ ЙМОВІРНОСТІ</b></p>	
$P(A) = \frac{S(A)}{S(U)}$	<p><i>Геометричною імовірністю події <math>A</math></i> називають відношення площі фігури, сприятливої для події <math>A</math>, до площі всієї заданої фігури.</p>

### I. ЗАВДАННЯ З ВИБОРОМ ОДНІЄЇ ПРАВИЛЬНОЇ ВІДПОВІДІ

1. Із букв, написаних на окремих картках, склали слово *МАТЕМАТИКА*. Потім ці картки поміняли місцями, перетасували та взяли навмання одну з них. Яка ймовірність того, що це буде картка з буквою А?

А	Б	В	Г	Д
0,1	0,2	0,3	0,4	0,5

*Розв'язання*

Нехай подія А — узяття навмання буква А. Усього рівноможливих елементарних подій 10; подій, що сприяють події А, — 3, тому  $P(A) = \frac{3}{10} = 0,3$ .

*Відповідь:* В.

2. У коробці лежать різнокольорові кульки, з яких 40 — червоні, 20 — коричневі, а решта — жовті. З'ясуйте, скільки жовтих кульок лежить у коробці, якщо ймовірність вибору випадковим чином жовтої кульки дорівнює  $\frac{1}{3}$ .

А	Б	В	Г	Д
20	30	60	120	180

*Розв'язання*

Нехай у коробці  $x$  жовтих кульок. Тоді за умовою задачі  $P(A) = \frac{1}{3}$ , де подія А — вибрано жовту

кульку. Оскільки  $P(A) = \frac{x}{40+20+x} = \frac{x}{60+x}$ , то  $\frac{x}{60+x} = \frac{1}{3}$ . Звідси  $3x = 60 + x$  або  $2x = 60$ ,  $x = 30$ .

*Відповідь:* Б.