

Міністерство освіти і науки України
Запорізька державна інженерна академія

А. В. Банах
Т. В. Черненко

ОПР МАТЕРІАЛІВ

Навчально-методичний посібник

*для студентів ЗДІА інженерних спеціальностей
денної та заочної форм навчання*

Міністерство освіти і науки України
Запорізька державна інженерна академія

*Рекомендовано до видання
на засіданні Науково-методичної ради ЗДІА,
протокол № ____ від 18.05.2017 р.*

ОПР МАТЕРІАЛІВ

Навчально-методичний посібник

*для студентів ЗДІА інженерних спеціальностей
денної та заочної форм навчання*

*Рекомендовано до видання
на засіданні кафедри МБГ,
протокол № 7 від 04.05.2017 р.*

Запоріжжя
ЗДІА
2017

А. В. Банах, кандидат технічних наук, доцент

Т. В. Черненко, асистент

Відповідальний за випуск: *зав. кафедри МБГ,
докт. техн. наук В. Б. Ткаченко*

Рецензенти:

В. В. Кулябко, професор, доктор технічних наук, професор кафедри металевих, дерев'яних і пластмасових конструкцій Державного вищого навчального закладу «Придніпровська державна академія будівництва і архітектури», дійсний член Академії будівництва України, дійсний член Міжнародної академії безпеки життєдіяльності

А. В. Пожуєв, доцент, кандидат фізико-математичних наук, завідувач кафедрою природничих наук Запорізької державної інженерної академії

Банах А. В.

Черненко Т. В.

Опір матеріалів: Навчальний посібник для студентів ЗДІА інженерних спеціальностей денної та заочної форм навчання / А. В. Банах, Т. В. Черненко; Запорізька державна інженерна академія. – Запоріжжя: ЗДІА, 2017. – 265 с.

Навчально-методичний посібник призначений для студентів інженерних спеціальностей, які виконують розрахунково-графічні або контрольні завдання з дисципліни «Опір матеріалів», у тому числі в якості самостійної роботи. Посібник містить базові теми необхідного матеріалу, який розглядається на лекціях з прикладами розв'язання практичних задач, призначені також для самостійного опрацювання, контрольні запитання та список рекомендованої літератури.

ЗМІСТ

ПЕРЕЛІК УМОВНИХ СКОРОЧЕНЬ	6
ВСТУП. ОСНОВНІ ПОНЯТТЯ ТА ВИЗНАЧЕННЯ	7
1 ГЕОМЕТРИЧНІ ХАРАКТЕРИСТИКИ ПЛОСКИХ ПЕРЕРІЗІВ	14
1.1 Дослідження геометричних характеристик складного перерізу	20
1.2 Завдання до самостійної роботи за темою 1	27
1.3 Контрольні запитання за темою 1	29
2 ЦЕНТРАЛЬНЕ РОЗТЯГАННЯ АБО СТИСКАННЯ СТЕРЖНІВ	30
2.1 Визначення зусиль, напружень і деформацій при центральному розтяганні або стисканні	34
2.2 Розрахунки при центральному розтяганні або стисканні з урахуванням власної ваги стержня	39
2.3 Розрахунки при центральному розтяганні або стисканні статично невизначених стержнів	45
2.4 Урахування впливу нагрівання при розрахунках на центральне розтягання або стискання	51
2.5 Розрахунок статично невизначених стержневих систем	58
2.6 Завдання до самостійної роботи за темою 2	64
2.7 Контрольні запитання за темою 2	69
3 КРУЧЕННЯ СТЕРЖНІВ КРУГЛОГО ПОПЕРЕЧНОГО ПЕРЕРІЗУ	70
3.1 Проектування валу з умов міцності та жорсткості	74
3.2 Визначення зусиль, напружень і деформацій статично невизначеного валу	82
3.3 Завдання до самостійної роботи за темою 3	88
3.4 Контрольні запитання за темою 3	91
4 ДОСЛІДЖЕННЯ ЕЛЕМЕНТУ МАТЕРІАЛУ, ЩО ЗНАХОДИТЬСЯ У ПЛОСКОМУ НАПРУЖЕНОМУ СТАНІ	92
4.1 Дослідження напруженого та деформованого стану елемента	

матеріалу, що знаходиться в умовах плоского напруженого стану	96
4.2 Завдання до самостійної роботи за темою 4	103
4.3 Контрольні запитання за темою 4	105
5 РОЗРАХУНОК БАЛОК ПРИ ПЛОСКОМУ ПОПЕРЕЧНОМУ ЗГИНАННІ	106
5.1 Проектування консольної балки при плоскому поперечному згинанні	116
5.2 Розрахунок шарнірно опертої балки при плоскому поперечному згинанні	128
5.3 Завдання до самостійної роботи за темою 5	135
5.4 Контрольні запитання за темою 5	138
6 ЕНЕРГЕТИЧНІ МЕТОДИ ВИЗНАЧЕННЯ ДЕФОРМАЦІЙ ПРИ ПЛОСКОМУ ПОПЕРЕЧНОМУ ЗГИНАННІ	139
6.1 Визначення прогинів і кутів повороту перерізів шарнірно опертої балки	143
6.2 Визначення прогинів і кутів повороту перерізів консольної балки	152
6.3 Завдання до самостійної роботи за темою 6	157
6.4 Контрольні запитання за темою 6	159
7 РОЗРАХУНОК БАГАТОПРОЛЬОТНИХ НЕРОЗРІЗНИХ БАЛОК	160
7.1 Розрахунок статично невизначеної консольної балки за допомогою рівняння трьох моментів	164
7.2 Розрахунок багатопрольотної нерозрізної балки на міцність і жорсткість	170
7.3 Завдання до самостійної роботи за темою 7	186
7.4 Контрольні запитання за темою 7	189
8 ПОЗАЦЕНТРОВЕ РОЗТЯГАННЯ АБО СТИСКАННЯ	190
8.1 Розрахунок на міцність і побудова ядра перерізу при позацентровому розтяганні або стисканні	195
8.2 Завдання до самостійної роботи за темою 8	200
8.3 Контрольні запитання за темою 8	202

9 КОСЕ ЗГИНАННЯ	203
9.1 Розрахунок на міцність при косому згинанні	207
9.2 Завдання до самостійної роботи за темою 9	214
9.3 Контрольні запитання за темою 9	217
10 ЗГИНАННЯ З КРУЧЕННЯМ ВАЛІВ КРУГЛОГО ПОПЕРЕЧНОГО ПЕРЕРІЗУ	218
10.1 Проектування валу при згинанні з крученням	221
10.2 Завдання до самостійної роботи за темою 10	229
10.3 Контрольні запитання за темою 10	231
11 СТІЙКІСТЬ СТИСНУТИХ СТЕРЖНІВ	232
11.1 Визначення критичної стискаючої сили при поздовжньому згинанні	239
11.2 Проектування стиснутого стержня при поздовжньому згинанні	242
11.3 Завдання до самостійної роботи за темою 11	247
11.4 Контрольні запитання за темою 11	249
ЗАПИТАННЯ ДО ПІДСУМКОВОГО КОНТРОЛЮ ЗНАНЬ	250
ПЕРЕЛІК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ	257
РЕКОМЕНДОВАНА ЛІТЕРАТУРА	258
ДОДАТОК А. Основний сортамент сталених прокатних профілів	259

ПЕРЕЛІК УМОВНИХ СКОРОЧЕНЬ

АЧХ – амплітудно-частотна характеристика
БК – будівельні конструкції
БМ – будівельна механіка
ВСФ – внутрішні силові фактори
ГЗС – геометрично змінювана система
ДМ – деталі машин
ДМР – деформаційний метод розрахунку
ЕНС – еквівалентний напружений стан
ЗБК – залізобетонні конструкції
ЗСФ – зовнішні силові фактори
ЛНС – лінійний напружений стан
МДТТ – механіка деформованого твердого тіла
МГС – метод граничних станів
МК – металеві конструкції
МП – метод перерізів
МСЕ – метод скінчених елементів
МСС – механіка суцільних середовищ
НДС – напружено-деформований стан
ОМ – опір матеріалів
ОНС – об'ємний напружений стан
ПНС – плоский напружений стан
СВС – статично визначена система
СНС – статично невизначена система
ССН – ступінь статичної невизначеності
ТММ – теорія машин і механізмів
ТПП – теорія пружності та пластичності
ТТМ – теоретична та технічна механіка

ВСТУП

ОСНОВНІ ПОНЯТТЯ ТА ВИЗНАЧЕННЯ

Опір матеріалів – це розділ механіки, який вивчає, вдосконалює та створює інженерні методи розрахунку елементів конструкцій на міцність, жорсткість і стійкість, а також всебічно досліджує їх роботу під навантаженням.

Інженерні методи розрахунку, на відміну від чисельних і математичних, прості у використанні й не потребують застосування для обчислень комп'ютерної техніки або складних математичних викладок. В той же час, інженерні методи дозволяють розраховувати лише окремі елементи конструкцій, за їх допомогою неможливо отримати напружено-деформований стан конструкції в цілому, отже неможливо точно дослідити реальну роботу матеріалу під навантаженням. Недоліком інженерних методів є відносна неточність і, як наслідок, суттєво обмежена сфера застосування.

Слід зауважити, що конструкцією вважається будівельний об'єкт в цілому або будь-яка його частина, що складається з двох та більше елементів. До елементів конструкцій, з точки зору механіки, відносяться:

- стержень – такий елемент, у якого один із габаритних розмірів (довжина) набагато більша за розміри поперечного перерізу (ширину та висоту);

- оболонка (пластина, плита) – елемент конструкції, який має один габаритний розмір (товщину) набагато меншу за довжину та ширину;

- об'ємний (масивний) елемент – елемент конструкції, який має всі габаритні розміри одного порядку.

Оболонки та об'ємні елементи методами опору матеріалів розрахувати неможливо.

Опір матеріалів переважно розглядає стержні, двома розмірами яких на початковій стадії розрахунку можна зневажити. Таким чином, всі

розрахункові параметри є розподіленими тільки по довжині елемента, отже для їх визначення застосовуються виключно алгебраїчні залежності та операції, рівняння з однією змінною. На наступних стадіях розрахунку розглядаються окремі поперечні перерізи стержня (найбільш навантажені), таким чином розрахунок стержня зводиться до розрахунку його найбільш небезпечних перерізів. Переріз елемента будь-якої форми має свої чисельні характеристики, які називаються геометричними і виражають кількість матеріалу в перерізі, його форму, розвиненість відносно осей координат тощо. Визначенню геометричних характеристик присвячений розділ 1.

Для спрощення розрахунків та графічного відображення результатів елемент конструкції замінюється своєю геометричною віссю, на яку зносяться зовнішні навантаження і зв'язки з іншими елементами – складається розрахункова схема. У розрахункову схему вводиться зручна система координат, одна з осей якої як правило співпадає з геометричною віссю стержня, а початок розміщується у найбільш жорсткій опорі.

Методи опору матеріалів вимагають також суттєвого спрощення реальних фізико-механічних властивостей матеріалів і особливостей їх роботи під навантаженням, які оговорюються основними гіпотезами:

1) будь-який матеріал вважається суцільним – заповнює об'єм елемента як рідина заповнює посудину, атомічна теорія будови речовини не береться до уваги;

2) будь-який матеріал вважається безперервним і таким, що не руйнується навіть поза межею міцності – тріщини також не враховуються;

3) будь-який матеріал вважається однорідним – таким, що має однакові властивості в усіх точках об'єму елемента;

4) будь-який матеріал вважається ізотропним – таким, що має однакові властивості в усіх напрямках обраної системи координат;

5) будь-який матеріал вважається абсолютно пружним – таким, що повертає первісну форму при знятті навантаження, залежності між розрахунковими параметрами приймаються лінійними;

б) на початковій стадії розрахунку деформації матеріалу вважаються настільки малими, що не приймаються до уваги;

7) поперечні перерізи, які були плоскими до деформування, залишаються плоскими й після деформування, не викривляються – лише переміщуються або повертаються відносно початкового положення як жорстке ціле.

На відміну від теоретичної механіки, опір матеріалів враховує габаритні розміри, форму елемента конструкції та деформації матеріалу елемента, а на відміну від технічної механіки використовує основні механічні характеристики матеріалу.

Основною механічною характеристикою, що вказує на міцність матеріалу, є модуль пружності E . Основною механічною характеристикою, що вказує на жорсткість, є коефіцієнт поперечного розширення матеріалу, або коефіцієнт Пуассона μ . Кожний матеріал має власні модуль пружності та коефіцієнт Пуассона.

Міцність – це здатність матеріалу витримувати зовнішні навантаження й не руйнуватися.

Жорсткість – здатність матеріалу витримувати деформації.

Міцність і жорсткість матеріалу залежать лише від його власних характеристик.

Також виділяють стійкість – здатність елемента конструкції зберігати під навантаженням свою первісну форму. Стійкість залежить від механічних характеристик матеріалу, а також від розмірів елемента конструкції.

Зовнішніми силовими факторами виступають навантаження та дії. Навантаження можна представити у вигляді зосереджених або розподілених сил або моментів, дії – неможливо (вплив температури, зміщення опор тощо).

Під дією зовнішніх силових факторів матеріал деформується – його частки зміщуються одна відносно одної, внаслідок чого відбувається взаємодія цих часток: вони намагаються або відірватися, або роздавити одна одну. Сили такої взаємодії, розподілені по поверхні часток, називаються

механічним напруженням матеріалу.

Відносно окремого перерізу, що розглядається, загальне напруження в точці можна геометрично розкласти на нормальне – перпендикулярне перерізу, направлене по нормалі до площини перерізу, та дотичне – діюче у площині перерізу й направлене по прямій лінії, дотичній до поверхні перерізу в обраній його точці.

Напруження, інтегровані за перерізом відносно осей обраної системи координат, називаються внутрішніми силовими факторами, або внутрішніми зусиллями. Їх всього шість:

N – поздовжня сила, діє перпендикулярно поперечному перерізу, вздовж осі стержня;

Q_x , Q_y – поперечні сили, діють у площині поперечного перерізу, вздовж відповідних осей координат;

M_k – крутний (обертальний) момент, діє в площині поперечного перерізу, навколо осі стержня;

M_x , M_y – згинальні моменти, діють перпендикулярно поперечному перерізу, навколо відповідних осей координат.

Кожний внутрішній силовий фактор характеризує певний вид деформування елементів конструкцій, або простий вид опору матеріалів: поздовжня сила N – центральне розтягання або стискання; поперечні сили Q_x , Q_y – зсув; крутний момент M_k – кручення; згинальні моменти M_x , M_y – згин.

Внутрішні силові фактори є невідомими й визначаються в залежності від зовнішнього навантаження методом перерізів, який базується на законах Ньютона та принципі незалежної дії сил. За цим методом стержень можна розділити на декілька частин і визначати зусилля в кожній частині окремо.

Опануванню метода перерізів в залежності від виду простого опору матеріалів присвячені розділи 2, 3 та 5.

Якщо при центральному розтяганні або стисканні, крученні та згині в точці матеріалу елемента конструкції виникає лінійний напружений стан, що описується одним невідомим внутрішнім зусиллям, то при згині одночасно

виникають нехай і взаємозалежні, але два зусилля – згинальний момент і поперечна сила. Тому в точці матеріалу елемента конструкції виникає плоский напружений стан, розрахунок якого вимагає окремої уваги, яка і приділяється у розділі 4.

Розділ 6 присвячений вивченню універсальних методів визначення деформацій стержнів, які використовуються при розрахунках статично невизначених елементів, що згинаються, і складають основу методів будівельної механіки та теорій розрахунку будівельних конструкцій (наприклад, методу переміщень і деформаційного методу).

В розділі 7 розглядаються розрахунки методами опору матеріалів статично невизначених стержневих елементів, а саме – багатопрольотних нерозрізних балок, які найбільш часто використовуються в якості горизонтальних несучих конструкцій будівель і споруд.

У розділах 8...10 розглядаються види складного опору матеріалів.

До складного опору матеріалів відносяться види деформації стержня, при яких в його поперечних перерізах одночасно виникає не менше двох внутрішніх силових факторів. Винятком є пряме поперечне згинання, яке не прийнято розглядати у якості випадку складного опору, хоча при цьому в перерізах виникають два внутрішніх силових фактори – згинальний момент M і поперечна сила Q . Цей вид деформації відноситься до простого опору, зважаючи на взаємозалежність вказаних внутрішніх зусиль.

Теорія складного опору базується на принципі незалежної дії сил, згідно з яким можна геометрично складати напруження та переміщення, що відповідають різним видам простого деформування. Використовувати цей принцип можливо тільки для жорстких стержнів, які під дією навантажень отримують малі деформації, що істотно не змінюють їх первісної форми. В цьому випадку деформації, викликані кожним із прикладених навантажень окремо, не впливають на розташування та результати дії інших.

Всі випадки складного опору матеріалів можна розділити на дві групи.

До першої групи належать випадки, при яких в небезпечних перерізах стержня напружений стан є або одноосьовим, або може наближено розглядатися як одноосьовий у зв'язку з незначним впливом на міцність стержня дотичних напружень, що виникають в його поперечних перерізах. Тому в таких випадках при розрахунках на міцність будь-які теорії міцності не застосовуються. До першої групи належать, наприклад, косе згинання та позацентрове розтягання або стискання.

У випадках складного опору, що відносяться до другої групи, в небезпечних перерізах стержня виникає плоский напружений стан, і розрахунок на міцність виконується із застосуванням теорій міцності. До другої групи належать, наприклад, згинання з крученням, розтягання або стискання з крученням, розтягання або стискання зі згинанням і крученням.

Вивчення складного опору не викликає принципових труднощів, проте розгляд його окремих видів важливий за необхідності аналізу напруженого стану елементів конструкцій, що працюють в переважній більшості випадків реальних умов роботи конструкцій.

У розділі 11 приділена окрема увага такому виду складного опору, як поздовжнє згинання, що виникає при дослідженні стійкості стержнів – окремого аспекту роботи стиснутих елементів конструкцій, зокрема виготовлених зі сталі, інших міцних конструкційних металів або сплавів.

В цілому, сукупність компетенцій, що відносяться до сфери опору матеріалів і розрахунку окремих елементів конструкцій, складає базу для опрацювання питань будівельної механіки (будівель і споруд, корабля, літака тощо), теорії пружності та пластичності, механіки деформованого твердого тіла, механіки суцільних середовищ (зокрема механіки ґрунтів), динаміки споруд, а також для розуміння теорій будівельних конструкцій (теорії металу, теорії залізобетону, теорії конструкцій на основі деревини тощо), зокрема найбільш відомих і поширених методів розрахунку конструкцій машин і механізмів, вузлів і агрегатів, будівельних конструкцій – методу сил, методу переміщень, методу скінчених елементів, методу граничних станів,

деформаційного методу тощо.

Таким чином, курс опору матеріалів готує майбутнього фахівця до праці в галузі проектування, розрахунку та конструювання будівельних конструкцій, будівель і споруд в цілому, деталей машин і механізмів, їх вузлів і агрегатів тощо у якості інженера-розраховувача, інженера-конструктора та інженера-проектувальника.

Для виконання індивідуальних практичних завдань або самостійної роботи з опору матеріалів у вигляді розрахунково-графічних робіт, домашніх контрольних робіт або аудиторних контрольних робіт з метою запобігання повторів одних і тих же варіантів задач кожному студенту призначається шифр, який складається з трьох цифр. За першою цифрою, як правило, обирається розрахункова схема стержня, за двома останніми – інші вихідні дані (розміри стержня, навантаження тощо). За цим шифром обирається варіант задачі з кожної теми курсу. Варіанти задач наведені наприкінці кожного розділу даного навчально-методичного посібника.

1 ГЕОМЕТРИЧНІ ХАРАКТЕРИСТИКИ ПЛОСКИХ ПЕРЕРІЗІВ

Площа є найпростішою геометричною характеристикою перерізу елемента конструкції. Площа кількісно, одним числом, виражає всі розміри перерізу. Якщо переріз розбити на безліч елементарних площадок dA , то можна записати:

$$\dot{A} = \int_A dA$$

При вивченні згину, кручення та різних випадків роботи стержнів на складний опір зустрічаються інші геометричні характеристики, від яких залежить міцність і жорсткість стержнів.

Відносно довільної системи координат xOy (рис. 1.1) обчислюються наступні геометричні характеристики перерізу:

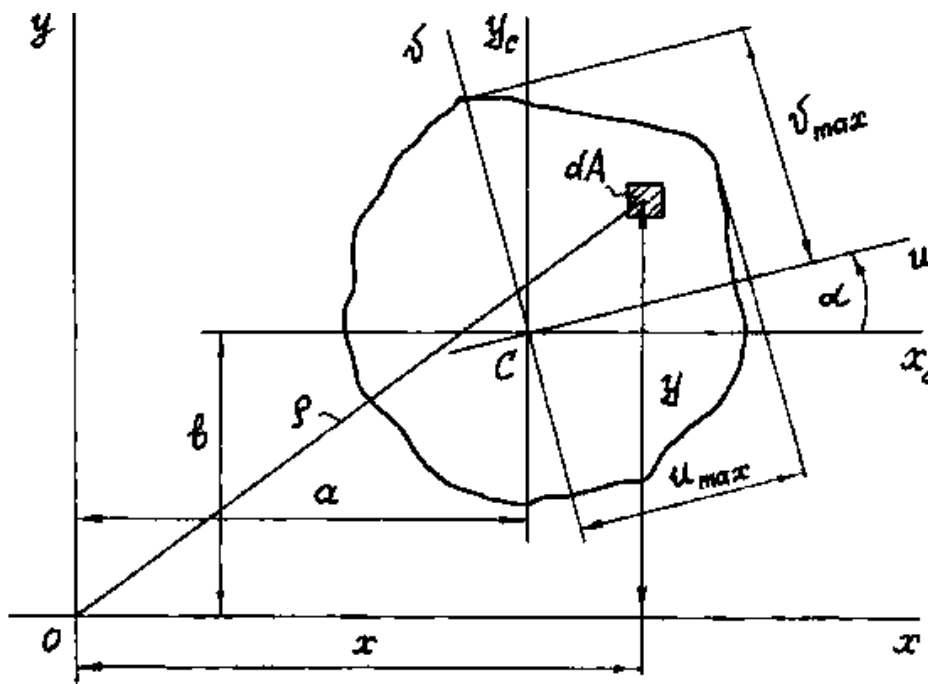


Рисунок 1.1 – До обчислення геометричних характеристик перерізів

Статичний момент площі відносно відповідних осей координат:

$$S_x = \int_A y \cdot dA \qquad S_y = \int_A x \cdot dA$$

Статичний момент площі перерізу повинен дорівнювати рівнодіючій від всієї площі перерізу, помноженої на координату від центра ваги перерізу до відповідної осі, тобто:

$$S_x = A \cdot b \qquad S_y = A \cdot a$$

За відомими статичними моментами фігури, що складає переріз, можна визначити положення центра ваги $C(a; b)$ та осей, що проходять через цю точку, які називаються центральними осями:

$$a = \frac{\int_A x \cdot dA}{\int_A dA} \qquad b = \frac{\int_A y \cdot dA}{\int_A dA}$$

Статичні моменти відносно центральних осей S_{xc}, S_{yc} дорівнюють нулю.

Моменти інерції перерізу кількісно виражають форму перерізу.

Осьові моменти інерції завжди додатні:

$$I_x = \int_A y^2 \cdot dA \qquad I_y = \int_A x^2 \cdot dA$$

Полярний момент інерції:

$$I_{\rho} = \int_A \rho^2 \cdot dA = \int_A (x^2 + y^2) dA = I_x + I_y$$

Відцентровий момент інерції:

$$I_{xy} = \int_A x \cdot y \cdot dA.$$

Знак I_{xy} залежить від положення системи координат відносно перерізу (рис. 1.2). Якщо одна з осей координат збігається з віссю симетрії перерізу, то відцентровий момент завжди дорівнює нулю.

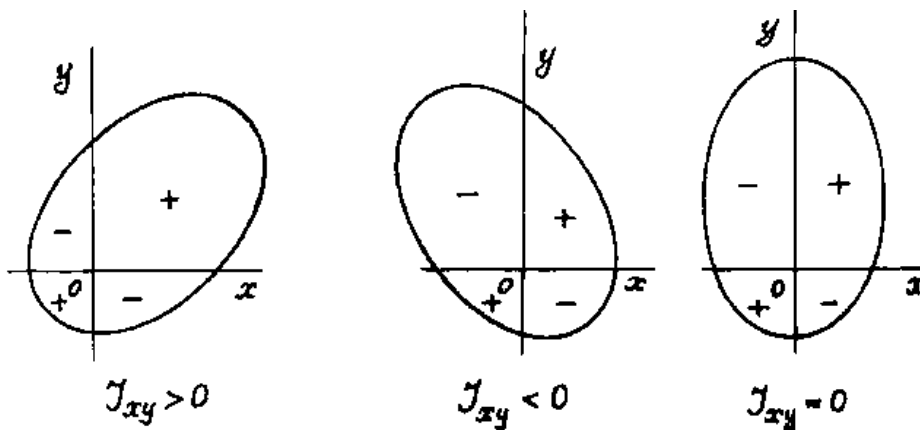


Рисунок 1.2 – Визначення знаку відцентрового моменту інерції

Між моментами інерції відносно центральних осей і моментами інерції відносно осей, паралельних центральним, існує зв'язок:

$$I_x = I_{x_c} + b^2 A$$

$$I_y = I_{y_c} + a^2 A$$

$$I_{xy} = I_{x_c y_c} + a \cdot b \cdot A$$

При повороті центральних осей на кут α моменти інерції відносно нових взаємно перпендикулярних осей x_{1c} та y_{1c} складають:

$$I_{x_{1c}} = I_{x_c} \cos^2 \alpha + I_{y_c} \sin^2 \alpha - I_{x_c y_c} \sin 2\alpha$$

$$I_{y_{1c}} = I_{x_c} \sin^2 \alpha + I_{y_c} \cos^2 \alpha + I_{x_c y_c} \sin 2\alpha$$

$$I_{x_{1c} y_{1c}} = \frac{I_{x_c} - I_{y_c}}{2} \sin 2\alpha + I_{x_c y_c} \cos 2\alpha$$

Сума осьових моментів інерції відносно двох взаємно перпендикулярних осей не залежить від кута повороту цих осей і завжди дорівнює полярному моменту інерції перерізу відносно початку координат:

$$I_{x_{1c}} + I_{y_{1c}} = I_{x_c} + I_{y_c} = I_{\rho}$$

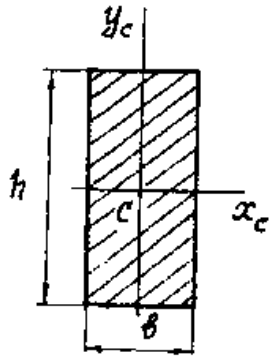
Можна підібрати таке значення кута α , при якому $I_{x_{1c} y_{1c}} = 0$:

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2I_{x_c y_c}}{I_{y_c} - I_{x_c}}$$

Осі u, v , що проходять через центр ваги, відносно яких відцентровий момент дорівнює нулю, називаються головними центральними осями інерції перерізу. Осьові моменти інерції I_u, I_v відносно цих осей приймають екстремальні значення: відносно однієї осі – максимальне, відносно іншої – мінімальне.

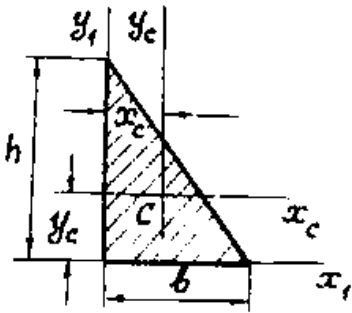
У багатьох випадках можна одразу визначити положення головних центральних осей. Якщо переріз має вісь симетрії, то вона є однією з головних центральних осей, а друга проходить через центр ваги перерізу.

Значення осьових і відцентрового моментів інерції поперечних перерізів прокатних профілів беруться з сортаменту, а для перерізів у вигляді прямокутника, трикутника, кола, півкола та ін. обчислюються за формулами, наприклад:



$$I_{x_c} = \frac{bh^3}{12}; \quad I_{y_c} = \frac{hb^3}{12};$$

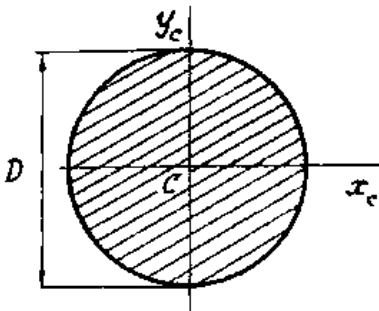
$$I_{x_c y_c} = 0$$



$$I_{x_c} = \frac{bh^3}{36}; \quad I_{y_c} = \frac{hb^3}{36}; \quad I_{x_c y_c} = -\frac{b^2 h^2}{72}$$

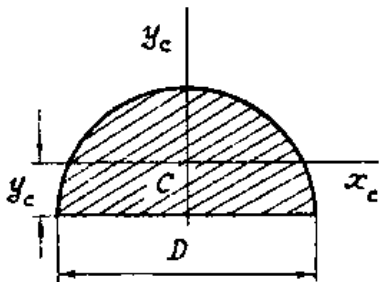
$$y_c = h/3 \quad x_c = b/3$$

$$I_{x_1} = \frac{bh^3}{12}; \quad I_{y_1} = \frac{hb^3}{12}; \quad I_{x_1 y_1} = \frac{b^2 h^2}{24}$$



$$I_{x_c} = I_{y_c} = \frac{\pi D^4}{64};$$

$$I_{x_c y_c} = 0$$



$$I_{x_c} = 0,00686D^4 = 0,11R^4;$$

$$I_{y_c} = 0,0246D^4 = 0,393R^4$$

$$I_{x_c y_c} = 0 \quad y_c = 0,212D$$

Важливими геометричними характеристиками є також моменти опору W і радіуси інерції i . Моменти опору одним числом визначають кількість матеріалу в перерізі відносно відповідної осі, радіуси інерції одночасно враховують і розміри перерізу, та його форму. Практичне значення мають ці

характеристики, визначені відносно головних центральних осей:

$$W_u = \frac{I_u}{\vartheta_{\max}} \qquad W_v = \frac{I_v}{v_{\max}}$$
$$i_u = \sqrt{\frac{I_u}{A}} \qquad i_v = \sqrt{\frac{I_v}{A}}$$

Тут u_{\max}, v_{\max} – відстані від осей u та v до найбільш віддалених точок перерізу.

Головні радіуси інерції служать для побудови на головних осях перерізу еліпса інерції, виступаючи його півосями. Із рівняння еліпса інерції за наступною формулою обчислюються координати декількох точок еліпса в одному з квадрантів, а потім, використовуючи симетрію, будуються ділянки еліпса в інших квадрантах:

$$\frac{\vartheta^2}{i_u^2} + \frac{u^2}{i_v^2} = 1 \qquad \vartheta = i_u \sqrt{1 - \frac{u^2}{i_v^2}}$$

Еліпс інерції дозволяє визначити момент інерції відносно осі, нахиленої під будь-яким кутом α_i до головної центральної осі:

$$I_{\alpha_i} = i_{\alpha_i}^2 \cdot A$$

Тут i_{α_i} – радіус інерції. Для визначення радіусу інерції i_{α_i} необхідно провести дотичну до еліпсу інерції паралельно осі, нахиленої під кутом α_i до головної центральної осі. Відстань від центру еліпса до цієї дотичної і буде радіусом інерції i_{α_i} , що визначається з урахуванням прийнятого при побудові еліпса масштабу.

1.1 Дослідження геометричних характеристик складного перерізу

Для складного плоского перерізу потрібно визначити геометричні характеристики в наступному порядку:

- 1) вибрати первісну систему координат xOy , відносно якої визначити місце розташування центру ваги перерізу – точку $C(a; b)$;
- 2) обчислити центральні моменти інерції;
- 3) визначити положення головних центральних осей;
- 4) знайти осьові моменти інерції відносно головних осей, а для контролю правильності розрахунків використовувати співвідношення:

$$I_u + I_v = I_{x_c} + I_{y_c} = 0 \qquad I_{uv} = 0$$

- 5) обчислити осьові моменти опору і радіуси інерції відносно головних осей.

Конфігурації складеного поперечного перерізу та вихідні дані для виконання індивідуального завдання самостійно роботи наведені в п. 1.2.

У якості прикладу розглянемо переріз, що складається з трьох частин:
а) швелер № 40а; б) двотавр № 20а; в) рівнобічний кутник 10х10 (рис. 1.3).

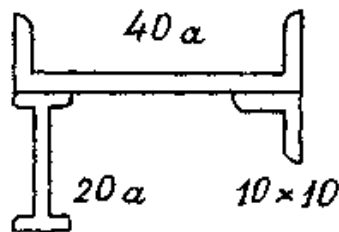


Рисунок 1.3 – Конфігурація складеного поперечного перерізу (приклад)

На окремому аркуші в масштабі викреслюється переріз, як показано

на рис. 1.4. Вихідні дані, необхідні для визначення геометричних характеристик складеного перерізу беруться з таблиць сортаменту прокатної сталі та представляються у вигляді табл. 1.1.

Таблиця 1.1 – Вихідні дані до розрахунку геометричних характеристик

Частина перерізу	Геометричні характеристики							
	h , см	b , см	A , см ²	I_x , см ⁴	I_y , см ⁴	I_{max} , см ⁴	I_{min} , см ⁴	Z_0 , см
Швелер № 40а	40	11,5	61,5	642	15220	–	–	2,75
Двотавр № 20а	20	11	28,9	2030	155	–	–	–
Рівнобічний кутник 10х10	10	10	19,2	179	179	284	74,1	2,83

Якщо в складеному перерізі двотавр, швелер або рівнобічний кутник розташовані горизонтально, то в табл. 1.1 значення осьових моментів інерції I_x і I_y міняються місцями, тобто сортаментне значення I_x вноситься в таблицю як I_y , а значення I_y – як I_x .

Допоміжна система координат x_0y_0 обирається таким чином, щоб весь переріз опинився у додатному квадранті. Визначаються координати центрів ваги кожної з частин перерізу відносно обраної допоміжної системи:

$$x_1 = h_1 / 2 = 40 / 2 = 20 \text{ см} \qquad y_1 = h_2 + z_{01} = 20 + 2,75 = 22,75 \text{ см}$$

$$x_2 = b_2 / 2 = 11 / 2 = 5,5 \text{ см} \qquad y_2 = h_2 / 2 = 20 / 2 = 10 \text{ см}$$

$$x_3 = h_1 - z_{03} = 40 - 2,83 = 37,17 \text{ см} \qquad y_3 = h_2 - z_{03} = 20 - 2,83 = 17,17 \text{ см}$$

Після визначення центрів ваги частин складеного перерізу обчислюються статичні моменти їх площ відносно допоміжних осей x_0y_0 за формулами:

$$S_{ix} = y_i \cdot A_i$$

$$S_{iy} = x_i \cdot A_i$$

Одержані результати зводяться в табл. 1.2.

Таблиця 1.2 – Обчислення координат точки центру ваги складеного перерізу

Частина перерізу	Координати центру ваги (рис. 1.4)		$A_i, \text{см}^2$	$S_{ix}, \text{см}^3$	$S_{iy}, \text{см}^3$
	$x_i, \text{см}$	$y_i, \text{см}$			
Швелер	20	22,75	61,5	1399,13	1230
Двотавр	5,5	10	28,9	289	158,95
Кутник	37,7	17,7	19,2	329,66	713,66
Складений переріз	–	–	109,6	2017,79	2102,61

Координати точки центру ваги складеного перерізу, см:

$$a = \frac{\sum S_{iy}}{\sum A_i} = \frac{2102,61}{109,6} = 19,8$$

$$b = \frac{\sum S_{ix}}{\sum A_i} = \frac{21017,79}{109,6} = 18,41$$

За цими даними наноситься точка $C(a; b)$ – центр ваги всього перерізу та проводяться центральні осі x_c, y_c , паралельні осям x, y .

Визначаються координати центрів ваги окремих частин складеного перерізу відносно центральних осей, а потім обчислюються центральні осьові моменти інерції I_{Xc}, I_{Yc} :

$$a_1 = x_1 - a = 20 - 19,18 = 0,82 \text{ см};$$

$$b_1 = y_1 - b = 22,75 - 18,41 = 4,34 \text{ см};$$

$$a_2 = x_2 - a = 5,5 - 19,18 = -13,68 \text{ см};$$

$$b_2 = y_2 - b = 10 - 18,41 = -8,41 \text{ см};$$

$$a_3 = x_3 - a = 37,17 - 19,18 = 17,99 \text{ см};$$

$$b_3 = y_3 - b = 17,7 - 18,41 = -1,24 \text{ см};$$

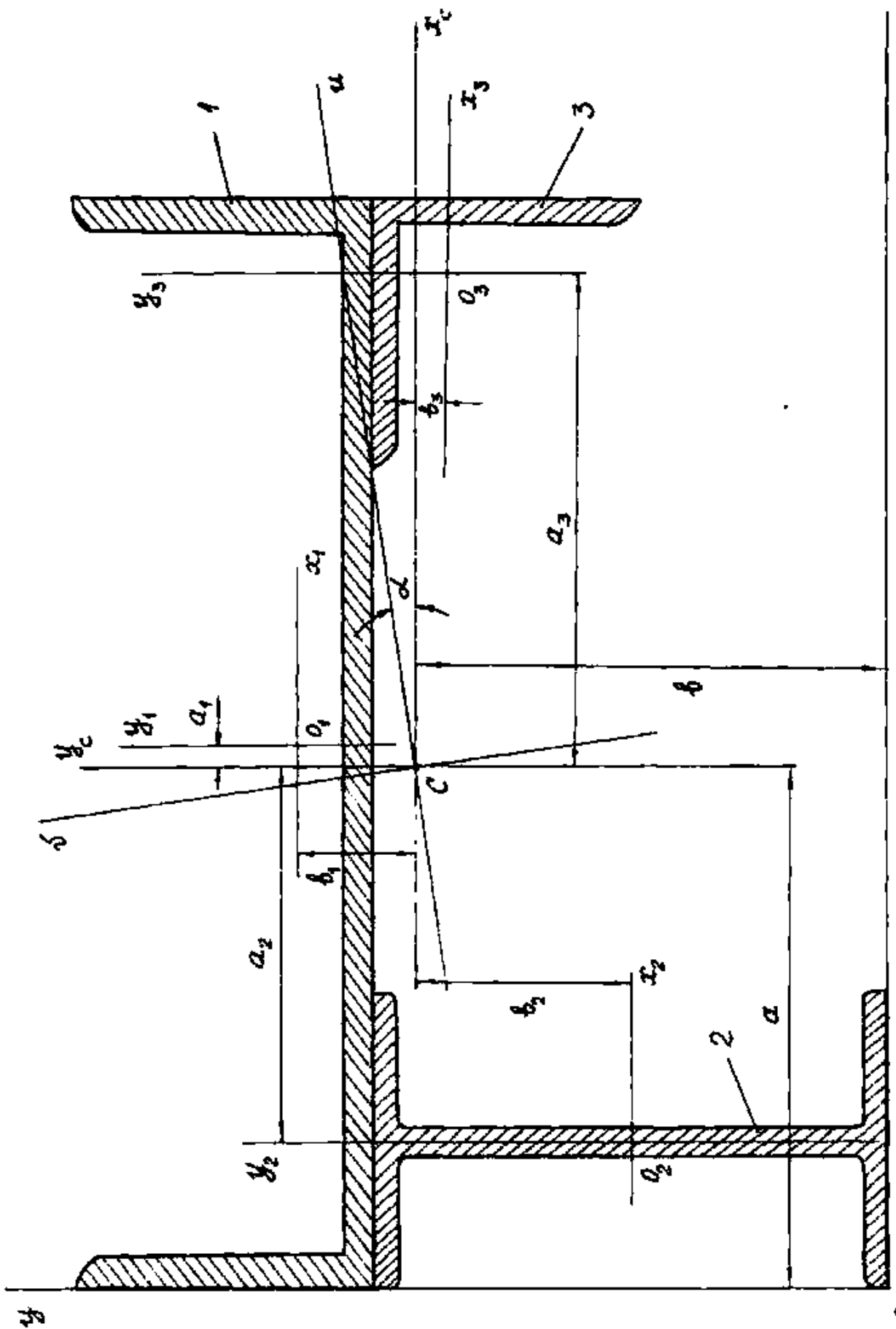


Рисунок 1.4 – Центральні осі та головні осі інерції складеного перерізу

$$I_{xc} = \sum (I_{xi} + b_i^2 A_i) = 642 + 4,34^2 \cdot 61,5 + 2030 + (-8,41)^2 \cdot 28,9 + 179 + (1,24)^2 \cdot 19,2 = 6082,95 \text{ см}^4;$$

$$I_{yc} = \sum (I_{yi} + a_i^2 A_i) = 15220 + 0,82^2 \cdot 61,5 + 2030 + 155 + (-13,68)^2 \cdot 28,9 + 179 + 17,99^2 \cdot 19,2 = 27217,66 \text{ см}^4$$

Для обчислення відцентрового моменту інерції I_{xcyc} слід взяти до уваги, що відцентрові моменти інерції швелера і двотавра відносно власних центральних осей дорівнюють нулю, тобто $I_{x1y1} = I_{x2y2}$, так як у цих перетинів хоча б одна центральна вісь є віссю симетрії. Відцентровий момент інерції рівнобічного кутника відносно власних центральних осей $I_{x3y3} \neq 0$, тому що ці осі не є осями симетрії перерізу. Для його визначення використовується формула:

$$I_{xy} = \frac{I_{\max} - I_{\min}}{2} \cdot \sin 2\alpha_0$$

Тут I_{\max}, I_{\min} – головні моменти інерції кутника; α_0 – кут нахилу головної осі максимуму до центральної осі x_3 , $\alpha_0 = 45^\circ$.

Для визначення знаку I_{xy} відносно власних центральних осей необхідно керуватися схемою, зображеної на рис. 1.5.

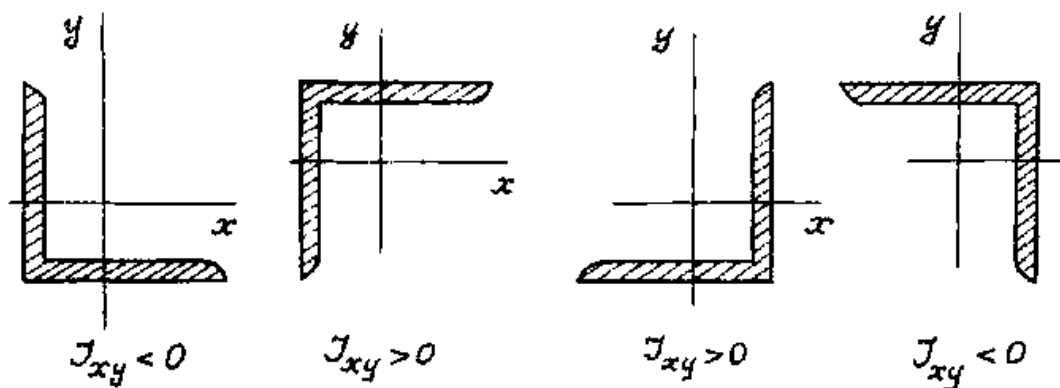


Рисунок 1.5 – Відцентровий момент інерції кутника

Тоді, з урахуванням знаку відцентрового моменту інерції кутника:

$$I_{x_3y_3} = -\frac{284 - 74,1}{2} \cdot \sin 90^\circ = -104,95 \text{ см}^4,$$

а для відцентрового моменту інерції всього перерізу:

$$I_{X_cY_c} = I_{x_3y_3} + \sum a_i \cdot b_i \cdot A_i = -104,95 + 0,82 \cdot 4,34 \cdot 61,5 + \\ + (-13,68) \cdot (-8,41) \cdot 28,9 + 17,99 \cdot (-1,24) \cdot 19,2 = 3010,52 \text{ см}^4.$$

Визначається положення головних центральних осей інерції:

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2I_{x_cy_c}}{I_{y_c} - I_{x_c}} = \frac{2 \cdot 3010,52}{27217,66 - 6082,95} = 0,2849$$

$$2 \cdot \alpha = 15,90^\circ \quad \alpha = 7,95^\circ.$$

Виконується поворот системи координат x_cOy_c на кут $\alpha = 7,95^\circ$ і показуються головні центральні осі u, v .

Обчислюються головні центральні моменти інерції:

$$I_u = I_{x_c} \cos^2 \alpha + I_{y_c} \sin^2 \alpha - I_{x_cy_c} \sin 2\alpha = 6082,95 \cdot \cos^2 7,95 + \\ + 27217,66 \sin^2 7,95^\circ - 3010,52 \cdot \sin 15,9^\circ = 5662,48 \text{ см}^4$$

$$I_v = I_{x_c} \sin^2 \alpha + I_{y_c} \cos^2 \alpha + I_{x_cy_c} \sin 2\alpha = 6082,95 \cdot \sin^2 7,95 + \\ + 27217,66 \cos^2 7,95^\circ - 3010,52 \cdot \sin 15,9^\circ = 27638,13 \text{ см}^4$$

Здійснюється перевірка правильності розрахунків:

$$I_{u9} = \frac{I_{x_c} - I_{y_c}}{2} \sin 2\alpha + I_{x_cy_c} \cos 2\alpha = \frac{6082,95 - 27217,66}{2} \cdot \sin 15,9^\circ + \\ + 3010,52 \cos 15,9^\circ = 0,317 \approx 0$$

$$I_u + I_g = I_{x_c} + I_{y_c}$$

$$5662,48 + 27638,13 = 6082,95 + 27217,66;$$

$$33300,61 = 33300,61.$$

Знаходяться моменти опору і радіуси інерції відносно головних центральних осей:

$$W_u = \frac{I_u}{g_{\max}} = \frac{5662,48}{17} = 333,09 \text{ см}^3;$$

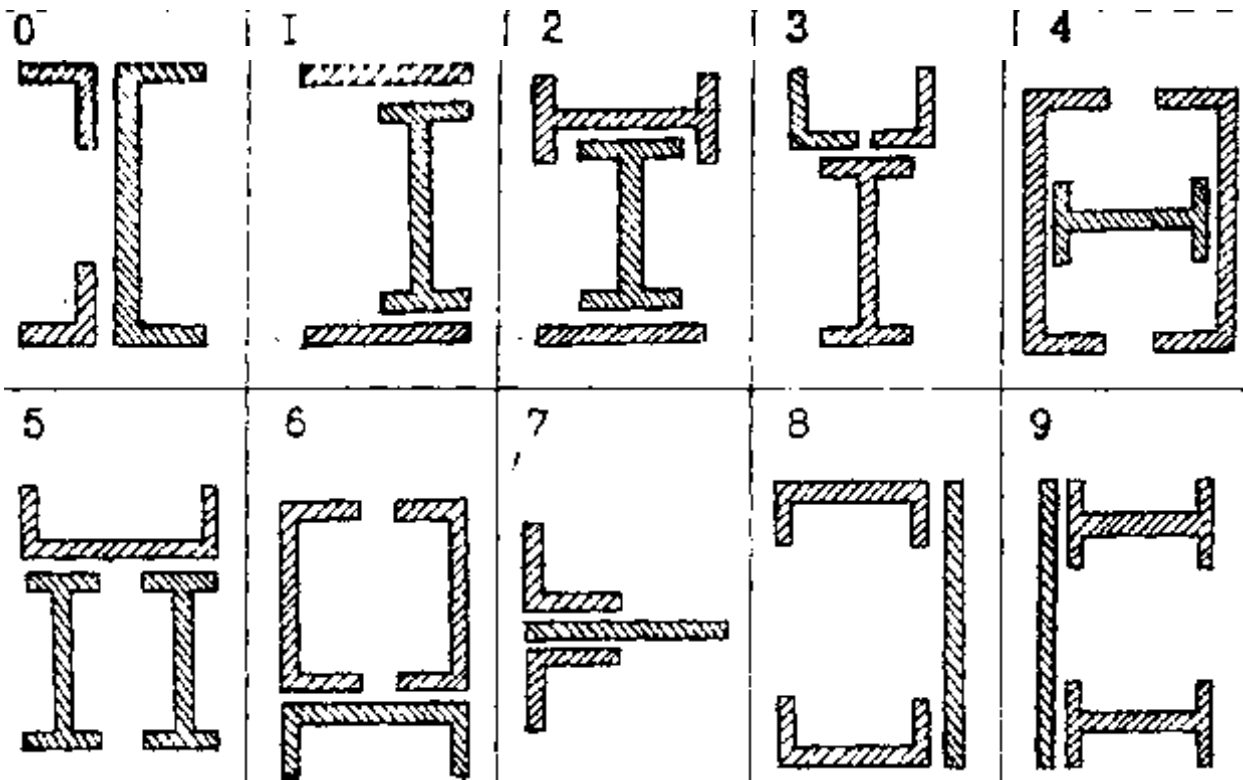
$$W_g = \frac{I_g}{u_{\max}} = \frac{27638,13}{22,6} = 1222,93 \text{ см}^3;$$

$$i_u = \sqrt{\frac{I_u}{A}} = \sqrt{\frac{5662,48}{109,6}} = 7,19 \text{ см};$$

$$i_g = \sqrt{\frac{I_g}{A}} = \sqrt{\frac{27638,13}{109,6}} = 15,88 \text{ см}.$$

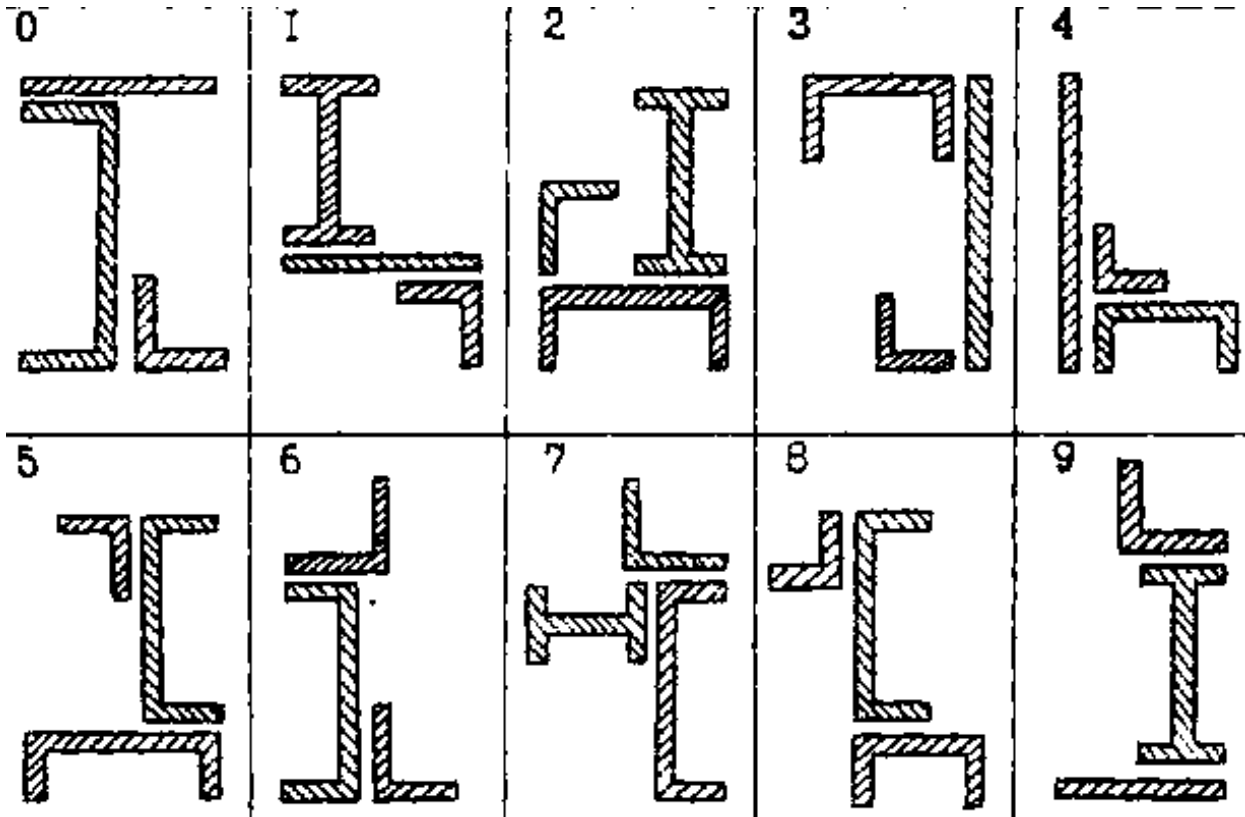
1.2 Завдання до самостійної роботи за темою 1

Симетричні перерізи:



Цифри шифру				
Перша Номер схеми	Друга		Третя	
	№ двотавра	№ швелеру	Розміри листа, мм	Розміри кутника, мм
0	14	16	300x10	80x8
1	16	18	300x14	80x6
2	18	20	320x16	75x8
3	20	22	350x16	75x6
4	22	24	300x16	70x8
5	24	27	340x18	70x7
6	27	30	360x12	63x6
7	30	33	400x18	63x5
8	33	36	440x20	56x5
9	36	40	500x20	50x4

Несиметричні перерізи:



Цифри шифру				
Перша	Друга		Третя	
Номер схеми	№ двотавра	№ швелеру	Розміри листа, мм	Розміри кутника, мм
0	14	16	220x10	50x4
1	16	18	250x14	56x5
2	18	20	300x14	63x5
3	20	22	320x16	63x6
4	22	24	350x16	70x7
5	24	27	340x18	70x8
6	27	30	360x12	75x6
7	30	33	400x18	75x8
8	33	36	440x20	80x6
9	36	40	500x20	80x8

1.3 Контрольні запитання за темою 1

1. Надати визначення статичного моменту відносно осі та моментів інерції плоских перерізів.
2. Який зв'язок між полярним і осьовими моментами інерції?
3. Які властивості статичного моменту та моментів інерції плоских перерізів?
4. Як знаходяться моменти інерції найпростіших форм перерізів в загальному випадку?
5. Які осі називаються центральними?
6. Як обчислюються моменти інерції плоских перерізів відносно осей, паралельних центральним?
7. Надати визначення головних центральних осей інерції.
8. Яке положення головних центральних осей інерції плоских перерізів, які мають хоча б одну ось симетрії?
9. Як знаходяться головні моменти інерції?
10. Як знаходяться моменти інерції відносно осей, що складають кут α з головними?
11. У чому полягає властивість інваріантності осьових моментів інерції?
12. Що називається моментом опору плоского перерізу?
13. Надати визначення радіуса інерції плоского перерізу.
14. Які властивості еліпса інерції?

2 ЦЕНТРАЛЬНЕ РОЗТЯГАННЯ АБО СТИСКАННЯ СТЕРЖНІВ

Напружений стан простого розтягання або стискання, який також називається лінійним, характеризується виникненням лише одного внутрішнього силового фактора – поздовжньої (осьової) сили N_z , яка діє в центрі ваги поперечного перерізу стержня перпендикулярно площині перерізу (вздовж його геометричної осі).

Поздовжня сила – це внутрішнє зусилля, що являє собою проекцію головного вектора діючих в перерізі сил взаємодії на вісь стержня. Вона обчислюється через зовнішні сили як сума проєкцій на вісь стержня сил, прикладених до нього по одну сторону перерізу. При цьому, за методом перерізів, результат буде одним і тим же – коли береться сума проєкцій сил, розташованих як тільки ліворуч від перерізу, так і тільки праворуч (або зверху чи знизу від перерізу у випадку вертикального стержня).

Поздовжня сила вважається додатною, якщо вона викликає розтягання, і від'ємною, якщо викликає стискання.

За знайденими внутрішніми зусиллями, використовуючи заздалегідь виведені формули, визначають нормальні напруження та переміщення поперечних перерізів стержня.

Власна вага матеріалу елементів конструкцій, а також сили інерції рухомих частин машин і механізмів є зовнішніми навантаженнями, розподіленими за об'ємом. Якщо в машинобудуванні, як правило, вплив власної ваги не враховується, так як машинобудівні деталі мають порівняно невеликі розміри, то в будівельних конструкціях, будівлях і спорудах власна вага є одним з основних навантажень.

Нормальне напруження в поперечному перерізі стержня обчислюється за формулою:

$$\sigma_z = \frac{N_z}{A}$$

Тут N_z – внутрішнє поздовжнє зусилля (поздовжня сила); A – площа поперечного перерізу.

Абсолютна деформація (подовження або скорочення) на ділянці стержня, на якому напруження постійне $\sigma_z = const$, без урахування його власної ваги дорівнює:

$$\Delta l = \frac{N_z \cdot l}{EA}$$

З урахуванням власної ваги:

$$\Delta l = \frac{N_z \cdot l}{EA} + \frac{Q \cdot l}{2EA} \qquad Q = A \cdot l \cdot \gamma$$

Тут E – модуль пружності (поздовжньої); l – довжина ділянки; γ – питома вага (щільність) матеріалу стержня.

За умовами експлуатації до стержневих систем можуть бути висунуті умови міцності та жорсткості:

$$\sigma_{\max} \leq [\sigma] \qquad \Delta l_{\max} \leq [\Delta l]$$

Тут $[\sigma]$ – допустиме напруження, в будівельних нормах приймають аналогічну величину f_d – експлуатаційний (розрахунковий) опір; $[\Delta l]$ – допустима абсолютна деформація всього стержня або його ділянки.

Результати розрахунків представляють у вигляді діаграм, які називаються епюрами. Графік, що показує, як змінюється поздовжня сила по довжині стержня при переході від одного перерізу до наступного,

називається епюрой поздовжніх сил N_z . Аналогічний зміст мають епюри нормальних напружень σ_z , переміщень Δl або будь-якого іншого розрахункового параметру.

Існують деякі правила побудови, загальні для всіх епюр:

1) вісь (база) епюри завжди обирається так, щоб вона була паралельна чи співпадала з віссю стержня;

2) ордината епюри показує величину та знак зусилля (напруження, переміщення і т.д.), яке діє в тому перерізі стержня, проти якого розташована ця ордината;

3) ординати епюри відкладаються від осі епюри за перпендикуляром;

4) епюри заштриховуються у напрямку відліку ординат;

5) при побудові ординати епюри відкладаються строго в масштабі, крім того – проставляються числа, що показують величини характерних ординат.

У випадку, якщо стержень закріплений обома кінцями, одних рівнянь статичної рівноваги недостатньо для визначення внутрішніх зусиль. Тому для розрахунку таких конструкцій, які називаються статично невизначеними, необхідно також використовувати залежності між деформаціями елементів конструкцій. У статично невизначених конструкціях кількість невідомих, які належить визначити, більше за число рівнянь статичної рівноваги, які можуть бути з цією метою застосовані. Різниця між кількістю невідомих і рівнянь статички визначає число зайвих (додаткових) невідомих, або ступінь статичної невизначеності системи, тобто:

$$CCHC = H - P.$$

Розрахунок статично невизначених систем (конструкцій) здійснюється у наступній послідовності:

1) статична сторона задачі – складаються рівняння статичної рівноваги частин елементів конструкцій, які містять невідомі зусилля;

2) геометрична сторона задачі – встановлює зв'язок між деформаціями окремих елементів конструкцій на основі умов сумісності деформацій;

3) фізична сторона задачі – на основі закону Гука деформації елементів конструкцій виражаються через діючі в них невідомі зусилля;

4) синтез – рівняння статичної рівноваги розв'язуються сумісно з рівняннями деформацій, записаними в зусиллях і визначаються невідомі зусилля.

Далі розглядаються декілька типових прикладів розрахунку на центральне розтягання або стискання статично визначених і невизначених конструкцій.

2.1 Визначення зусиль, напружень і деформацій при центральному розтяганні або стисканні

Для сталюого ступінчастого стержня необхідно:

1) визначити поздовжні сили N_z , нормальні напруження σ_z та переміщення Δl характерних перерізів за довжиною стержня, приймаючи модуль пружності та допустиме напруження рівними:

$$E = 2 \cdot 10^5 \text{ МПа}, \quad [\sigma] = 210 \text{ МПа}.$$

2) побудувати епюри поздовжніх зусиль, нормальних напружень та переміщень.

Власна вага матеріалу стержня не враховується.

Розрахункові схеми та вихідні дані для виконання індивідуального завдання самостійної роботи наведені в п. 2.6, табл. 2.1.

Наведено розрахунок і побудовані епюри поздовжніх сил N_z , нормальних напружень σ_z та переміщень Δl для заданої розрахункової схеми (рис. 2.1, а), якщо:

- довжина ділянки стержня $a = 2,1$ м;
- довжина ділянки стержня $b = 1,4$ м;
- площа поперечного перерізу $A = 4$ см²;
- зовнішні сили F та $1,8 \cdot F$, де $F = 20$ кН.

Вводиться система координат таким чином, щоб її початок знаходився у жорсткій опорі B , а вісь z співпадала з віссю стержня й була направлена в бік розтягання.

Перш за все визначається невідома реакція R_B опори B , що являє собою зосереджену силу. У деяких випадках розрахунку статично визначених стержнів визначенням реакцій опор можна знехтувати, але розглядається загальний випадок рішення.

Всі сили проектуються на вісь стержня:

$$\sum F_{iz} = F - 1,8 \cdot F - R_B = 0,$$

Тоді з рівняння рівноваги:

$$R_B = -0,8 \cdot F = -16 \text{ кН.}$$

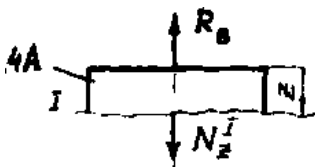
Стержень розбивається на силові ділянки. Ознакою силової ділянки є рівномірне зусилля або рівномірне напруження, отже границями силових ділянок будуть перерізи, в яких прикладені зовнішні сили та змінюється розподілене навантаження та ступінчасто змінюється площа поперечного перерізу стержня. Визначаються границі силових ділянок:

I ділянка – $0 \leq z \leq b$;

II ділянка – $b \leq z \leq b + a$.

Визначаються поздовжні сили на кожній силовій ділянці. Для цього в межах ділянки проводиться довільний переріз і за методом перерізів визначається внутрішнє поздовжнє зусилля N_z . Внутрішнє зусилля дорівнює алгебраїчній сумі зовнішніх сил, що діють з однієї сторони перерізу. Щоб уникнути плутанини зі знаком невідомого зусилля, слід вважати його додатним і показувати у напрямком розтягання (від поперечного перерізу).

На I ділянці ($0 \leq z \leq b$):

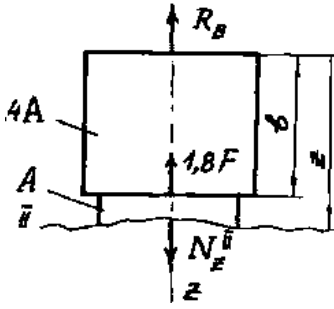


$$N_z^I - R_B = 0;$$

$$N_z^I = R_B = -16 \text{ кН.}$$

Поздовжня сила на ділянці постійна, ділянка стержня стиснута.

На II ділянці ($b \leq z \leq b + a$):



$$N_z^{II} - R_B - 1,8 \cdot F = 0;$$

$$N_z^{II} - 1,8 \cdot F + R_B = 1,8 \cdot 20 - 16 = 20 \text{ кН.}$$

Поздовжня сила на ділянці постійна, ділянка стержня розтягнута.

Будується еюра $N_z(z)$ (рис. 2.1, б).

Для судження про міцність стержня необхідно визначити величину максимального напруження.

Напруження на кожній ділянці визначаються за формулою:

$$\sigma_z = \frac{N_z}{A}$$

Внутрішнє зусилля та площа поперечного перерізу в межах кожної ділянки незмінні, тому напруження на ділянках будуть постійними.

На I ділянці ($0 \leq z \leq b$):

$$\sigma_z^I = \frac{N_z^I}{1,4A} = \frac{-16 \cdot 10^{-3}}{1,4 \cdot 4 \cdot 10^{-2}} = -28,57 \text{ МПа}$$

На II ділянці ($b \leq z \leq b + a$):

$$\sigma_z^{II} = \frac{N_z^{II}}{1,4A} = \frac{20 \cdot 10^{-3}}{4 \cdot 10^{-4}} = 50 \text{ МПа}$$

Будується еюра σ_z (рис. 2.1, в), з якої видно, що напруження на найбільш навантаженій (напруженій) другій ділянці не перевищують допустимих:

$$\sigma_{max} = 50 \text{ МПа} < [\sigma].$$

Визначаються переміщення перерізів стержня, м, які в межах ділянок змінюються за лінійним законом (графік якого є пряма лінія), тому для побудови епюри $\Delta l(z)$ достатньо знайти значення переміщень у двох перерізах на кожній ділянці.

На I ділянці ($0 \leq z \leq b$) лінійна функція має вигляд:

$$\Delta l^I(z) = \frac{N_z^I \cdot z}{E \cdot 1,4A}$$

Отже, при $z = 0$ $\Delta l^I(z) = 0$;

при $z = b = 1,4 \text{ м}$

$$\Delta l^I(1,4) = \frac{-16 \cdot 10^3 \cdot 1,4}{2 \cdot 10^5 \cdot 1,4 \cdot 10^2} = -2 \cdot 10^{-4}$$

На II ділянці ($b \leq z \leq b + a$) лінійна функція має вигляд:

$$\Delta l^{II}(z) = \Delta l^I(1,4) + \frac{N_z^{II} \cdot (z - b)}{E \cdot A}$$

Тоді при $z = b = 1,4 \text{ м}$

$$\Delta l^{II}(1,4) = \Delta l^I(1,4) = -2 \cdot 10^{-4}$$

при $z = b + a = 3,5 \text{ м}$

$$\Delta l^{II}(3,5) = -2 \cdot 10^{-4} + \frac{20 \cdot 10^{-3} (3,5 - 1,4)}{2 \cdot 10^5 \cdot 4 \cdot 10^{-4}} = 3,25 \cdot 10^{-4}$$

Будується епюра $\Delta l(z)$ (рис. 2.1, г).

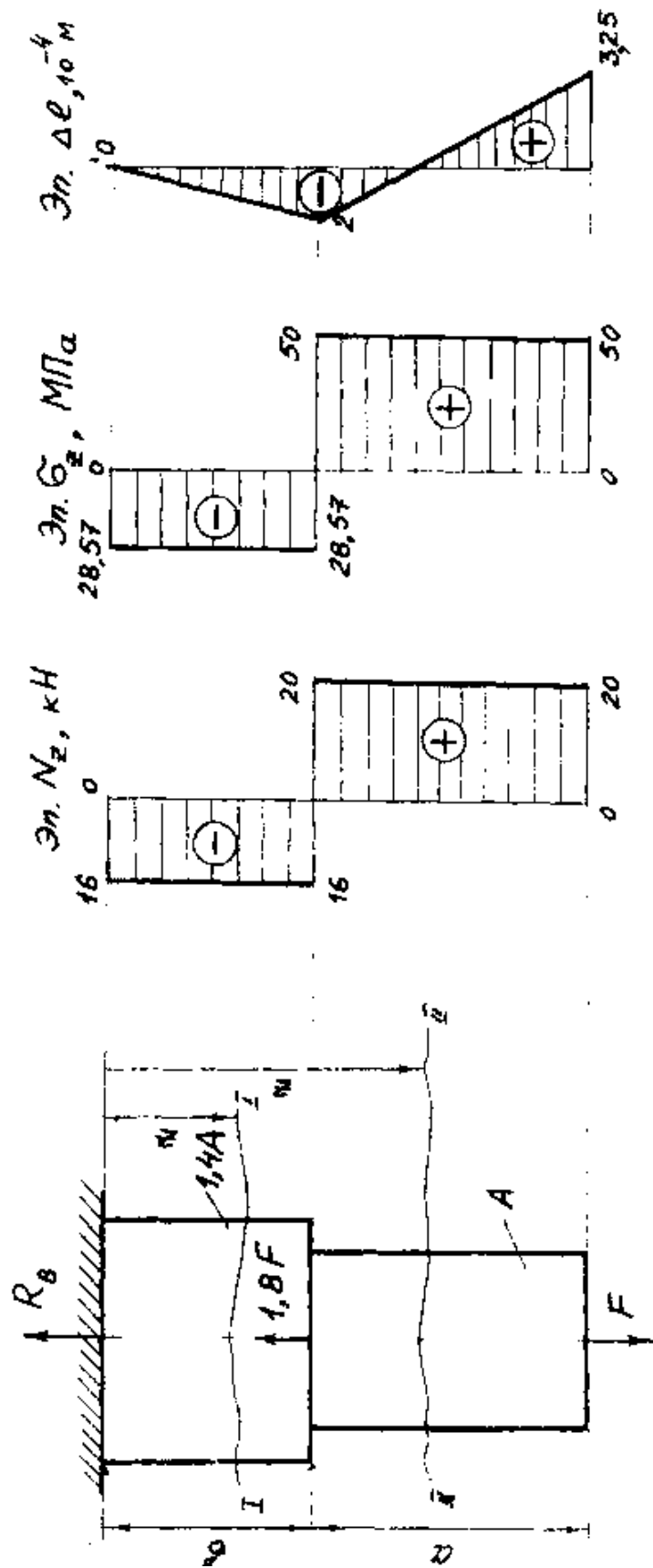


Рисунок 2.1 – Розрахунок статично визначеного стержня при центральному розтяганні або стисканні без урахування власної ваги

2.2 Розрахунки при центральному розтяганні або стисканні з урахуванням власної ваги стержня

Для сталюого ступінчастого стержня необхідно:

1) визначити поздовжні сили N_z , нормальні напруження σ_z та переміщення Δl характерних перерізів за довжиною стержня з урахуванням власної ваги стержня, приймаючи питому вагу (щільність) сталі, модуль пружності та допустиме напруження рівними:

$$\gamma = 7,8 \cdot 10^4 \text{ Н/м}^3 = 78 \text{ кН/м}^3, \quad E = 2 \cdot 10^5 \text{ МПа}, \quad [\sigma] = 210 \text{ МПа}.$$

2) побудувати епюри поздовжніх зусиль, нормальних напружень та переміщень.

Розрахункові схеми та вихідні дані для виконання індивідуального завдання самостійної роботи наведені в п. 2.6, табл. 2.1.

Вихідні дані для розрахунку:

- довжина ділянки стержня $a = 2$ м;
- довжина ділянки стержня $b = 3,3$ м;
- площа поперечного перерізу $A = 8 \text{ см}^2$;
- зовнішні сили F та $3 \cdot F$, де $F = 50$ кН.

Розрахункову схему наведено на рис. 2.2, а.

Знаходиться опорна реакція в закладенні. Проектуючи всі сили на поздовжню вісь стержня, з рівняння рівноваги виходить, що:

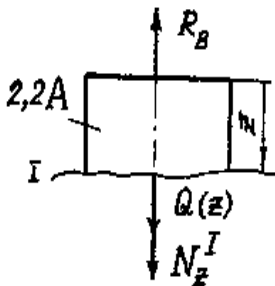
$$3 \cdot F - F - R_B + \gamma \cdot 2,2 \cdot A \cdot 2 \cdot a + \gamma \cdot A \cdot b = 0.$$

Це вираження враховує повну вагу стержня, тоді:

$$R_B = 2F + \gamma A(4,4a + b) = 2 \cdot 50 + 78 \cdot 8 \cdot 10^{-4}(4,4 \cdot 2 + 3,3) = 100,755 \text{ кН}$$

Стержень розбивається на силові ділянки і визначаються поздовжні сили на кожній ділянці.

На I ділянці ($0 \leq z \leq a$) має місце лінійна залежність:



$$N_z^I + Q(z) - R_B = 0$$

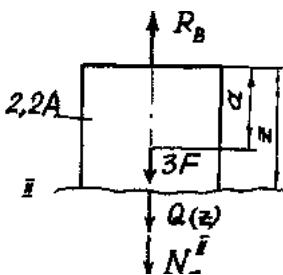
$$Q(z) = \gamma \cdot 2,2A \cdot z$$

$$N_z^I(z) = R_B - \gamma \cdot 2,2A \cdot z$$

Отже, при $z = 0$ $N_z^I = R_B = 100,755 \text{ кН};$

при $z = a = 2 \text{ м}$ $N_z^I = 100,755 - 78 \cdot 2,2 \cdot 8 \cdot 10^{-4} \cdot 2 = 100,48 \text{ кН}.$

На II ділянці ($a \leq z \leq 2 \cdot a$) лінійна функція має вигляд:



$$N_z^{II} + 3F + Q(z) - R_B = 0$$

$$N_z^{II}(z) = R_B - 3F - \gamma \cdot 2,2A \cdot z$$

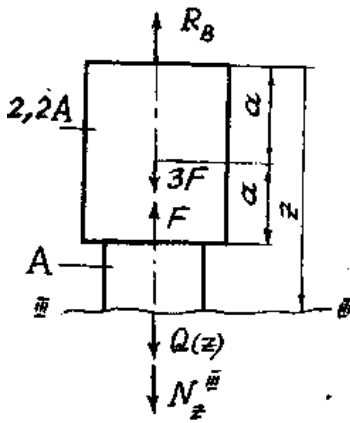
Таким чином, при $z = a = 2 \text{ м}:$

$$N_z^{II} = 100,755 - 3 \cdot 50 - 78 \cdot 2,2 \cdot 8 \cdot 10^{-4} \cdot 2 = -49,52 \text{ кН}$$

При $z = 2 \cdot a = 4 \text{ м}:$

$$N_z^{II} = 100,755 - 3 \cdot 50 - 78 \cdot 2,2 \cdot 8 \cdot 10^{-4} \cdot 4 = -49,794 \text{ кН}$$

На III ділянці ($2 \cdot a \leq z \leq 2 \cdot a + b$) функція також лінійна:



$$N_z^{III} + 3F + Q(z) - R_B - F = 0$$

$$N_z^{III}(z) = R_B - 2F - Q(z)$$

$$Q(z) = \gamma \cdot 2,2A \cdot 2a + \gamma A(z - 2a)$$

При $z = 2 \cdot a = 4$ м:

$$N_z^{III} = 100,755 - 2 \cdot 50 - 78 \cdot 2,2 \cdot 8 \cdot 10^{-4} \cdot 4 = 0,206 \text{ кН}$$

При $z = 2 \cdot a + b = 7,3$ м:

$$N_z^{III} = 100,755 - 2 \cdot 50 - 78 \cdot 8 \cdot 10^{-4} (7,3 - 4) = 0$$

За одержаними значеннями будеться ешюра N_z (рис. 2.2, б).

Визначаються значення напружень, які на кожній ділянці також змінюються за лінійним законом за формулою:

$$\sigma_z(z) = N_z(z) / A$$

На I ділянці ($0 \leq z \leq a$):

при $z = 0$

$$\sigma_z^I = \frac{100,755 \cdot 10^{-3}}{2,2 \cdot 8 \cdot 10^{-4}} = 57,25 \text{ МПа}$$

при $z = a = 2$ м

$$\sigma_z^I = \frac{100,48 \cdot 10^{-3}}{2,2 \cdot 8 \cdot 10^{-4}} = 57,09 \text{ МПа}$$

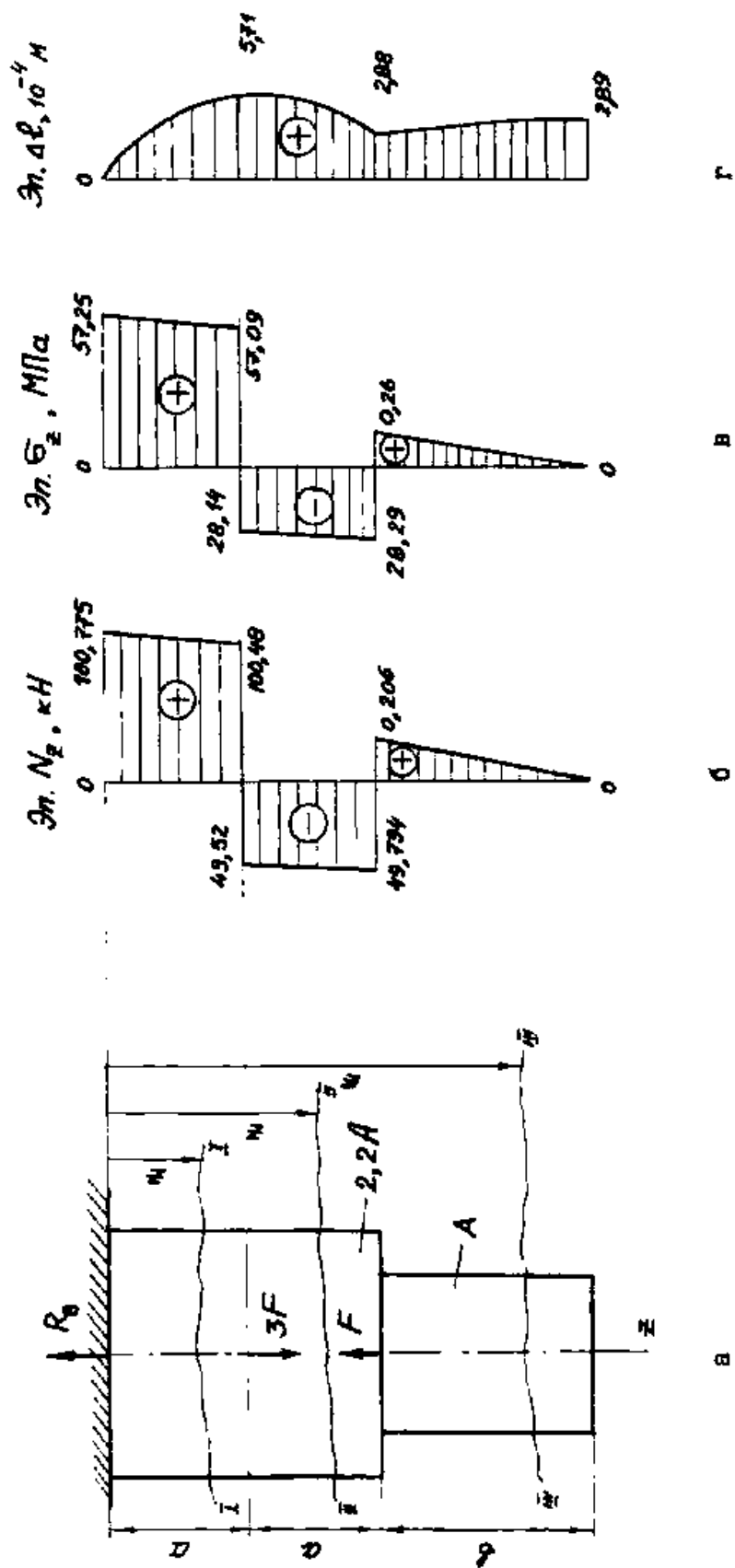


Рисунок 2.2 – Розрахунок статично визначеного стержня при центральному розтяганні або стисканні з урахуванням власної ваги

На II ділянці ($a \leq z \leq 2 \cdot a$):

при $z = a = 2$ м

$$\sigma_z^{II} = \frac{-49,52 \cdot 10^{-3}}{2,2 \cdot 8 \cdot 10^{-4}} = -28,14 \text{ МПа}$$

при $z = 2 \cdot a = 4$ м

$$\sigma_z^{II} = \frac{-49,794 \cdot 10^{-3}}{2,2 \cdot 8 \cdot 10^{-4}} = -28,29 \text{ МПа}$$

На III ділянці ($2 \cdot a \leq z \leq 2 \cdot a + b$):

при $z = 2 \cdot a = 4$ м

$$\sigma_z^{III} = \frac{0,206 \cdot 10^{-3}}{8 \cdot 10^{-4}} = 0,26 \text{ МПа}$$

при $z = 2 \cdot a + b = 7,3$ м $\sigma_z^{III} = 0$.

Умова міцності виконується, тому що $\sigma_{max} = 57,25$ МПа, що менше допустимого значення $[\sigma] = 210$ МПа. За одержаними значеннями будується епюра σ_z (рис. 2.2, в).

Визначаються значення переміщень. За умови безперервності на межах суміжних ділянок значення переміщень повинні збігатися. Переміщення при $z = 0$ (в закладенні) відомо заздалегідь: $\Delta l'(0) = 0$.

На I ділянці ($0 \leq z \leq a$) переміщення за довжиною стержня змінюються за законом квадратної параболи:

$$\Delta l'(z) = \frac{N_z(z) \cdot z}{E \cdot 2,2A} + \frac{Q(z) \cdot z}{2E \cdot 2,2A}$$

при $z = 0$ $\Delta l^I(0) = 0$

при $z = a = 2$ м

$$\Delta l^I(a) = \frac{100,48 \cdot 10^{-3} \cdot 2}{2 \cdot 10^5 \cdot 2,2 \cdot 8 \cdot 10^{-4}} + \frac{78 \cdot 10^{-3} \cdot 2,2 \cdot 8 \cdot 10^{-4} \cdot 2}{2,2 \cdot 10^5 \cdot 2,2 \cdot 8 \cdot 10^{-4}} = 0,571 \cdot 10^{-3} \text{ м}$$

Аналогічно на II ділянці ($a \leq z \leq 2 \cdot a$):

$$\Delta l^II(z) = \Delta l^I(a) + \frac{N^II_z(z) \cdot (z - a)}{E \cdot 2,2A} + \frac{Q(z) \cdot (z - a)}{2E \cdot 2,2A}$$

при $z = a = 2$ м

$$\Delta l^II(a) = \Delta l^I(a) = 0,571 \cdot 10^{-3} \text{ м}$$

при $z = 2 \cdot a = 4$ м

$$\Delta l^II(2a) = 0,571 \cdot 10^{-3} + \frac{-49,794 \cdot 10^{-3} \cdot 2}{2 \cdot 10^5 \cdot 2,2 \cdot 8 \cdot 10^{-4}} + \frac{78 \cdot 10^{-3} \cdot 2,2 \cdot 8 \cdot 10^{-4} \cdot 2}{2 \cdot 2 \cdot 10^5 \cdot 2,2 \cdot 8 \cdot 10^{-4}} = 0,288 \cdot 10^{-3} \text{ м}$$

На III ділянці ($2 \cdot a \leq z \leq 2 \cdot a + b$):

$$\Delta l^III(z) = \Delta l^II(a) + \frac{N^III_z(z) \cdot (z - 2a)}{E \cdot A} + \frac{Q(z) \cdot (z - 2a)}{2E \cdot A}$$

при $z = 2 \cdot a = 4$ м

$$\Delta l^III(2a) = \Delta l^II(2a) = 0,288 \cdot 10^{-3} \text{ м}$$

при $z = 2 \cdot a + b = 7,3$ м

$$\Delta l^III(2a + b) = 0,288 \cdot 10^{-3} + \frac{78 \cdot 10^{-3} \cdot 8 \cdot 10^{-4} \cdot 3,3}{2 \cdot 2 \cdot 10^5 \cdot 8 \cdot 10^{-4}} = 0,289 \cdot 10^{-3} \text{ м}$$

Будується епюра $\Delta l(z)$ (рис. 2.1, г).

2.3 Розрахунки при центральному розтяганні або стисканні статично невизначених стержнів

Для ступінчастого статично невизначеного стержня необхідно:

- 1) знайти невідомі реакції опор;
- 2) визначити поздовжні сили N_z , нормальні напруження σ_z та переміщення Δl характерних перерізів за довжиною стержня, приймаючи модуль пружності та допустиме напруження рівними:

$$E = 2 \cdot 10^5 \text{ МПа}, \quad [\sigma] = 210 \text{ МПа.}$$

- 3) побудувати епюри поздовжніх зусиль, нормальних напружень та переміщень;

- 4) оцінити міцність стержня.

Власна вага матеріалу стержня не враховується.

Розрахункові схеми та вихідні дані для виконання індивідуального завдання самостійної роботи наведені в п. 2.6, табл. 2.2.

Вихідні дані для розрахунку:

- довжина ділянки стержня $a = 0,4$ м;
- довжина ділянки стержня $b = 1,6$ м;
- площа поперечного перерізу $A = 4,5$ см²;
- зовнішні сили F та $1,3 \cdot F$, де $F = 50$ кН.

Розрахункову схему стержня, що розглядається у якості прикладу, наведено на рис. 2.3, а.

Для статично невизначених елементів конструкцій розглядається три сторони задачі – статична, геометрична та фізична, рівняння яких зводяться в єдину систему рівнянь.

Статична сторона задачі визначається рівняннями статичної рівноваги механічної системи. У випадку центрального розтягання або стискання існує

лише одне рівняння рівноваги:

$$\sum F_{iz} = 0 \quad (2.1)$$

$$1,3F - F + R_B - R_A = 0$$

В це рівняння одночасно входить дві невідомі опорні реакції, отже ступінь статичної невизначеності системи

$$СНС = H - P = 2 - 1 = 1.$$

Таким чином, для визначення опорних реакцій необхідно залучити ще одне додаткове рівняння сумісності деформацій, яке математично описує обмеження, що накладають зайві опори на переміщення системи.

Рівняння сумісності деформацій складають геометричну сторону статично невизначеної задачі.

У прикладі, що розглядається, обидва кінця статично невизначеного стержня жорстко закріплені, отже його загальна довжина не зміниться:

$$\Delta l_{\Sigma} = 0$$

Із системи видаляється будь-яка з опор – наприклад, нижня, – замість якої прикладається реакція R_A для того, щоб система була еквівалентною первісній (рис. 2.3, б). Приймається до уваги принцип суперпозиції, тобто вважається, що сумарне подовження нижнього кінця стержня складається з подовжень (або укорочень), викликаних кожним із зовнішніх навантажень, які діють незалежно одне від одного:

$$\Delta l_A = \Delta l_{\Sigma} = \Delta l_{F_1} + \Delta l_{F_2} + \Delta l_{R_A} = 0. \quad (2.2)$$

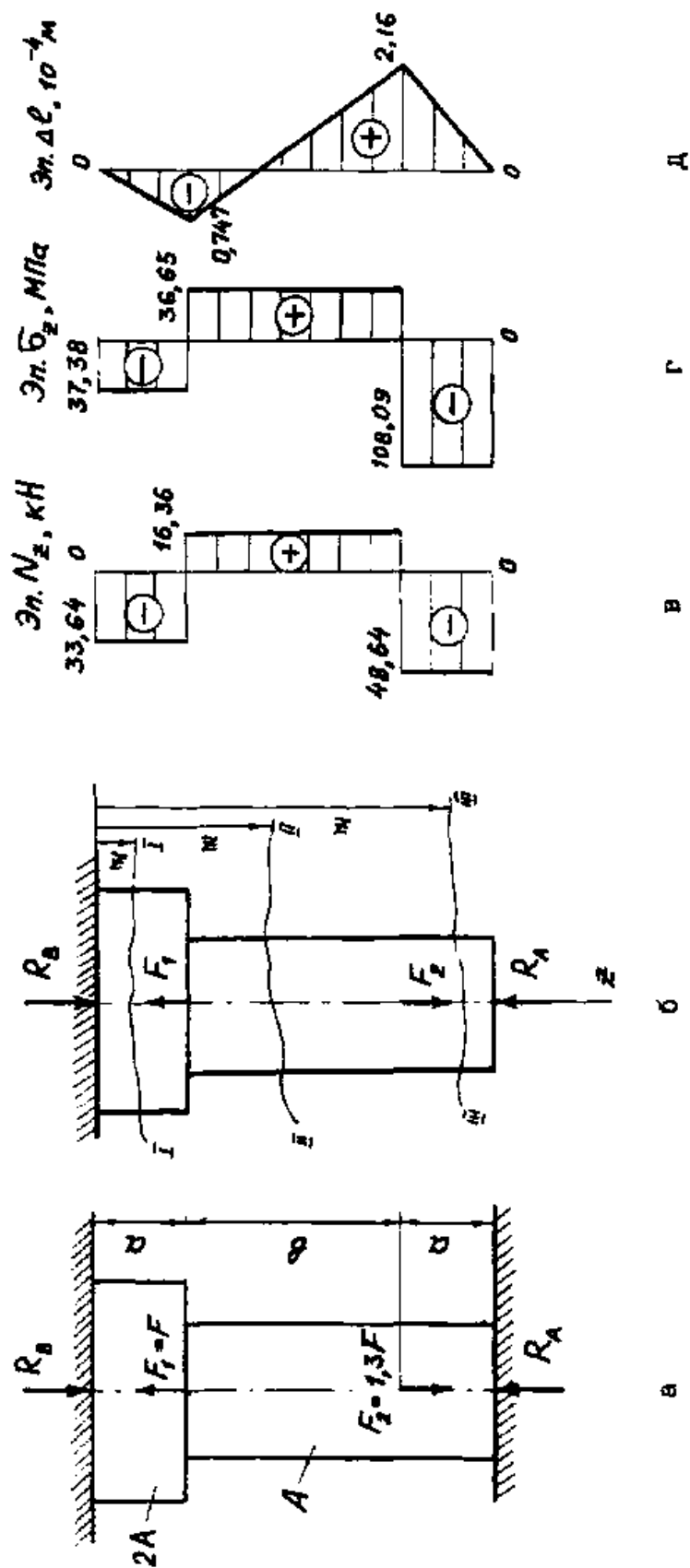


Рисунок 2.3 – Розрахунок статично невизначеного стержня при центральному розтяганні або стисканні без урахування власної ваги

Для розкриття фізичного змісту рівняння сумісності деформацій (2.2) використовується фізична сторона задачі, що базується на законі Гука:

$$\Delta l_{F_1} = \frac{-F_1 \cdot a}{E \cdot 2A} = \frac{-F \cdot a}{2EA}$$

$$\Delta l_{F_2} = \frac{F_2 \cdot a}{E \cdot 2A} + \frac{F_2 \cdot b}{E \cdot A} = \frac{1,3Fa + 2,6F \cdot b}{2EA} = \frac{1,3F(a + 2b)}{2EA}$$

$$\Delta l_{R_A} = \frac{-R_A \cdot a}{E \cdot 2A} + \frac{-R_A(a + b)}{EA} = \frac{R_A \cdot a + 2R_A(a + b)}{2EA} = \frac{-R_A(3a + 2b)}{2EA}$$

Всі рівняння синтезуються в єдину систему, або розглядаються послідовно. Для цього одержані із розгорнутого закону Гука співвідношення підставляються в геометричне рівняння (2.2). Після скорочення на $2 \cdot E \cdot A$ виходить:

$$-F \cdot a + 1,3F(a + 2b) - R_A(3a + 2b) = 0$$

Має місце одне рівняння з однією невідомою реакцією R_A , кН, звідки:

$$R_A = \frac{1,3Fa + 2,6Fb - Fa}{3a + 2b} = \frac{0,3 \cdot 50 \cdot 0,4 + 2,6 \cdot 50 \cdot 1,6}{3 \cdot 0,4 + 2 \cdot 1,6} = 48,64$$

Тоді з рівняння статичної рівноваги (2.1) реакція R_B , кН:

$$R_B = R_A - 0,3F = 48,64 - 0,3 \cdot 50 = 33,64$$

Таким чином, статична невизначеність задачі розкрита. Тепер стержень можна розглядати як статично визначений, відкинувши одну жорстку опору та замінивши її дію відповідною реакцією, яка фактично є зовнішньою зосередженою силою.

Далі визначаються внутрішні зусилля N_z , напруження σ_z та переміщення $\Delta l(z)$ – повністю аналогічно статично визначеній задачі. Ці питання детально розібрані в п. 2.1, в цьому прикладі наведені тільки основні результати розрахунків.

Ділянка I ($0 \leq z \leq a$):

$$N_z^I = -R_B = -33,64 \text{ кН};$$

$$\sigma_z^I = \frac{N_z^I}{2A} = \frac{-33,64 \cdot 10^{-3}}{2 \cdot 4,5 \cdot 10^{-4}} = -37,38 \text{ МПа};$$

при $z = 0$

$$\Delta l^I = 0;$$

при $z = a = 0,4 \text{ м}$

$$\Delta l^I = \frac{N_z^I \cdot a}{2EA} = \frac{-33,64 \cdot 10^{-3} \cdot 0,4}{2 \cdot 2 \cdot 10^5 \cdot 4,5 \cdot 10^{-4}} = -7,47 \cdot 10^{-5} \text{ м.}$$

Ділянка II ($a \leq z \leq a + b$):

$$N_z^{II} = F_1 - R_B = 50 - 33,64 = 16,36 \text{ кН};$$

$$\sigma_z^{II} = \frac{N_z^{II}}{A} = \frac{16,36 \cdot 10^{-3}}{4,5 \cdot 10^{-4}} = 36,35 \text{ МПа};$$

при $z = a = 0,4 \text{ м}$

$$\Delta l^{II}(a) = \Delta l^I(a) = -7,47 \cdot 10^{-5} \text{ м};$$

при $z = a + b = 2 \text{ м}$

$$\Delta l^{II} = -7,47 \cdot 10^{-5} + \frac{N_z^{II} \cdot b}{EA} = -7,47 \cdot 10^{-5} + \frac{16,36 \cdot 10^{-3} \cdot 1,6}{2 \cdot 10^5 \cdot 4,5 \cdot 10^{-4}} = 2,16 \cdot 10^{-4} \text{ м.}$$

Ділянка III ($a + b \leq z \leq 2 \cdot a + b$):

$$N_z^{III} = F_1 - R_B - F_2 = 50 - 33,64 - 1,3 \cdot 50 = -48,64 \text{ кН};$$

$$\sigma_z^{III} = \frac{N_z^{III}}{A} = \frac{-48,64 \cdot 10^{-3}}{4,5 \cdot 10^{-4}} = -108,09 \text{ МПа};$$

при $z = a + b = 2 \text{ м}$

$$\Delta l^{III}(a+b) = \Delta l^{II}(a+b) = -2,16 \cdot 10^{-4} \text{ м};$$

при $z = 2 \cdot a + b = 2,4 \text{ м}$

$$\Delta l^{III} = 2,16 \cdot 10^{-4} + \frac{N_z^{III} \cdot a}{EA} = 2,16 \cdot 10^{-4} + \frac{-48,64 \cdot 10^{-3} \cdot 0,4}{2 \cdot 10^5 \cdot 4,5 \cdot 10^{-4}} = 2,16 \cdot 10^{-4} - 2,16 \cdot 10^{-4} = 0$$

Нульове значення переміщення нижнього кінця стержня свідчить про те, що розрахунок проведений правильно.

Найбільш напруженою є третя ділянка, на якій міцність стержня забезпечується, адже:

$$\sigma_{max} = |\sigma_z^{III}| = 108,09 \text{ МПа} < [\sigma] = 210 \text{ МПа}.$$

За результатами розрахунку будуються епюри розрахункових параметрів (рис. 2.3, в, г, д).

2.4 Урахування впливу нагрівання при розрахунках на центральне розтягання або стискання

Стальний ступінчастий стержень (рис. 2.4) жорстко закріплений з одного кінця. Зазор між іншим кінцем стержня і жорсткою опорою дорівнює Δ . В процесі експлуатації стержень нагрівається на $20\text{ }^\circ\text{C}$. Необхідно:

1) визначити поздовжні сили N_z , нормальні напруження σ_z та переміщення Δl характерних перерізів за довжиною стержня, приймаючи модуль пружності та допустиме напруження рівними:

$$E = 2 \cdot 10^5 \text{ МПа}, \quad [\sigma] = 210 \text{ МПа}.$$

2) побудувати епюри поздовжніх зусиль, нормальних напружень та переміщень.

Власна вага матеріалу стержня не враховується.

Розрахункові схеми та вихідні дані для виконання індивідуального завдання самостійної роботи наведені в п. 2.6, табл. 2.3.

Вихідні дані для розрахунку:

- довжина ділянки стержня $a = 1,2$ м;
- довжина ділянки стержня $b = 1,9$ м;
- площа поперечного перерізу $A = 5$ см²;
- зовнішні сили F та $0,6 \cdot F$, де $F = 100$ кН;
- зазор $\Delta = 15$ мм;
- різниця температур $\Delta t = 20$ °С;
- коефіцієнт лінійного розширення матеріалу $\alpha = 12 \cdot 10^{-6}$ °С⁻¹.

Розрахункову схему стержня, що розглядається у якості прикладу, наведено на рис. 2.4.

Перш за все необхідно з'ясувати, чи не виявиться можливе переміщення вільного кінця стержня Δl_{Σ} більше зазору Δ . У цьому випадку

задача буде статично невизначеною.

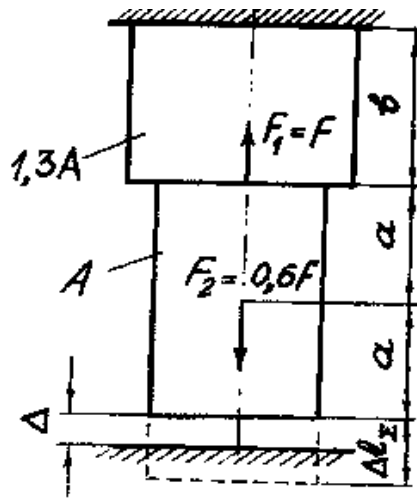


Рисунок 2.4 – Розрахункова схема стержня

Як у статично невизначених задачах на центральне розтягання або стискання, використовується принцип суперпозиції:

$$\Delta l_{\Sigma} = \Delta l_{F_1} + \Delta l_{F_2} + \Delta l_t \quad (2.3)$$

Тут Δl_{F_1} , Δl_{F_2} , Δl_t – переміщення вільного кінця стержня, викликані дією сил F_1 , F_2 і нагріванням.

Із закону Гука:

$$\Delta l_{F_1} = -\frac{F_1 \cdot b}{E \cdot 1,3A} = -\frac{Fb}{1,3EA}$$

$$\Delta l_{F_2} = -\frac{F_2 \cdot a}{E \cdot 1,3A} + \frac{F_2 \cdot b}{EA} = \frac{0,6F(b+1,3a)}{1,3EA}$$

Подовження, викликане впливом температури:

$$\Delta l_t = \alpha \cdot \Delta t \cdot (b + 2a)$$

Тоді з (2.3) для Δl_{Σ} можна отримати:

$$\begin{aligned}\Delta l_{\Sigma} &= -\frac{F \cdot b}{1,3EA} + \frac{0,6F \cdot b + 0,78F \cdot a}{1,3EA} + \alpha \cdot \Delta t \cdot (b + 2a) = \\ &= \frac{-0,4 \cdot 100 \cdot 10^{-3} \cdot 1,9 + 0,78 \cdot 100 \cdot 10^{-3} \cdot 1,2}{1,3 \cdot 2 \cdot 10^5 \cdot 5 \cdot 10^{-4}} + 12 \cdot 10^{-6} \cdot 20(1,9 + 2 \cdot 1,2) = \\ &= 0,1354 \cdot 10^{-3} + 1,032 \cdot 10^{-3} = 1,674 \cdot 10^{-3} \text{ м} \succ \Delta = 0,15 \cdot 10^{-3} \text{ м},\end{aligned}$$

тобто задача, що розглядається, є статично невизначеною, отже потрібно враховувати дію реакції R_A з боку непіддатливої нижньої опори.

Статично невизначені елементи конструкції розраховуються в послідовності, детально розглянутій в п. 2.3.

Розглядаючи статичну сторону задачі, яка представлена еквівалентною розрахунковою схемою стержня на рис. 2.5, а, можна скласти всього одне рівняння рівноваги:

$$\begin{aligned}\Sigma F_{iz} &= 0 \\ R_B + F_2 - F_1 - R_A &= 0\end{aligned}\tag{2.4}$$

Ступінь статичної невизначеності системи дорівнює:

$$CCHC = H - P = 2 - 1 = 1.$$

Геометрична сторона задачі складена одним додатковим рівнянням сумісності деформацій. За умовами задачі має виконуватися умова:

$$\Delta l_{\Sigma} - \Delta l_{R_A} = \Delta\tag{2.5}$$

Тут Δl_{R_A} – вкорочення, викликане дією реакції R_A , яка стискає весь стержень.

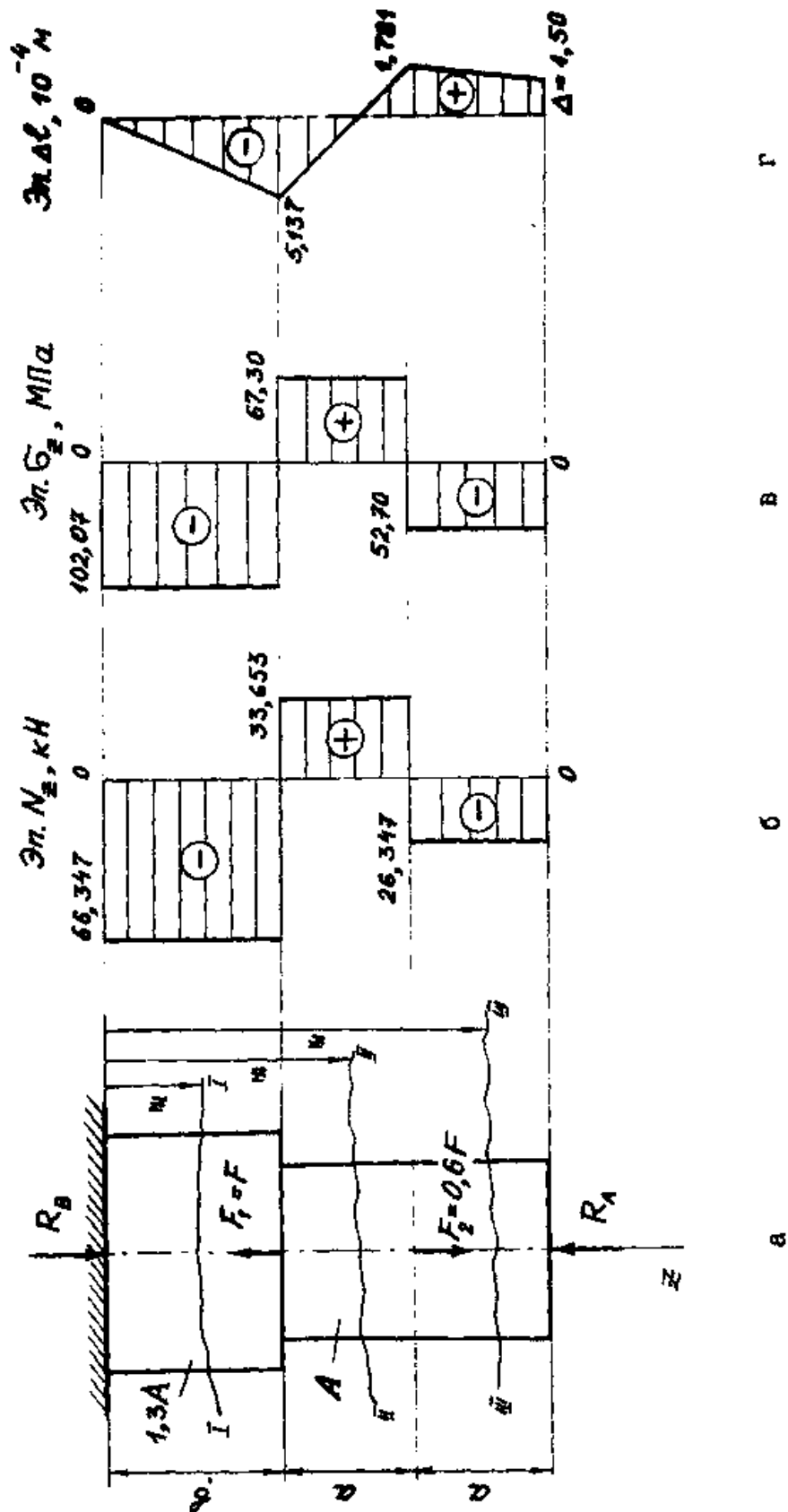


Рисунок 2.5 – Розрахунок стержня, що знаходиться під впливом нагрівання, при центральному розтяганні або стисканні

Фізична сторона задачі виражається законом Гука, використовуючи який для Δl_{RA} можна записати:

$$\Delta l_{RA} = \frac{R_A \cdot b}{E \cdot 1,3A} + \frac{R_A \cdot 2a}{EA}$$

З умови сумісності деформацій (2.5) визначається одна з невідомих реакцій, після чого її значення підставляється у рівняння рівноваги (2.4) і вираховується друга реакція:

$$R_A \left(\frac{b}{1,3A} + \frac{2a}{EA} \right) = \Delta l_{\Sigma} - \Delta$$

$$R_A = (\Delta l_{\Sigma} - \Delta) / \left(\frac{b}{1,3EA} + \frac{2a}{EA} \right) = \frac{1,1674 \cdot 10^{-3} - 0,15 \cdot 10^{-3}}{\frac{1,9}{1,3 \cdot 2 \cdot 10^5 \cdot 5 \cdot 10^{-4}} + \frac{2 \cdot 1,2}{2 \cdot 10^5 \cdot 5 \cdot 10^{-4}}} =$$

$$= 26,347 \cdot 10^{-3} \text{ МН} = 26,347 \text{ кН};$$

$$R_B = R_A + F_1 - F_2 = 26,347 + 100 - 0,6 \cdot 100 \text{ кН.}$$

Методом перерізів визначається внутрішня поздовжня сила N_z на кожній ділянці, після чого обчислюються напруження σ_z та переміщення Δl , які мають лінійне розподілення за довжиною стержня (детальніше див. п. 2.1), а також будуються епюри розрахункових параметрів (рис. 2.5, б, в, г).

Ділянка I ($0 \leq z \leq b$):

$$N_z^I = -R_B = -66,347 \text{ кН};$$

$$\sigma_z^I = \frac{N_z^I}{1,3A} = -\frac{66,347 \cdot 10^{-3}}{1,3 \cdot 5 \cdot 10^{-4}} = -102,07 \text{ МПа};$$

$$\Delta l^I(z) = \frac{N_z^I \cdot z}{E \cdot 1,3A} + \alpha \cdot \Delta t \cdot z$$

при $z = 0$

$$\Delta l'(0) = 0;$$

при $z = b = 1,9$ м

$$\Delta l'(b) = \frac{-66,347 \cdot 10^{-3} \cdot 1,9}{1,3 \cdot 2 \cdot 10^5 \cdot 5 \cdot 10^{-4}} + 12 \cdot 10^{-6} \cdot 20 \cdot 1,9 = 5,137 \cdot 10^{-4} \text{ м.}$$

Ділянка II ($b \leq z \leq b + a$):

$$N_z^{II} = -R_B + F_1 = -66,347 + 100 \text{ кН};$$

$$\sigma_z^{II} = \frac{N_z^{II}}{A} = -\frac{33,653 \cdot 10^{-3}}{5 \cdot 10^{-4}} = 67,30 \text{ МПа};$$

$$\Delta l''(z) = \Delta l'(b) + \frac{N_z^{II} \cdot (z - b)}{E \cdot A} + \alpha \cdot \Delta t \cdot (z - b)$$

при $z = b = 1,9$ м

$$\Delta l''(b) = \Delta l'(b) = -5,137 \cdot 10^{-4} \text{ м};$$

при $z = a + b = 3,1$ м

$$\Delta l''(a + b) = -5,137 \cdot 10^{-4} + \frac{33,653 \cdot 10^{-3} \cdot (3,1 - 1,9)}{2 \cdot 10^5 \cdot 5 \cdot 10^{-4}} + 12 \cdot 10^{-6} \cdot 20 \cdot (3,1 - 1,9) = 1,781 \cdot 10^{-4}$$

Ділянка III ($a + b \leq z \leq 2 \cdot a + b$):

$$N_z^{III} = -R_B + F_1 - F_2 = -66,347 + 100 - 0,6 \cdot 100 = -26,347 \text{ кН};$$

$$\sigma_z^{III} = \frac{N_z^{III}}{A} = -\frac{26,347 \cdot 10^{-3}}{5 \cdot 10^{-4}} = -52,70 \text{ МПа};$$

$$\Delta l^{III}(z) = \Delta l^{II}(a+b) + \frac{N_z^{III} \cdot (z-a-b)}{E \cdot A} + \alpha \cdot \Delta t \cdot (z-a-b)$$

при $z = a + b = 3,1$ м

$$\Delta l^{III}(a+b) = \Delta l^I(a+b) = 1,781 \cdot 10^{-4} \text{ м};$$

при $z = 2 \cdot a + b = 4,3$ м

$$\Delta l^{III}(2a+b) = 1,781 \cdot 10^{-4} + \frac{-26,347 \cdot 10^{-3} \cdot (4,3-3,1)}{2 \cdot 10^5 \cdot 5 \cdot 10^{-4}} + 12 \cdot 10^{-6} \cdot 20 \cdot (4,3-3,1) = 1,5 \cdot 10^{-4}$$

$$\Delta l^{III}(2 \cdot a + b) = 1,5 \cdot 10^{-4} \text{ м} = \Delta.$$

Одержане за розрахунком переміщення вільного кінця стержня дорівнює зазору. Це відповідає постановці задачі та свідчить про правильність результатів розрахунку.

Також виконується умова міцності:

$$\sigma_{max} = \sigma_z^I = 102,07 \text{ МПа} < [\sigma] = 210 \text{ МПа}.$$

2.5 Розрахунок статично невизначених стержневих систем

Для системи, що складається з абсолютно жорсткого бруса, який опирається на шарнірно нерухому опору та прикріплених до нього двох сталевих стержнів, і знаходиться під дією зовнішнього навантаження, потрібно:

1) визначити внутрішні зусилля і напруження в сталевих стержнях при заданих навантаженнях в системі та співвідношенні площ перерізів стержнів, приймаючи модуль пружності і допустиме напруження рівними:

$$E = 2 \cdot 10^5 \text{ МПа}, \quad [\sigma] = 210 \text{ МПа.}$$

2) виходячи з умови міцності найбільш навантаженого стержня, визначити площі перерізів стержнів і фактичні напруження в них.

Власна вага матеріалу бруса та стержнів не враховується.

Розрахункові схеми та вихідні дані для виконання індивідуального завдання самостійної роботи наведені в п. 2.6, табл. 2.4.

Вихідні дані для розрахунку:

- довжина ділянки бруса $a = 2$ м;
- довжина ділянки бруса $b = 1,5$ м;
- довжина ділянки бруса $c = 2,5$ м;
- довжина сталевих стержня 1 $l_1 = 1,8$ м;
- довжина сталевих стержня 2 $l_2 = 1$ м;
- площа поперечного перерізу стержня 1 $A_1 = A$;
- площа поперечного перерізу стержня 2 $A_2 = 1,2 \cdot A$;
- кут нахилу $\alpha = 45^\circ$;
- зовнішнє навантаження – розподілене $q = 19$ кН/м і зосереджена сила $F = 15$ кН.

Розрахункову схему стержня, що розглядається у якості прикладу,

наведено на рис. 2.6.

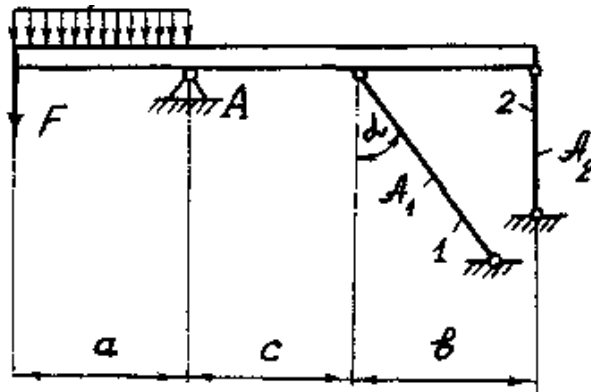


Рисунок 2.6 – Розрахункова схема статично невизначеної стержньової системи

Зовнішні навантаження прикладені таким чином, що стержні 1 і 2 будуть розтягуватися. Для того, щоб скласти рівняння статичної рівноваги, потрібно звільнити систему від закріплень, замінивши їх дію невідомими реакціями (рис. 2.7, а). Для плоскої задачі можна скласти лише три рівняння статички, але в заданій системі діють чотири невідомих Y_A, Z_A, N_1, N_2 . Тому задача є статично невизначеною, ступінь статичної невизначеності дорівнює:

$$CCHC = H - P = 4 - 3 = 1.$$

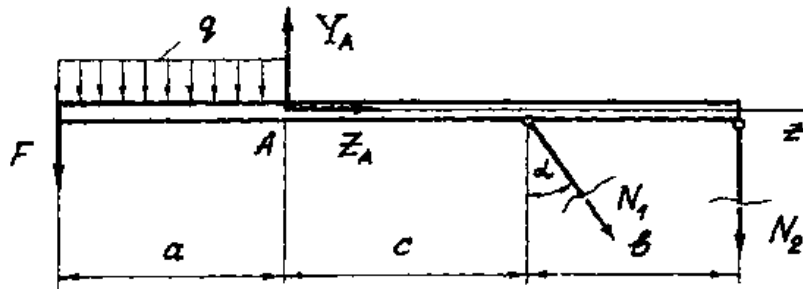
Для вирішення такої задачі розглядаються три групи рівнянь – статичні, геометричні, фізичні.

Статична сторона завдання описується рівняннями статичної рівноваги:

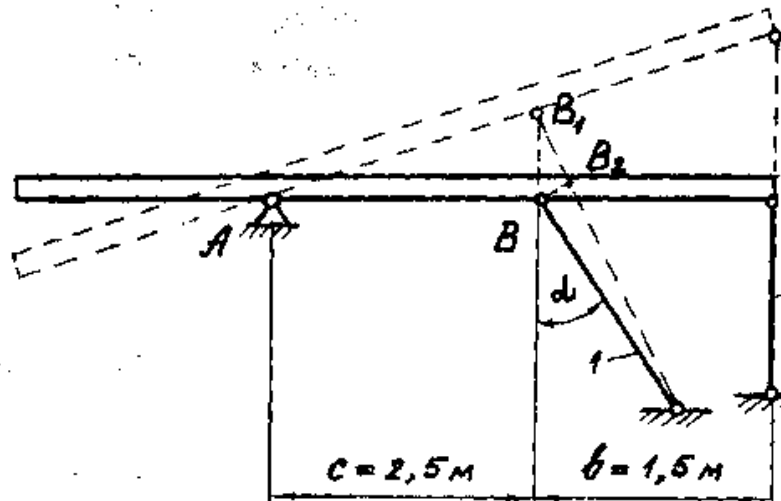
$$\sum F_{iy} = 0; \quad \sum F_{iz} = 0; \quad \sum M_{(A)} = 0.$$

За умовою задачі потрібно визначити тільки зусилля в стержнях 1 і 2,

отже перші два рівняння – для проєкцій сил на вертикальну та горизонтальну осі, необхідні для пошуку невідомих Y_A і Z_A , – деталізувати немає необхідності. Таким чином, залишається одне рівняння, яке містить два невідомих зусилля.



а)



б)

а) еквівалентна;

б) деформована.

Рисунок 2.7 – Розрахункові схеми стержньової системи

$$\sum M_{(A)} = 0$$

$$F \cdot a + q \cdot \frac{a^2}{2} - N_1 \cdot c \cdot \cos \alpha - N_2(c + b) = 0 \quad (2.6)$$

Для складання додаткового рівняння сумісності деформацій геометричної сторони задачі розглядається деформована схема стержньової системи (рис. 2.7, б).

Звертаючи увагу на те, що $\triangle ABB_1$ і $\triangle ACC_1$ – подібні трикутники, можна скласти співвідношення:

$$\frac{|BB_1|}{|CC_1|} = \frac{|AB|}{|AC|} = \frac{c}{b+c} \quad (2.7)$$

Тут $|CC_1| = \Delta l_2$, а $|B_1B_2| = \Delta l_1$ визначається з прямокутного трикутника BB_1B_2 :

$$|BB_1| \cdot \cos \alpha = |B_1B_2|$$

Тоді замість (2.7) можна записати:

$$\frac{\Delta l_1}{\Delta l_2 \cos \alpha} = \frac{c}{b+c}$$

$$\Delta l_1 = \frac{2,5}{4} \Delta l_2 \cos 45^\circ = \frac{2,5}{4} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \Delta l_2 = 0,44 \Delta l_2 \quad (2.8)$$

Фізична сторона задачі за допомогою закону Гука невідомі подовження (деформації стержнів), що входять у рівняння (2.8) представляє через діючі в них зусилля:

$$\Delta l_1 = \frac{N_1 \cdot l_1}{E \cdot A_1} \quad \Delta l_2 = \frac{N_2 \cdot l_2}{E \cdot A_2} \quad (2.9)$$

Підставляючи рівняння (2.9) у залежність (2.8), можна отримати ще

одне співвідношення, що пов'язує зусилля:

$$\Delta l_1 = 0,442 \frac{l_2}{A_2} \cdot \frac{A_1}{l_1} N_2 = 0,442 \frac{1}{1,2A} \cdot \frac{A}{1,8} N_2 = 0,205 N_2.$$

Тоді замість (2.6) можна записати:

$$15 \cdot 2 + 19 \cdot \frac{2^2}{2} - 0,205 N_2 \cdot 2,5 \cdot \cos 45^\circ - N_2(2,5 + 1,5) = 0.$$

Звідки:

$$N_2(0,205 \cdot 2,5 \cdot 0,707 + 4) = 68,$$

$$N_2 = \frac{68}{4,362} = 15,59 \text{ кН},$$

$$N_1 = 0,205 \cdot 15,59 = 3,19 \text{ кН}.$$

Визначаються площі поперечних перерізів стержнів і напруження.

Виходячи з умови міцності, можна записати:

$$\sigma_1 = \frac{N_1}{A_1} = \frac{3,19 \cdot 10^{-3}}{A} \leq [\sigma]$$

$$\sigma_2 = \frac{N_2}{A_2} = \frac{15,59 \cdot 10^{-3}}{1,2A} = \frac{12,99 \cdot 10^{-3}}{A} \leq [\sigma]$$

Другий стержень навантажений більше, адже на одну й ту саму площу поперечного перерізу A приходить більше зусилля. Таким чином, площа перерізу визначається з умови міцності для другого стержня:

$$A \geq \frac{12,99 \cdot 10^{-3}}{210} = 6,185 \cdot 10^{-5} \text{ м}^2 = 0,619 \text{ см}^2$$

$$A_1 = A = 0,619 \text{ см}^2$$

$$A_2 = 1,2A = 1,2 \cdot 0,619 \text{ см}^2 = 0,743 \text{ см}^2$$

Перераховуються фактичні напруження в стержнях визначеної площі поперечного перерізу:

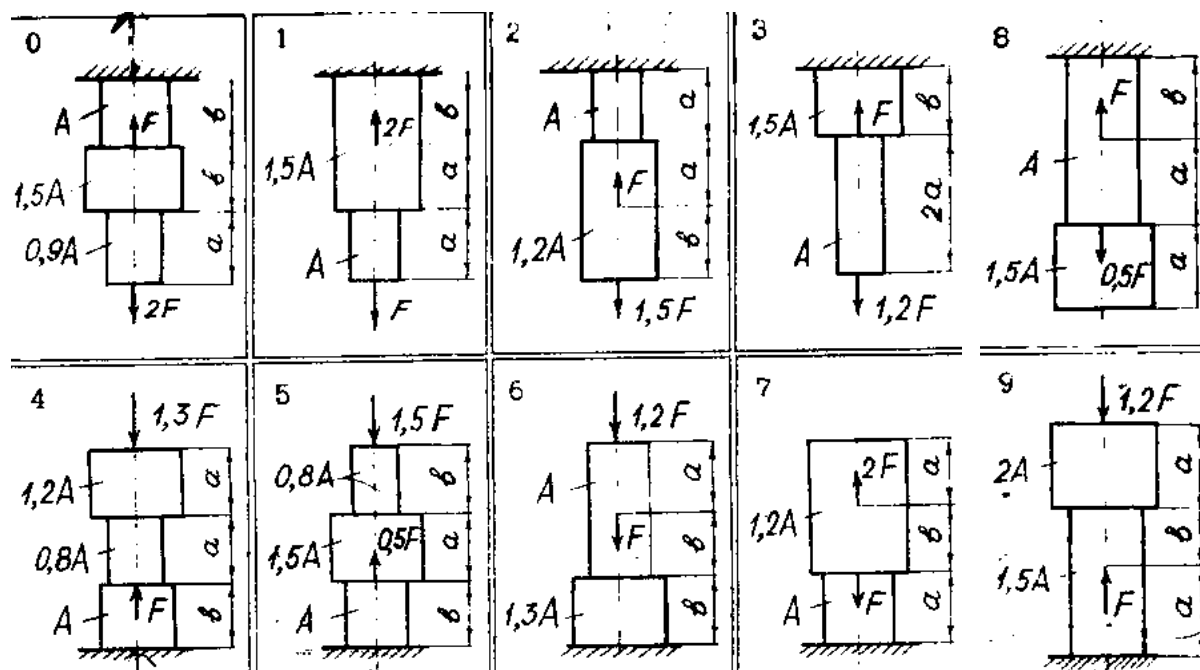
$$\sigma_1 = \frac{3,19 \cdot 10^{-3}}{0,619 \cdot 10^{-4}} = 51,53 \text{ МПа},$$

$$\sigma_2 = \frac{15,59 \cdot 10^{-3}}{0,743 \cdot 10^{-4}} = 209,82 \text{ МПа}.$$

Фактичні напруження σ_2 в другому стержні близькі, але не перевищують гранично допустиме $[\sigma] = 210 \text{ МПа}$. Це означає, що переріз стержнів підібраний раціонально.

2.6 Завдання до самостійної роботи за темою 2

Варіанти розрахункових схем статично визначених стержнів для вирішення задач без та з урахуванням власної ваги матеріалу (пп. 2.1...2.2):

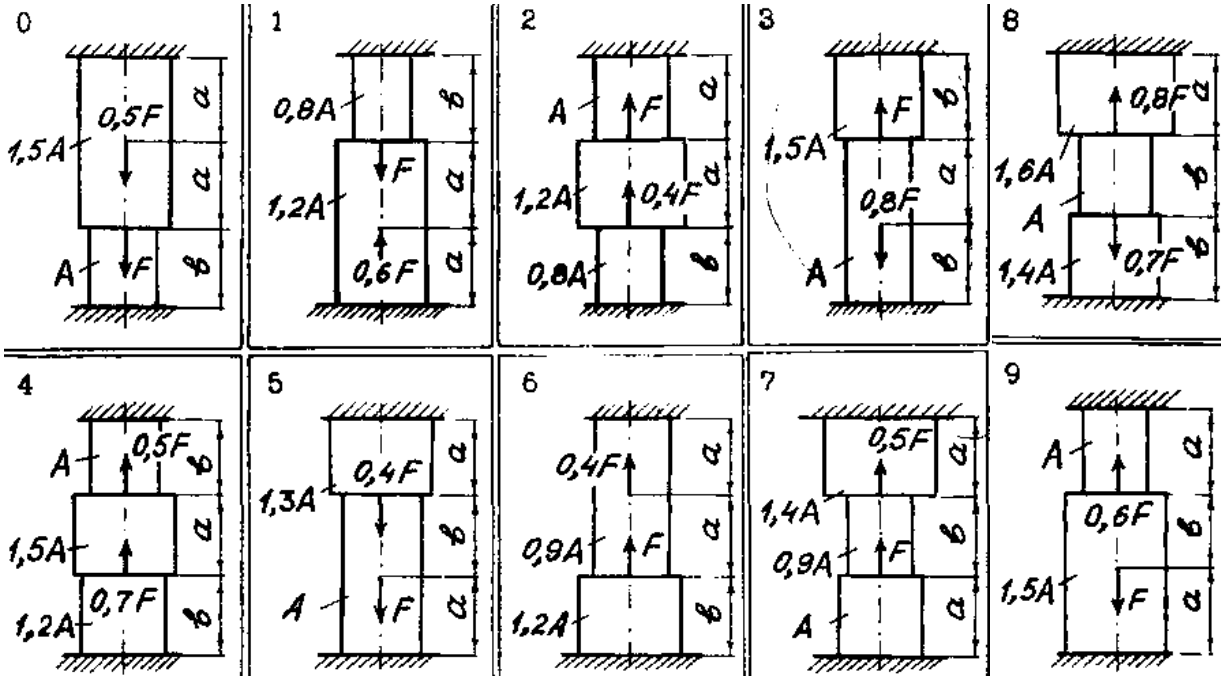


Таблиця 2.1 – Вихідні дані для розрахунку статично визначених стержнів

Перша Номер схеми	Цифри шифру			
	Друга		Третя	
	$a, \text{ м}$	$b, \text{ м}$	$A, \text{ см}^2$	$F, \text{ кН}$
0	1,0	2,0	5,0	10
1	1,1	1,9	5,0	20
2	1,2	1,8	6,5	25
3	1,3	1,7	6,5	25
4	1,4	1,6	7,0	35
5	1,5	1,5	7,5	40
6	1,6	1,4	8,0	45
7	1,7	1,3	9,0	50
8	1,8	1,2	9,5	55
9	1,9	1,1	10,0	60

Варіанти розрахункових схем статично невизначених стержнів

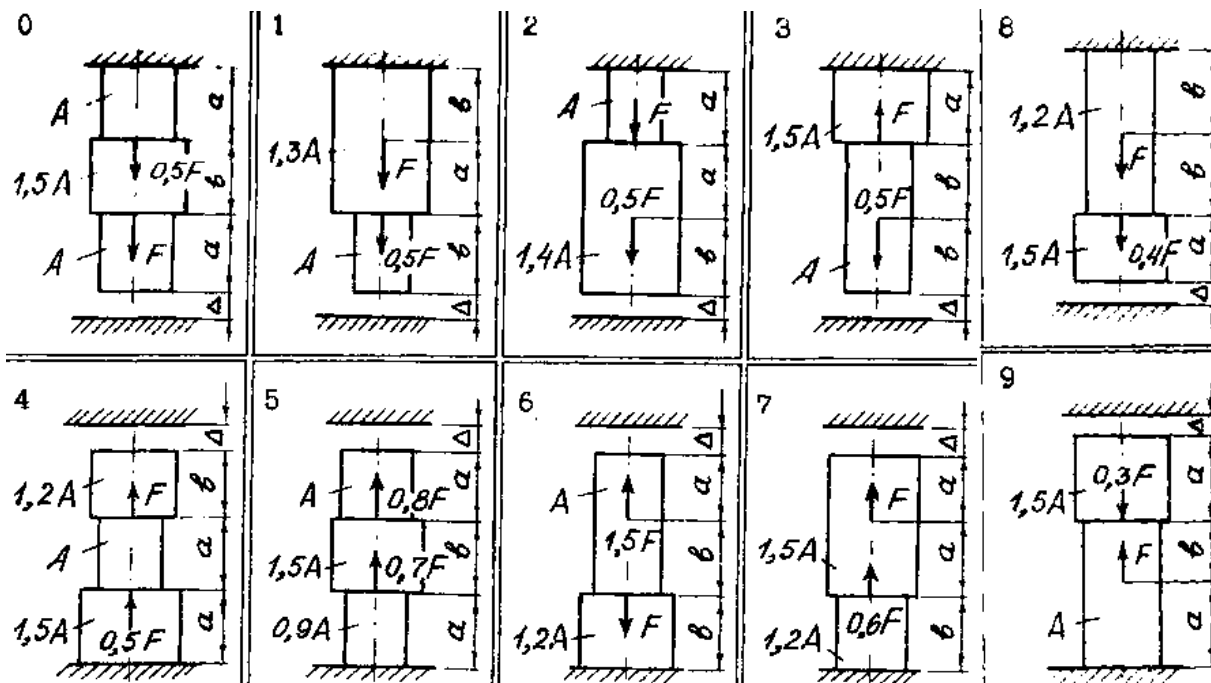
(п. 2.3):



Таблиця 2.2 – Вихідні дані для розрахунку статично невизначених стержнів

Цифри шифру				
Перша	Друга		Третя	
Номер схеми	a , м	b , м	A , см ²	F , кН
0	0,8	3,0	5,0	50
1	1,2	2,6	5,5	60
2	1,6	2,4	6,0	65
3	1,8	2,2	6,5	70
4	2,0	1,8	7,0	75
5	2,2	1,6	7,5	80
6	2,4	1,4	8,0	85
7	2,6	1,2	8,5	90
8	2,8	1,0	9,0	95
9	3,0	0,8	10,0	100

Варіанти розрахункових схем стержнів, що знаходяться під впливом нагрівання (п. 2.4):

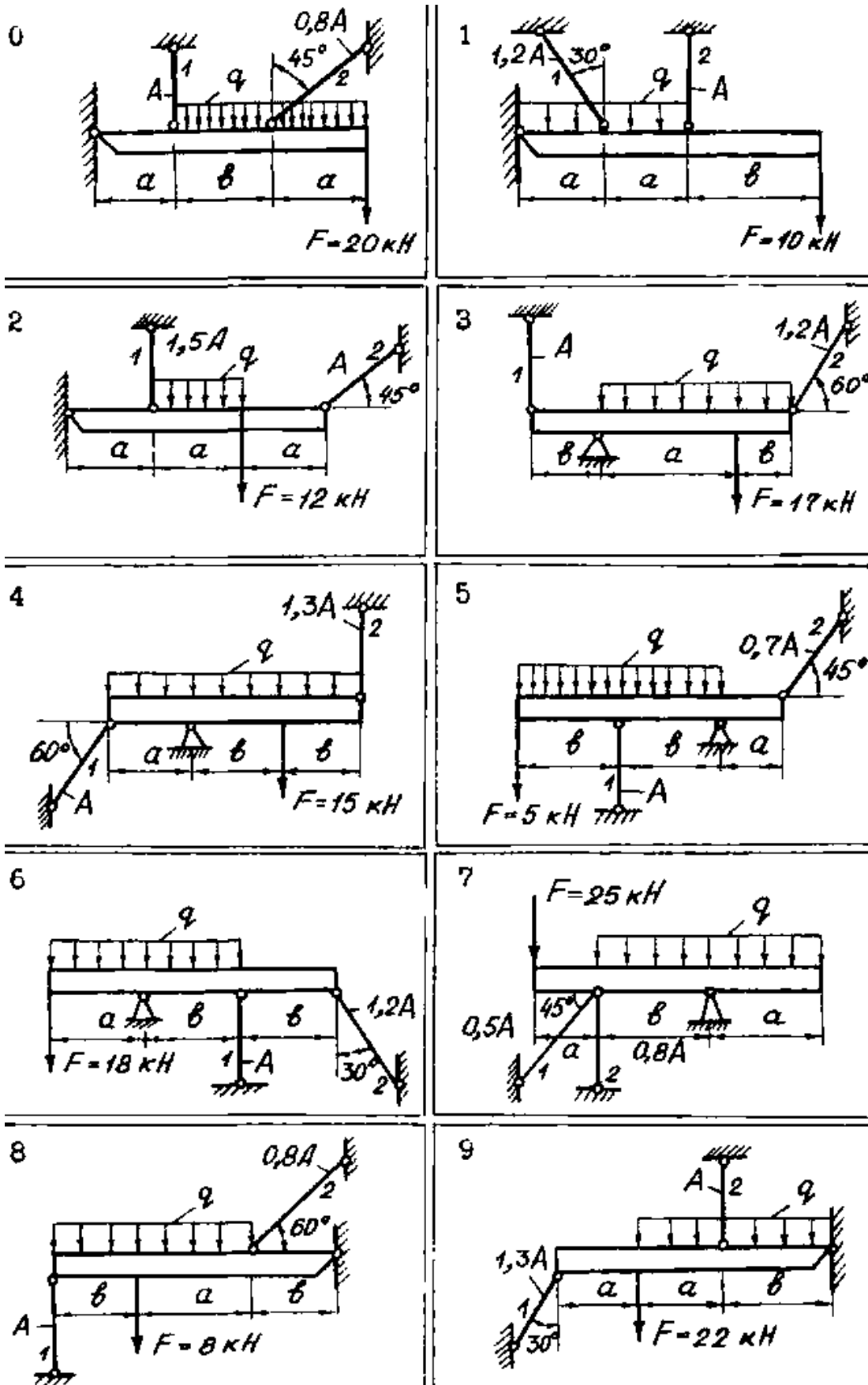


Таблиця 2.3 – Вихідні дані для розрахунку стержнів із зазором

Перша Номер схеми	Цифри шифру			
	Друга		Третя	
	$a, \text{ м}$	$b, \text{ м}$	$A, \text{ см}^2$	$F, \text{ кН}$
0	0,9	2,5	60	0,10
1	1,0	2,4	65	0,11
2	1,1	2,3	70	0,12
3	1,2	2,2	75	0,13
4	1,3	2,1	80	0,14
5	1,4	2,0	85	0,15
6	1,5	1,9	90	0,16
7	1,6	1,8	95	0,17
8	1,8	1,7	100	0,18
9	2,0	1,5	110	0,20

Варіанти розрахункових схем статично невизначених систем стержнів

(п. 2.5):



Таблиця 2.4 – Вихідні дані для розрахунку статично невизначених систем стержнів на центральне розтягання або стискання

Цифри шифру					
Перша	Друга		Третя		
Номер схеми	$l_1, \text{ м}$	$l_2, \text{ м}$	$q, \text{ кН/м}$	$a, \text{ м}$	$b, \text{ м}$
0	1,0	1,3	10	1,0	1,5
1	1,4	1,0	12	1,2	1,8
2	1,2	1,3	14	1,4	2,0
3	1,6	1,1	15	1,6	2,2
4	1,0	1,2	18	1,5	2,8
5	1,3	1,5	11	1,8	2,4
6	1,5	1,3	13	2,0	2,5
7	1,1	1,6	10	1,7	2,2
8	1,0	1,7	20	1,6	2,1
9	1,7	1,0	12	1,4	2,0

2.7 Контрольні запитання за темою 2

1. Основні гіпотези опору матеріалів.
2. За яким методом визначаються внутрішні силові фактори та в чому його сутність?
3. Що таке поздовжня сила та нормальне напруження? Як будуються їх епюри?
4. Як впливає власна вага стержнів при розрахунках на центральне розтягання або стискання?
5. Зобразити діаграму розтягання зразку м'якої маловуглецевої сталі. Що означає кожна з характерних точок цієї діаграми?
6. У чому полягає відмінність між пластичними і крихкими матеріалами?
7. Основні механічні характеристики матеріалу та їх визначення.
8. Закон Гука. Чому дорівнює модуль пружності, його фізичний та геометричний зміст?
9. Абсолютна та відносна деформації стержня. За якою формулою визначається абсолютна деформація (переміщення) довільного перерізу стержня?
10. Який фізичний зміст коефіцієнта Пуассона?
11. Які задачі називаються статично невизначеними? Як визначається ступінь статичної невизначеності системи та що він означає?
12. В якій послідовності проводиться розрахунок статично невизначених задач?

3 КРУЧЕННЯ СТЕРЖНІВ КРУГЛОГО ПОПЕРЕЧНОГО ПЕРЕРІЗУ

Кручення – це такий вид деформації бруса, при якому в його поперечних перерізах виникає лише один внутрішній силовий фактор – крутний момент. Крутними називаються зовнішні моменти, які викликають деформацію кручення. Прямолінійні бруси, що працюють на кручення, називаються валами.

Для розрахунку валів необхідно вміти визначати в будь-яких перетинах внутрішній крутний момент, за максимальною величиною моменту - небезпечне перетин.

Внутрішній крутний момент визначається для кожної силової ділянки валу методом перерізів так само, як і при інших видах навантаження і деформації. Виходячи з умови рівноваги зовнішніх і внутрішнього крутних моментів, які діють на відсічену частину валу, що розглядається, визначають внутрішні моменти та будують епюри змінювання їх величин за довжиною валу, що дозволяє в кінцевому підсумку проводити розрахунки на міцність і жорсткість.

При визначенні внутрішніх крутних моментів методом перерізів прийнято наступне правило знаків: крутний момент $M_{кр}$ вважається додатним, якщо на кожну сторону перерізу, що розглядається, він діє за годинниковою стрілкою (рис. 3.1).

Експериментально встановлено, що при крученні валу двома крутними моментами, прикладеними в площині кінцевих перерізів, вал буде закручуватися. При цьому одне переріз валу, залишаючись плоским, повертається відносно іншого на деякий кут φ – в той час, як відстані між перерізами, що розглядаються, не змінюються. В цьому випадку в поперечних перерізах валу діють тільки дотичні напруження, розподілені по перерізу за лінійним законом (рис. 3.2):

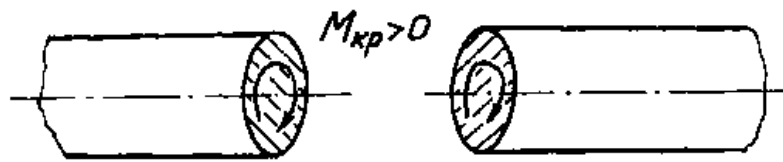


Рисунок 3.1 – Правило знаків для крутних моментів

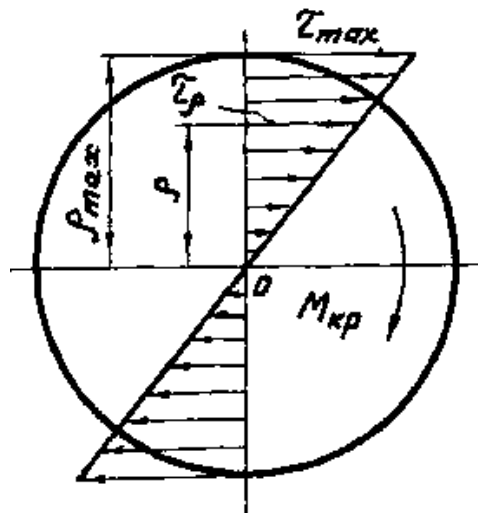


Рисунок 3.2 – Розподіл дотичних напружень за перерізом валу

$$\tau_{\rho} = \frac{M_{кр}}{I_{\rho}} \cdot \rho,$$

де I_{ρ} – полярний момент інерції;

ρ – відстань від початку координат до даної точки перерізу.

Найбільше значення дотичного напруження буде при $\rho_{max} = D / 2$,

тоді:

$$\tau_{max} = \frac{M_{кр}}{W_{\rho}},$$

де W_{ρ} – полярний момент опору, який дорівнює:

$$W_{\rho} = \frac{I_{\rho}}{\rho_{\max}} = \frac{\pi D^4}{32 \cdot \frac{D}{2}} = \frac{\pi D^3}{16} \approx 0,2D^3.$$

Для кільцевого поперечного перерізу з внутрішнім діаметром d і зовнішнім D геометричні характеристики дорівнюють:

$$\beta = d / D;$$

$$I_{\rho} = \frac{\pi D^4}{32} \cdot (1 - \beta^4) \approx 0,1D^4 \cdot (1 - \beta^4);$$

$$W_{\rho} = \frac{\pi D^3}{16} \cdot (1 - \beta^4) \approx 0,2D^3 \cdot (1 - \beta^4).$$

Умова міцності при крученні валу має вигляд:

$$\tau_{\max} = \frac{M_{кр.маx}}{W_{\rho}} \leq [\tau], \quad (3.1)$$

де $[\tau]$ – гранично допустиме напруження при крученні.

Кут закручування валу на довжині l_i (взаємний кут повороту двох перерізів) визначається за формулою:

$$\Delta\varphi_i = \frac{M_{кр.i} \cdot l_i}{GI_{\rho}},$$

де G – модуль пружності другого роду (модуль зсуву).

Розрахунки на жорсткість пов'язані з визначенням відносних кутів закручування θ_i :

$$\theta_i = \frac{\Delta\varphi_i}{l_i} = \frac{M_{кр.i}}{GI_{\rho}},$$

Умова забезпечення жорсткості валу враховує максимальне значення відносного кута закручування:

$$\theta_{\max} = \frac{M_{кр.маx}}{G \cdot I_{\rho}} \leq [\theta], \quad (3.2)$$

де $[\theta]$ – гранично допустиме значення відносного кута закручування валу.

За умовами міцності та жорсткості виконується проектний розрахунок, при якому визначається потрібний діаметр поперечного перерізу. Діаметр валу суцільного перерізу можна визначити:

а) з умови міцності (3.1)

$$W_{\rho} \geq \frac{M_{кр.маx}}{[\tau]}$$

$$D \geq \sqrt[3]{\frac{16 \cdot M_{кр.маx}}{\pi(\tau)}} \approx \sqrt[3]{\frac{M_{кр.маx}}{0,2(\tau)}}$$

б) з умови жорсткості (3.2)

$$I_{\rho} \geq \frac{M_{кр.маx}}{G[\theta]}$$

$$D \geq \sqrt[4]{\frac{32 \cdot M_{кр.маx}}{\pi \cdot G \cdot (\tau)}} \approx \sqrt[4]{\frac{M_{кр.маx}}{0,1G(\tau)}}$$

При розрахунках на кручення повинні виконуватися обидві умови, отже в якості потрібного діаметра валу при проектуванні приймається більше значення.

Аналогічно визначаються розміри кільцевого перерізу при заданому співвідношенні діаметрів $\beta = d / D$.

3.1 Проектування валу з умов міцності та жорсткості

Сталевий вал круглого поперечного перерізу, жорстко закріплений з одного кінця, навантажений зовнішніми крутними моментами (рис. 3.3, а):

$$m_1 = 2 \text{ кН}\cdot\text{м}; \quad m_2 = 3 \text{ кН}\cdot\text{м}; \quad m_3 = 1 \text{ кН}\cdot\text{м}; \quad m_4 = 4 \text{ кН}\cdot\text{м}.$$

Для сталі, з якої виготовлений вал, прийняти гранично допустиме дотичне напруження, гранично допустимий кут закручування та модуль зсуву, які дорівнюють, відповідно:

$$[\tau] = 110 \text{ МПа}; \quad [\theta] = 0,5 \text{ град/м}; \quad G = 7 \cdot 10^4 \text{ МПа}.$$

Необхідно:

- 1) визначити внутрішні крутні моменти $M_{кр}$;
- 2) побудувати епюру розподілення внутрішніх крутних моментів $M_{кр}$ за довжиною стержня;
- 3) з умов міцності та жорсткості визначити діаметр валу суцільного перерізу, постійного по довжині стержня;
- 4) з умов міцності та жорсткості визначити внутрішній і зовнішній діаметри валу кільцевого перерізу, постійного по довжині стержня при співвідношенні цих діаметрів

$$\beta = \frac{d}{D} = 0,8$$

5) з умов міцності та жорсткості визначити діаметри ділянок суцільного ступінчастого валу;

6) побудувати епюри кутів закручування $\Delta\varphi$ для всіх валів з визначеними постійними і змінними перерізами.

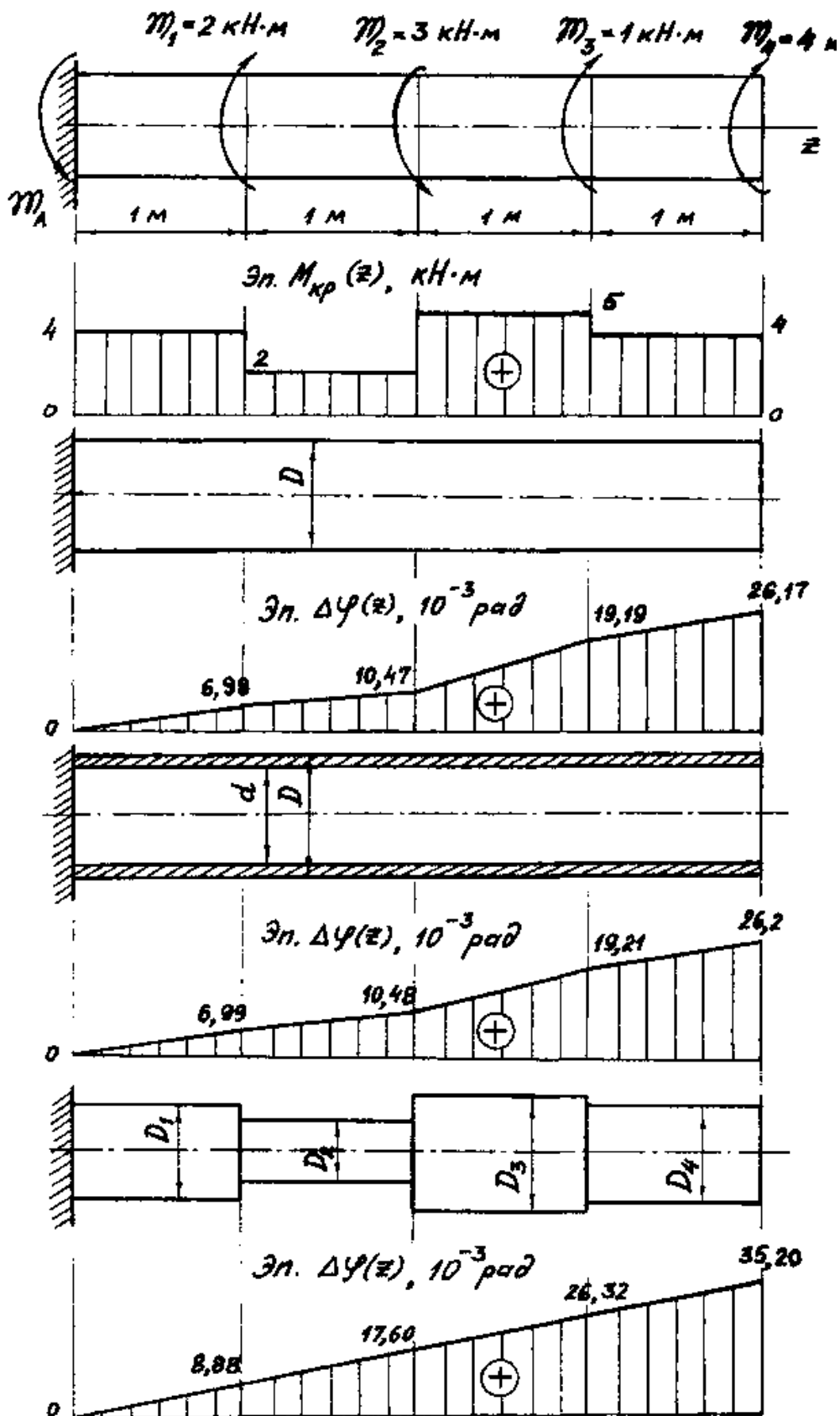


Рисунок 3.3 – Розрахунок валів суцільного та кільцевого перерізів, постійних за довжиною, і суцільного ступінчастого валу

Розрахункові схеми та вихідні дані для виконання індивідуального завдання самостійної роботи наведені в п. 3.3, табл. 3.1.

Із рівняння статичної рівноваги крутних моментів (єдиного, яке можна скласти при чистому крученні) для всього валу визначається реактивний момент m_A , кН·м, в закладенні:

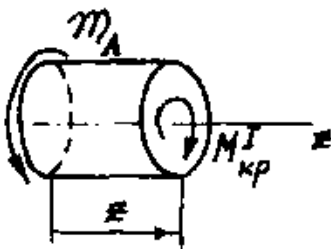
$$\sum M_{iz} = 0$$

$$m_A - m_1 + m_2 - m_3 - m_4 = 0$$

$$m_A = m_1 - m_2 + m_3 + m_4 = 2 - 3 + 1 + 4 = 4$$

Визначаються межі силових ділянок. Використовуючи метод перерізів, знаходяться внутрішні крутні моменти на кожній ділянці валу.

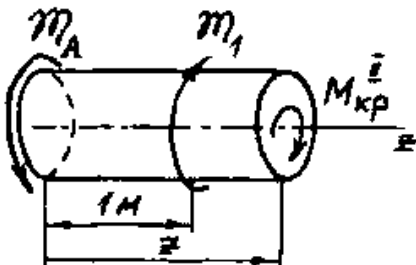
Ділянка I ($0 \leq z \leq 1$ м):



$$M_{кр}^I - m_A = 0,$$

$$M_{кр}^I = m_A = 4 \text{ кН} \cdot \text{м},$$

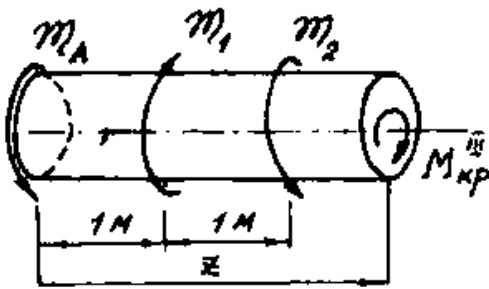
Ділянка II ($1 \text{ м} \leq z \leq 2$ м):



$$M_{кр}^{II} + m_1 - m_A = 0,$$

$$M_{кр}^{II} = m_A - m_1 = 4 - 2 = 2 \text{ кН} \cdot \text{м},$$

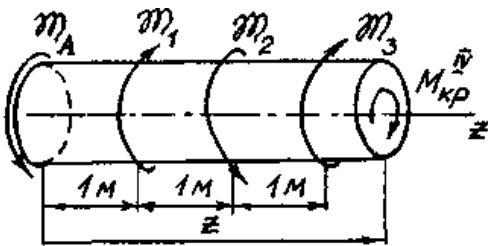
Ділянка III ($2 \text{ м} \leq z \leq 3$ м):



$$M_{кр}^{III} + m_1 - m_2 - m_A = 0,$$

$$M_{кр}^{III} = m_A + m_2 - m_1 = 4 + 3 - 2 = 5 \text{ кН} \cdot \text{м};$$

Ділянка IV ($3 \text{ м} \leq z \leq 4 \text{ м}$):



$$M_{кр}^{IV} + m_1 + m_3 - m_A - m_2 = 0,$$

$$M_{кр}^{IV} = m_A + m_2 - m_1 - m_3 = 4 + 3 - 2 - 1 = 4 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

Будується еюра крутних моментів $M_{кр}(z)$ (рис. 3.3, б), небезпечною є третя ділянка:

$$M_{кр}^{III} = M_{кр}^{max} = 5 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

Визначається діаметр валу суцільного поперечного перерізу, постійного по довжині:

а) з умови міцності

$$D = \sqrt[3]{\frac{16 \cdot M_{кр.max}}{\pi(\tau)}} = \sqrt[3]{\frac{16 \cdot 5 \cdot 10^{-3}}{3,14 \cdot 110}} = 0,06141 \text{ м};$$

б) з умови жорсткості

$$D = \sqrt[4]{\frac{32 \cdot M_{кр.max}}{\pi G(\theta)}},$$

Тут $[\theta] = 0,5 \text{ град/м} = 0,872 \cdot 10^{-2} \text{ рад/м}$, тоді:

$$D = \sqrt[4]{\frac{32 \cdot 5 \cdot 10^{-3}}{3,14 \cdot 7 \cdot 10^4 \cdot 0,872 \cdot 10^{-2}}} = 0,09558 \text{ м.}$$

Остаточно приймається більше значення діаметра валу, визначене із умови жорсткості: $D = 0,09558 \text{ м}$.

Визначаються кути закручування $\Delta\varphi$ на кожній ділянці суцільного валу за формулою:

$$\Delta\varphi(z) = \frac{M_{кр} \cdot z}{G \cdot I_\rho} \quad I_\rho = \frac{\pi D^4}{32}$$

Оскільки кут закручування є лінійною функцією, яка змінюється за законом прямої лінії, то на кожній ділянці валу досить визначити тільки два граничні значення.

Ділянка I ($0 \leq z \leq 1 \text{ м}$):

$$\Delta\varphi^I(z) = \frac{32M_{кр}^I \cdot z}{\pi G D^4}$$
$$\Delta\varphi^I(0) = 0;$$
$$\Delta\varphi^I(1) = \frac{32 \cdot 4 \cdot 10^{-3} \cdot 1}{3,14 \cdot 7 \cdot 10^4 \cdot 0,09558^4} = 6,98 \cdot 10^{-3} \text{ рад.}$$

Ділянка II ($1 \text{ м} \leq z \leq 2 \text{ м}$):

$$\Delta\varphi^{II}(z) = \Delta\varphi^{II}(1) + \frac{32M_{кр}^{II} \cdot (z-1)}{\pi G D^4}$$
$$\Delta\varphi^{II}(1) = \Delta\varphi^I(1) = 6,98 \cdot 10^{-3} \text{ рад;}$$

$$\Delta\varphi^{II}(2) = 6,98 \cdot 10^{-3} + \frac{32 \cdot 2 \cdot 10^{-3} \cdot 1}{3,14 \cdot 7 \cdot 10^4 \cdot 0,09558^4} = 10,47 \cdot 10^{-3} \text{ рад.}$$

Ділянка III ($2 \text{ м} \leq z \leq 3 \text{ м}$):

$$\Delta\varphi^{III}(z) = \Delta\varphi^{II}(2) + \frac{32M_{кр}^{III} \cdot (z-2)}{\pi G D^4}$$

$$\Delta\varphi^{III}(2) = \Delta\varphi^{II}(2) = 10,47 \cdot 10^{-3} \text{ рад;}$$

$$\Delta\varphi^{III}(3) = 10,47 \cdot 10^{-3} + \frac{32 \cdot 5 \cdot 10^{-3} (3-2)}{3,14 \cdot 7 \cdot 10^4 \cdot 0,09558^4} = 19,19 \cdot 10^{-3} \text{ рад.}$$

Ділянка IV ($3 \text{ м} \leq z \leq 4 \text{ м}$):

$$\Delta\varphi^{IV}(z) = \Delta\varphi^{III}(3) + \frac{32M_{кр}^{IV} \cdot (z-3)}{\pi \cdot G \cdot D^4}$$

$$\Delta\varphi^{IV}(3) = \Delta\varphi^{III}(3) = 19,19 \cdot 10^{-3} \text{ рад;}$$

$$\Delta\varphi^{IV}(4) = 19,19 \cdot 10^{-3} + \frac{32 \cdot 4 \cdot 10^{-3} (4-3)}{3,14 \cdot 7 \cdot 10^4 \cdot 0,09558^4} = 26,17 \cdot 10^{-3} \text{ рад.}$$

За отриманими результатами будується епюра $\Delta\varphi(z)$ (рис. 3.3, в).

З умов міцності та жорсткості визначаються внутрішній і зовнішній діаметри валу кільцевого (трубчастого) перерізу, постійного по довжині:

$$D = \sqrt[3]{\frac{16 \cdot M_{кр.макс}}{\pi(\tau) \cdot (1-\beta^4)}} = \sqrt[3]{\frac{16 \cdot 5 \cdot 10^{-3}}{3,14 \cdot 110 \cdot (1-0,8^4)}} = 0,0732 \text{ м;}$$

$$D = \sqrt[4]{\frac{32 \cdot M_{кр.макс}}{\pi G(\theta) \cdot (1-\beta^4)}} = \sqrt[4]{\frac{32 \cdot 5 \cdot 10^{-3}}{3,14 \cdot 7 \cdot 10^4 \cdot 0,872 \cdot 10^{-2} (1-0,8^4)}} = 0,109 \text{ м.}$$

Остаточно приймається більше значення діаметра валу, визначене із

умови жорсткості: $D = 0,109$ м.

Тоді внутрішній діаметр:

$$d = D \cdot \beta = 0,109 \cdot 0,8 = 0,0872 \text{ м.}$$

Аналогічно розрахунку кутів закручування для суцільного валу виконується розрахунок та будується еюра кутів закручування $\Delta\varphi$ постійного по довжині валу кільцевого поперечного перерізу:

$$\Delta\varphi(z) = \frac{M_{кр} \cdot z}{G \cdot I_{\rho}} \quad I_{\rho} = \frac{\pi D^4}{32} \cdot (1 - \beta^4);$$

$$\Delta\varphi(0) = \Delta\varphi_A = 0$$

$$\Delta\varphi(1) = \frac{32 \cdot M_{кр}^I \cdot 1}{\pi G D^4 (1 - \beta^4)} = \frac{32 \cdot 4 \cdot 10^{-3} \cdot 1}{3,14 \cdot 7 \cdot 10^4 \cdot 0,109^4 \cdot 0,5904} = 6,99 \cdot 10^{-3} \text{ рад;}$$

$$\Delta\varphi(2) = \Delta\varphi(1) + \frac{32 M_{кр}^{II} \cdot (2-1)}{\pi G D^4 (1 - \beta^4)} = 6,99 \cdot 10^{-3} + \frac{32 \cdot 2 \cdot 10^{-3} \cdot 1}{3,14 \cdot 7 \cdot 10^4 \cdot 0,109^4 \cdot 0,5904} = 10,48 \cdot 10^{-3}$$

$$\Delta\varphi(3) = 10,48 \cdot 10^{-3} + \frac{32 \cdot 5 \cdot 10^{-3} \cdot (3-2)}{3,14 \cdot 7 \cdot 10^4 \cdot 0,109^4 \cdot 0,5904} = 19,21 \cdot 10^{-3} \text{ рад;}$$

$$\Delta\varphi^{IV}(4) = 19,21 \cdot 10^{-3} + \frac{32 \cdot 4 \cdot 10^{-3} \cdot (4-3)}{3,14 \cdot 7 \cdot 10^4 \cdot 0,109^4 \cdot 0,5904} = 26,2 \cdot 10^{-3} \text{ рад.}$$

За отриманими результатами будується еюра $\Delta\varphi(z)$ (рис. 3.3, г).

Умова жорсткості виявилася визначальною при проектуванні валів і суцільного, і кільцевого перерізів, тому для підбору діаметрів ступінчастого валу використовується тільки умова жорсткості:

$$D_1 = \sqrt[4]{\frac{32 \cdot M_{кр}^I}{\pi G(\theta)}} = \sqrt[4]{\frac{32 \cdot 4 \cdot 10^{-3}}{3,14 \cdot 7 \cdot 10^4 \cdot 0,872 \cdot 10^{-2}}} = 0,090 \text{ м;}$$

$$D_2 = \sqrt[4]{\frac{32 \cdot M_{кр}^{II}}{\pi G(\theta)}}, = \sqrt[4]{\frac{32 \cdot 2 \cdot 10^{-3}}{3,14 \cdot 7 \cdot 10^4 \cdot 0,872 \cdot 10^{-2}}} = 0,0760 \text{ м};$$

$$D_3 = \sqrt[4]{\frac{32 \cdot M_{кр}^{III}}{\pi G(\theta)}}, = \sqrt[4]{\frac{32 \cdot 5 \cdot 10^{-3}}{3,14 \cdot 7 \cdot 10^4 \cdot 0,872 \cdot 10^{-2}}} = 0,09558 \text{ м.}$$

Оскільки виявилось, що $M_{кр}^{IV} = M_{кр}^I$, то $D_4 = D_1 = 0,09 \text{ м}$.

Будується еюра кутів закручування для ступінчастого стержня (рис. 3.3, д). Для цього обчислюються значення $\Delta\varphi(z)$ в наступних перерізах:

$$\Delta\varphi(0) = \Delta\varphi_A = 0$$

$$\Delta\varphi(1) = \frac{32 \cdot M_{кр}^I \cdot 1}{\pi G D_1^4} = \frac{32 \cdot 4 \cdot 10^{-3} \cdot 1}{3,14 \cdot 7 \cdot 10^4 \cdot 0,09^4} = 8,88 \cdot 10^{-3} \text{ рад};$$

$$\Delta\varphi(2) = \Delta\varphi(1) + \frac{32 M_{кр}^{II} \cdot (2-1)}{\pi G D^4} = 8,88 \cdot 10^{-3} + \frac{32 \cdot 2 \cdot 10^{-3}}{3,14 \cdot 7 \cdot 10^4 \cdot 0,076^4} = 17,60 \cdot 10^{-3}$$

$$\Delta\varphi(3) = 17,6 \cdot 10^{-3} + \frac{32 \cdot 5 \cdot 10^{-3} \cdot (3-2)}{3,14 \cdot 7 \cdot 10^4 \cdot 0,09558^4} = 26,32 \cdot 10^{-3} \text{ рад};$$

$$\Delta\varphi^{IV}(4) = 26,32 \cdot 10^{-3} + \frac{32 \cdot 4 \cdot 10^{-3} \cdot (4-3)}{3,14 \cdot 7 \cdot 10^4 \cdot 0,09^4} = 35,20 \cdot 10^{-3} \text{ рад.}$$

Визначається економічність валу кільцевого (трубчастого) поперечного перерізу по відношенню до суцільного. Їх маси співвідносяться як площі їх поперечних перерізів:

$$A_{спл.} / A_{тр} = \frac{\pi D_{спл.}^2}{4} / \frac{\pi(D^2 - d^2)}{4} = \frac{D_{спл.}^2}{D^2 - d^2} = \frac{0,09558^2}{0,109^2 - 0,0872^2} = 2,135.$$

Таким чином, суцільний вал важче та, відповідно, менш економічний за трубчастий у 2,135 рази.

3.2 Визначення зусиль, напружень і деформацій статично невизначеного валу

Сталевий вал круглого поперечного перерізу, жорстко закріплений з обох кінців, навантажений зовнішніми крутними моментами (рис. 3.4, а):

$$m_1 = 1 \text{ кН}\cdot\text{м}; \quad m_2 = 5 \text{ кН}\cdot\text{м}.$$

Розміри ділянок і відповідні діаметри валу:

$$l_1 = 2 \text{ м}; \quad l_2 = 1 \text{ м}; \quad D_1 = 0,15 \text{ м}; \quad D_2 = 0,18 \text{ м}.$$

Модуль зсуву сталі, з якої виготовлений вал:

$$G = 7 \cdot 10^4 \text{ МПа}.$$

Необхідно:

- 1) розкрити статичну невизначеність системи;
- 2) визначити внутрішні крутні моменти $M_{кр}$;
- 3) побудувати епюру розподілення внутрішніх крутних моментів $M_{кр}$ за довжиною стержня;
- 4) побудувати епюри кутів закручування $\Delta\varphi$.

Розрахункові схеми та вихідні дані для виконання індивідуального завдання самостійної роботи наведені в п. 3.3, табл. 3.2.

Записується рівняння статичної рівноваги, яке містить два невідомих моменти в закладеннях M_A і M_B :

$$\sum M_{iz} = 0$$
$$m_1 + m_2 - M_A - M_B = 0.$$

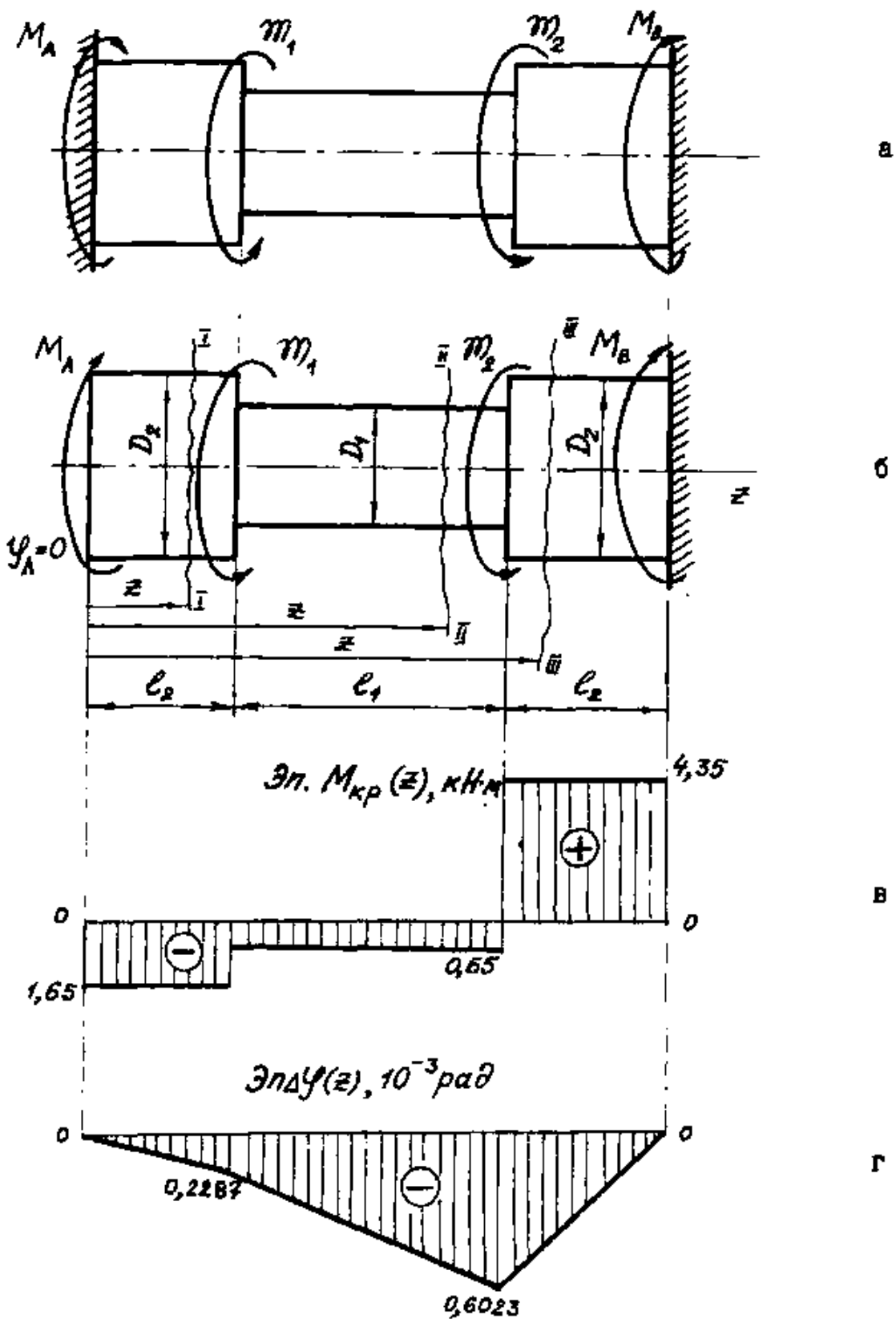


Рисунок 3.4 – Розрахунок статично невизначеного суцільного ступінчастого валу

Система один раз статично невизначена, отже необхідно скласти одне додаткове рівняння сумісності деформацій.

Необхідно перетворити задану схему навантаження у статично визначену. Одне з закладень, наприклад, ліве, відкидається та його дія замінюється реакцією M_A (рис. 3.4, б). Тоді додаткове рівняння сумісності деформацій, яке випливає з розгляду геометрії вихідної задачі, можна сформулювати наступним чином: кут закручування крайнього лівого перерізу валу від дії всіх зовнішніх крутних моментів повинен дорівнювати нулю:

$$\varphi_A = 0 \qquad -\varphi_A(M_A) + \varphi_A(m_1) + \varphi_A(m_2) = 0$$

Тут $\varphi_A(M_A)$, $\varphi_A(m_1)$, $\varphi_A(m_2)$ – кути закручування крайнього лівого перерізу від дії моментів M_A , m_1 , m_2 .

Використовуючи принцип суперпозиції, записуються рівняння для визначення кутів закручування від кожного зовнішнього моменту, що діють окремо один від одного:

$$\varphi_A(M_A) = \frac{M_A \cdot l_2}{G \cdot I_{\rho 2}} + \frac{M_A \cdot l_1}{G \cdot I_{\rho 1}} + \frac{M_A \cdot l_2}{G \cdot I_{\rho 2}} = \frac{M_A \cdot l_1}{G \cdot I_{\rho 1}} + 2 \frac{M_A \cdot l_2}{G \cdot I_{\rho 2}};$$

$$\varphi_A(m_1) = \frac{m_1 \cdot l_1}{G \cdot I_{\rho 1}} + \frac{m_1 \cdot l_2}{G \cdot I_2}; \qquad \varphi_A(m_2) = \frac{m_2 \cdot l_2}{G \cdot I_{\rho 2}};$$

Полярні моменти інерції:

$$I_{\rho 1} = \frac{\pi D_1^4}{32} \qquad I_{\rho 2} = \frac{\pi D_2^4}{32}$$

Підставляючи наведені залежності в рівняння $\varphi_A = 0$, можна отримати:

$$\frac{32M_A}{\pi G} \left(\frac{l_1}{D_1^4} + \frac{2l_2}{D_2^4} \right) = \frac{32}{\pi G} \left(\frac{m_1 \cdot l_1}{D_1^4} + \frac{m_1 \cdot l_2}{D_2^4} + \frac{m_2 \cdot l_2}{D_2^4} \right)$$

Таким чином, момент в закладенні дорівнює:

$$\begin{aligned} M_A &= \left(\frac{m_1 \cdot l_1}{D_1^4} + \frac{m_1 \cdot l_2}{D_2^4} + \frac{m_2 \cdot l_2}{D_2^4} \right) / \left(\frac{l_1}{D_1^4} + \frac{2l_2}{D_2^4} \right) = \\ &= \frac{m_1 \cdot l_1 \cdot D_2^4 + (m_1 + m_2) l_2 D_1^4}{l_1 \cdot D_2^4 + 2l_2 D_1^4} = \frac{1 \cdot 2 \cdot 0,18^4 + (1 + 5) \cdot 1 \cdot 0,15^4}{2 \cdot 0,18^4 + 2 \cdot 1 \cdot 0,15^4} = 1,650 \text{ кН} \cdot \text{м}. \end{aligned}$$

Тоді з рівняння статки знаходиться M_B :

$$M_B = m_1 + m_2 - M_A = 1 + 5 - 1,65 = 4,35 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

Вал розбивається на силові ділянки (при цьому можна рухатися як з лівого кінця праворуч, так і навпаки) та визначаються крутні моменти на кожній ділянці (рис. 3.4, в).

Ділянка I ($0 \leq z \leq l_2$):

$$M_{кр}^I = -M_A = -1,65 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

Ділянка II ($l_2 \leq z \leq l_1 + l_2$):

$$M_{кр}^{II} = -M_A + m_1 = -1,65 + 1 = -0,65 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

Ділянка III ($l_1 + l_2 \leq z \leq l_1 + 2 \cdot l_2$):

$$M_{кр}^{III} = -M_A + m_1 + m_2 = -1,65 + 1 + 5 = 4,35 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

Будується епюра $M_{кр}(z)$ (рис. 3.4, г).

Записуються формули для кутів закручування на кожній ділянці та будується епюра $\Delta\varphi(z)$ (рис. 3.4, д). Функція кута закручування – лінійна:

$$\Delta\varphi(z) = \frac{M_{\text{кр}}^i \cdot z}{G \cdot I_{\rho i}}$$

Ділянка I ($0 \leq z \leq l_2$):

$$\Delta\varphi^I(z) = \frac{M_{\text{кр}}^I \cdot z}{G \cdot I_{\rho 2}}$$

при $z = 0$

$$\Delta\varphi^I(z) = \Delta\varphi^I(0) = \varphi_A = 0;$$

при $z = l_2 = 1$ м

$$\Delta\varphi^I(1) = \frac{-1,65 \cdot 10^{-3} \cdot 1 \cdot 32}{7 \cdot 10^4 \cdot 3,14 \cdot 0,18^4} = -0,2287 \cdot 10^{-3}, \text{ рад.}$$

Ділянка II ($l_2 \leq z \leq l_1 + l_2$):

$$\Delta\varphi^{II}(z) = \Delta\varphi^I(1) + \frac{M_{\text{кр}}^{II} \cdot (z - l_2)}{G \cdot I_{\rho 1}}$$

при $z = l_2 = 1$ м

$$\Delta\varphi^{II}(1) = \Delta\varphi^I(1) = -0,2287 \cdot 10^{-3} \text{ рад;}$$

при $z = l_1 + l_2 = 3$ м

$$\Delta\varphi''(3) = -0,2287 \cdot 10^{-3} + \frac{-0,65 \cdot 10^{-3} (3-1) \cdot 32}{7 \cdot 10^4 \cdot 3,14 \cdot 0,15^4} = -0,6023 \cdot 10^{-3} \text{ рад.}$$

Ділянка III ($l_1 + l_2 \leq z \leq l_1 + 2 \cdot l_2$):

$$\Delta\varphi'''(z) = \Delta\varphi''(3) + \frac{M_{\text{кр}}^{\text{III}} \cdot (z - l_1 - l_2)}{G \cdot I_{\rho 2}}$$

при $z = l_1 + l_2 = 3$ м

$$\Delta\varphi'''(3) = \Delta\varphi''(3) = -0,6023 \cdot 10^{-3} \text{ рад;}$$

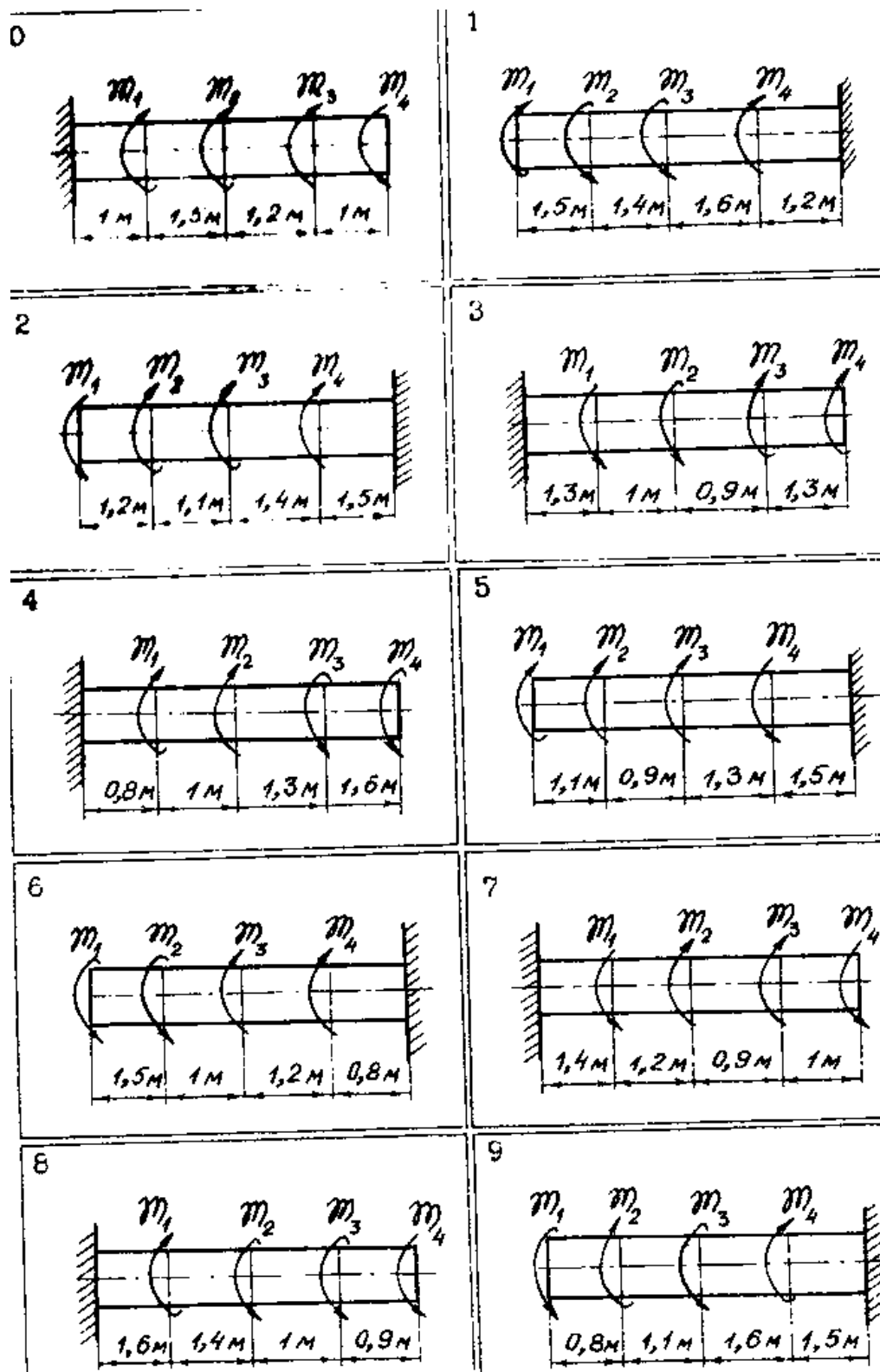
при $z = l_1 + 2 \cdot l_2 = 4$ м

$$\Delta\varphi'''(4) = -0,6023 \cdot 10^{-3} + \frac{4,35 \cdot 10^{-3} (4-3) \cdot 32}{7 \cdot 10^4 \cdot 3,14 \cdot 0,18^4} = 0,59 \cdot 10^{-6} \approx 0.$$

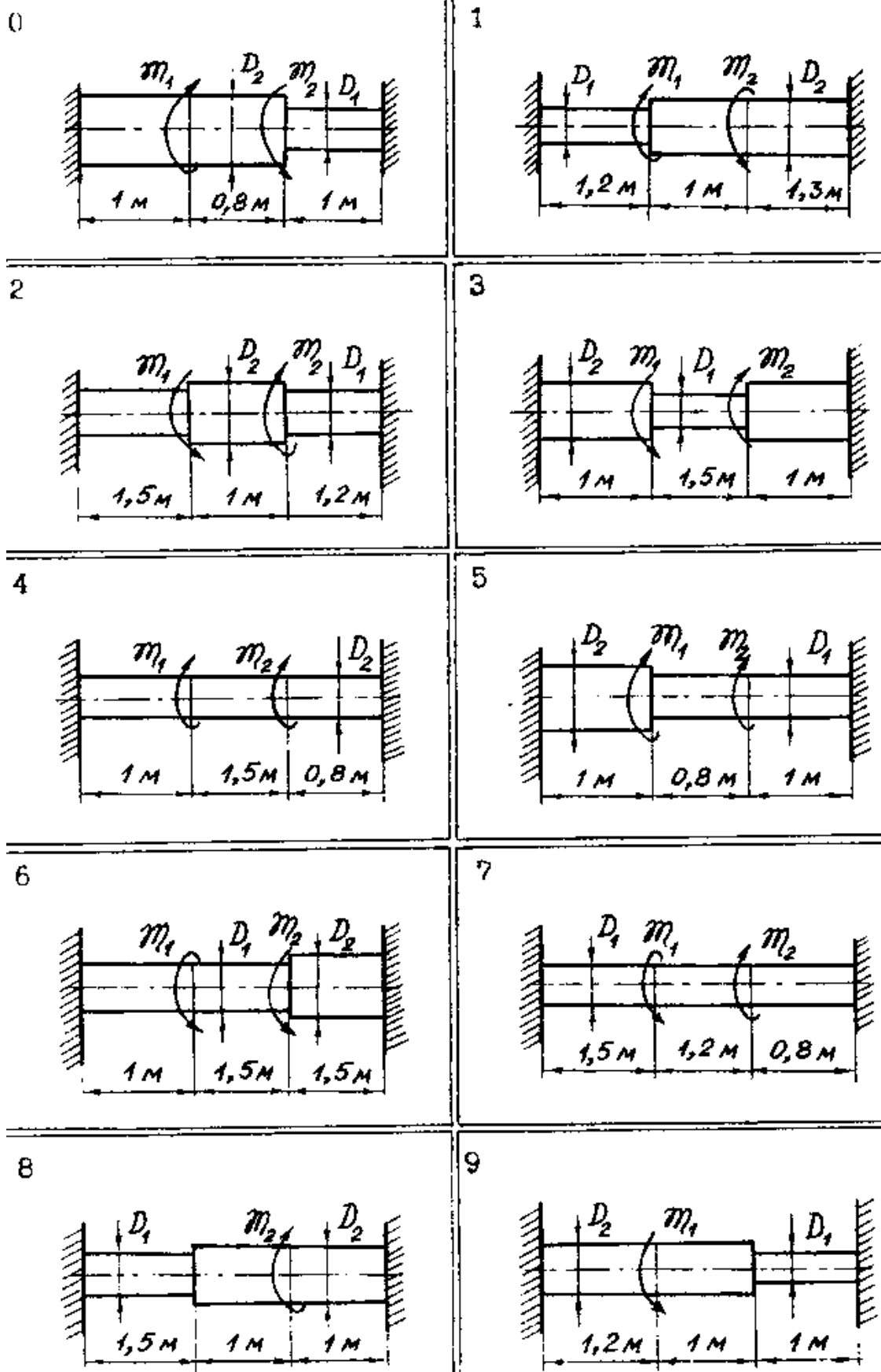
Опора праворуч також жорстка, тому будь-яких переміщень у крайньому правому перерізі не має бути. Рівність нулю кута закручування на крайній правій опорі підтверджує правильність результатів розрахунку.

3.3 Завдання до самостійної роботи за темою 3

Варіанти розрахункових схем статично визначених валів:



Варіанти розрахункових схем статично невизначених валів:



Таблиця 3.1 – Вихідні дані для розрахунку статично визначених валів

Цифри шифру				
Перша	Друга		Третя	
Номер схеми	m_1 , кН·м	m_2 , кН·м	m_3 , кН·м	m_4 , кН·м
0	4	14	1	8
1	5	13	2	10
2	6	12	4	12
3	7	11	6	5
4	8	10	7	15
5	9	8	10	16
6	10	7	12	3
7	11	6	8	5
8	12	5	3	10
9	15	4	11	2

Таблиця 3.2 – Вихідні дані для розрахунку статично невизначених валів

Цифри шифру				
Перша	Друга		Третя	
Номер схеми	m_1 , кН·м	D_1 , см	m_2 , кН·м	D_2 , см
0	5	12,0	8	16,5
1	4	13,0	10	17,0
2	6	14,0	9	17,5
3	3	12,5	2	18,0
4	7	13,5	5,5	18,5
5	11	14,5	12	19,0
6	1	15,0	13	19,5
7	14	16,0	3,5	20,0
8	15	15,5	7,5	12,3
9	6,5	11,5	2,5	13,8

3.4 Контрольні запитання за темою 3

1. Який вид деформації називається крученням?
2. Як визначається крутний момент в поперечному перерізі?
3. Правило знаків для крутного моменту?
4. Які напруження виникають в поперечному перерізі круглого стержня при крученні?
5. Як знаходиться величина напружень у довільній точці поперечного перерізу валу?
6. Чому дорівнює полярний момент інерції круглого перерізу?
7. Чому дорівнює полярний момент інерції кільцевого (трубчастого) перерізу?
8. Що називається моментом опору при крученні?
9. В яких одиницях вимірюється момент опору?
10. Як знаходиться величина абсолютного кута закручування?
11. Як знаходиться величина відносного кута закручування?
12. Який вид має умова міцності при крученні?
13. Який вид має умова жорсткості при крученні?
14. За якою формулою визначається необхідний діаметр валу з умови міцності?
15. За якою формулою визначається необхідний діаметр валу з умови жорсткості?

4 ДОСЛІДЖЕННЯ ЕЛЕМЕНТУ МАТЕРІАЛУ, ЩО ЗНАХОДИТЬСЯ У ПЛОСКОМУ НАПРУЖЕНОМУ СТАНІ

В одній і тій самій точці матеріалу елемента конструкції напруження будуть приймати різні значення в залежності від того, до якого перерізу (до якої площини, що перетинає елемент) відносити цю точку.

Майданчиком називається частина площини, що перетинає елемент конструкції, обмежена розмірами елемента матеріалу, що розглядається.

Сукупність напружень, які діють на всіх майданчиках, проведених через одну точку матеріалу, характеризує напружений стан конструктивного елемента в цій точці.

Напружений стан в точці зручно виявляти шляхом виділення паралелепіпеда, розташованого навколо даної точки. Такий паралелепіпед називається елементом матеріалу або елементом стержня та вважається нескінченно малим.

В теорії напруженого стану можна розмежувати дві основні задачі.

Пряма задача. У точці відомі головні напрямки дії напружень і відповідні їм головні напруження; потрібно знайти нормальні і дотичні напруження на майданчиках, нахилених під заданим кутом до головних майданчиків.

Зворотна задача. У точці відомі нормальні та дотичні напруження, що діють на двох взаємно перпендикулярних площадках, що проходять через задану точку; потрібно визначити головні майданчики та значення головних напружень.

Обидва типи задачі можуть вирішуватися як аналітичним, так і графічним шляхом.

На рис. 4.1 показаний елемент матеріалу, що знаходиться в плоскому напруженому стані.

Встановлені наступні правила знаків:

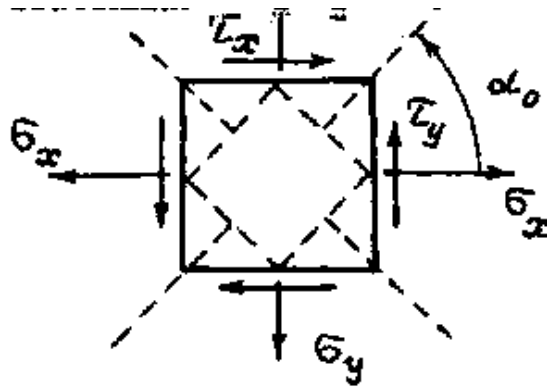


Рисунок 4.1 – Плоский напружений стан в точці матеріалу

1) нормальні напруження, що розтягують елемент, вважаються додатними, а такі, що стискають, – від’ємними;

2) дотичне напруження вважається додатним, якщо вектор, що його зображає, створює момент відносно точки, яка лежить на внутрішній нормалі, за годинниковою стрілкою (на рис 4.1 $\tau_x > 0$, $\tau_y < 0$);

3) кут α_0 додатний, якщо грань елемента, на якій діє напруження σ_x , для суміщення з гранню, на якій діє σ_α , необхідно повернути проти годинникової стрілки (на рис. 4.1 кут α_0 додатний).

Значення головних напружень і положення головних площадок визначаються за формулами:

$$\sigma_{\frac{\max}{\min}} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_y^2},$$

$$\operatorname{tg} 2\alpha_0 = \frac{2\tau_x}{\sigma_x - \sigma_y}.$$

Якщо кут $\alpha_0 > 0$, то майданчик, на якому діє σ_x , для суміщення з головним майданчиком необхідно повернути проти годинникової стрілки. Якщо кут $\alpha_0 < 0$ – то за годинниковою стрілкою.

Положення головного майданчика з напруженням σ_{\max} виходить,

якщо майданчик з більшим в алгебраїчному сенсі нормальним напруженням повернути на кут α_0 в напрямку, в якому вектор дотичного напруження, який діє на цьому ж майданчику, прагне повернути елементарний паралелепіпед відносно його центру. Головні напруження позначаються $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$, причому $\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3$ в алгебраїчному сенсі.

Умова міцності матеріалу елемента перевіряється за однією з основних теорій міцності.

За першою теорією міцності – найбільших нормальних напружень:

$$\sigma_{\max} = \sigma_1 \leq [\sigma_p] \qquad \sigma_{\min} = \sigma_3 \leq [\sigma_c]$$

Тут $[\sigma_p]$ – гранично допустиме напруження при розтяганні; $[\sigma_c]$ – гранично допустиме напруження при стисканні.

За другою теорією міцності – найбільших лінійних подовжень:

а) для пластичних матеріалів

$$\sigma_1 - \mu(\sigma_2 + \sigma_3) \leq [\sigma],$$

б) для крихких матеріалів

$$\sigma_1 - \mu(\sigma_2 + \sigma_3) \leq [\sigma_p].$$

За третьою теорією міцності – найбільших дотичних напружень:

$$\sigma_1 - \sigma_3 \leq [\sigma].$$

За четвертою теорією міцності – енергетичною:

$$\sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - (\sigma_1\sigma_2 + \sigma_2\sigma_3 + \sigma_3\sigma_1)} \leq [\sigma].$$

Відносні лінійні деформації виражають узагальнений закон Гука:

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E} [\sigma_x - \mu(\sigma_y + \sigma_z)];$$

$$\varepsilon_y = \frac{1}{E} [\sigma_y - \mu(\sigma_x + \sigma_z)];$$

$$\varepsilon_z = \frac{1}{E} [\sigma_z - \mu(\sigma_x + \sigma_y)],$$

Відносна об'ємна деформація елемента матеріалу:

$$\varepsilon_v = \frac{1-2\mu}{E} (\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3).$$

4.1 Дослідження напруженого та деформованого стану елемента матеріалу, що знаходиться в умовах плоского напруженого стану

У небезпечній точці матеріалу деформованої пружно конструкції виділено нескінченно малий прямокутний елемент, на гранях якого діють нормальні та дотичні напруження.

Потрібно:

1) аналітично і графічно (за допомогою круга Мора) визначити головні нормальні та екстремальні дотичні напруження, а також положення головних площадок і майданчиків зсуву;

2) перевірити міцність елемента матеріалу за чотирма теоріями міцності, якщо основне гранично допустиме напруження та коефіцієнт Пуассона дорівнюють, відповідно:

$$[\sigma] = 160 \text{ МПа}, \quad \mu = 0,3;$$

3) визначити абсолютні та відносні деформації граней елемента, якщо розмір ребра кубика $a = 10 \text{ см}$;

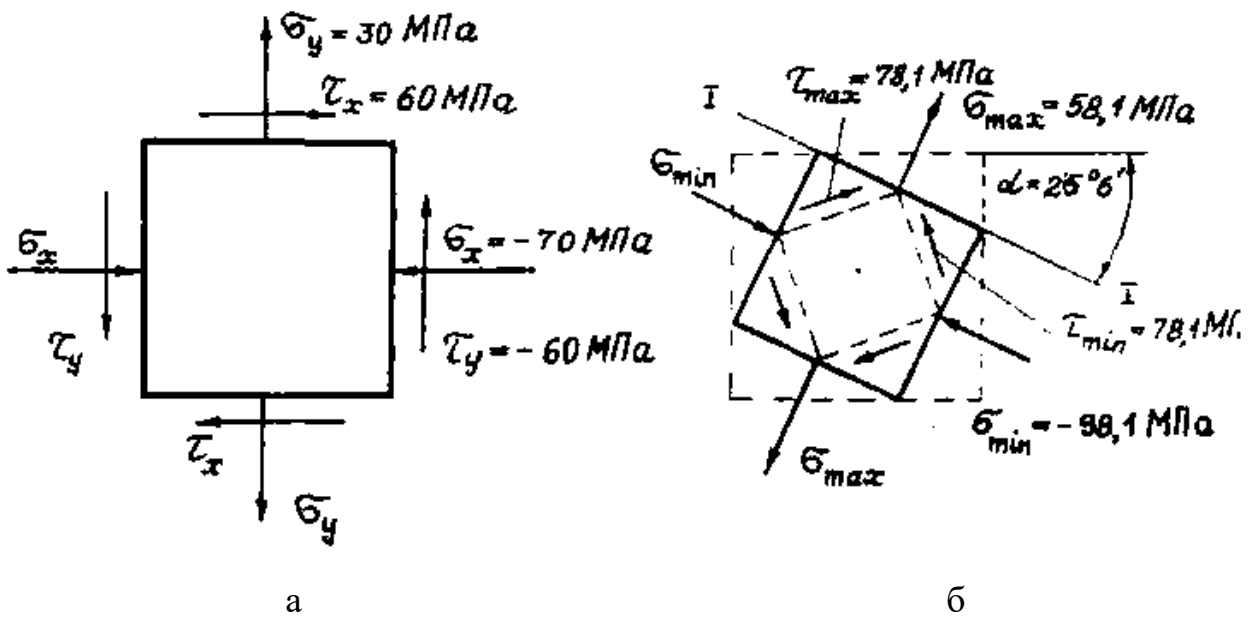
4) визначити абсолютну та відносну деформації об'єму елемента;

5) аналітично та за допомогою круга Мора визначити нормальні та дотичні напруження на майданчиках, що розташовані під кутами $\alpha = 30^\circ$ і $\alpha + 90^\circ = 120^\circ$ по відношенню до майданчика, на якому діє σ_{max} .

Схеми напруженого стану та вихідні дані для виконання індивідуального завдання самостійної роботи наведені в п. 4.2, табл. 4.1.

У якості прикладу розглядається елемент матеріалу, зображений на рис. 4.2, а, на гранях якого діють напруження:

$$\sigma_x = -70 \text{ МПа}, \quad \sigma_y = 30 \text{ МПа}, \quad \tau_x = 60 \text{ МПа}.$$



- а) заданий напружений стан в точці;
 б) головні напруження, головні майданчики, майданчики зсуву.

Рисунок 4.2 – До визначення плоского напруженого стану в точці матеріалу

Аналітичний метод:

$$\sigma_{\frac{\max}{\min}} = \frac{-70 + 30}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{-70 - 30}{2}\right)^2 + 60^2} = -20 \pm 78,1;$$

$$\sigma_{\max} = 58,1 \text{ МПа};$$

$$\sigma_{\min} = -98,1 \text{ МПа};$$

$$\tau_{\frac{\max}{\min}} = \pm \sqrt{\left(\frac{-70 - 30}{2}\right)^2 + 60^2} = \pm 78,1 \text{ МПа};$$

$$\operatorname{tg} 2\alpha_0 = -\operatorname{arctg} 1,2 = -50^{\circ} 12';$$

$$\alpha_0 = -25^{\circ} 6'.$$

Майданчики, на яких діють головні напруження, знаходяться під кутом $\alpha_0 = -25^\circ 6'$, направленим за годинниковою стрілкою. Згідно зі вказаним вище правилом, на головному майданчику I-I (рис. 4.2, б) діє σ_{max} , а на перпендикулярному до нього – σ_{min} .

На рис. 4.2, б, крім головних майданчиків, вказані майданчики зсуву та екстремальні дотичні напруження, що на них діють. Майданчики зсуву розташовані під кутом 45° до головних майданчиків.

Рішення за допомогою круга Мора.

Будується круг Мора (рис. 4.3). Для цього у відповідному масштабі на осях σ і τ по заданих напруженнях σ_x , σ_y , $\tau_x = -\tau_y$ відкладаються відповідні значення й показуються т. А (σ_x ; τ_y) та т. В (σ_y ; τ_x).

Пряма АВ є діаметром круга Мора.

Відрізки 01 і 02 будуть дорівнювати (з урахуванням масштабу) значенням σ_{max} і σ_{min} , точки 3 і 4 будуть відповідати майданчикам з τ_{max} і τ_{min} . Показується положення вертикальних і горизонтальних майданчиків, яке відповідає заданому напруженому стану, далі через т. А, що відповідає від'ємному дотичному напруженню, проводиться вертикальна лінія.

Точка С перетину вертикальної лінії з кругом напружень є своєрідним полюсом системи. Полюс має наступні властивості:

а) для того, щоб визначити місце розташування майданчика, на якому діють напруження σ_a , τ_a , треба точку з цими координатами з'єднати прямою лінією з полюсом С;

б) для того, щоб знайти значення напружень, які діють на деякому майданчику, необхідно з точки полюса провести пряму лінію, паралельну цьому майданчику, до перетину з кругом Мора; абсциса точки перетину (у прийнятому масштабі) дорівнює нормальному напруженню σ_a , а ордината – дотичному напруженню τ_a на заданому майданчику.

Промені, що з'єднують точку С з точками 1, 2, 3, 4 паралельні майданчикам, на яких діють відповідні напруження. Вимірюванням координат точок 1...4, з урахуванням масштабу, визначаються напруження

σ_{max} , σ_{min} , τ_{max} , τ_{min} , а також нормальні напруження на майданчиках зсуву. Похибка, яка може бути отримана графічним способом, менш ніж 3 %, що цілком задовольняє практичним розрахункам.

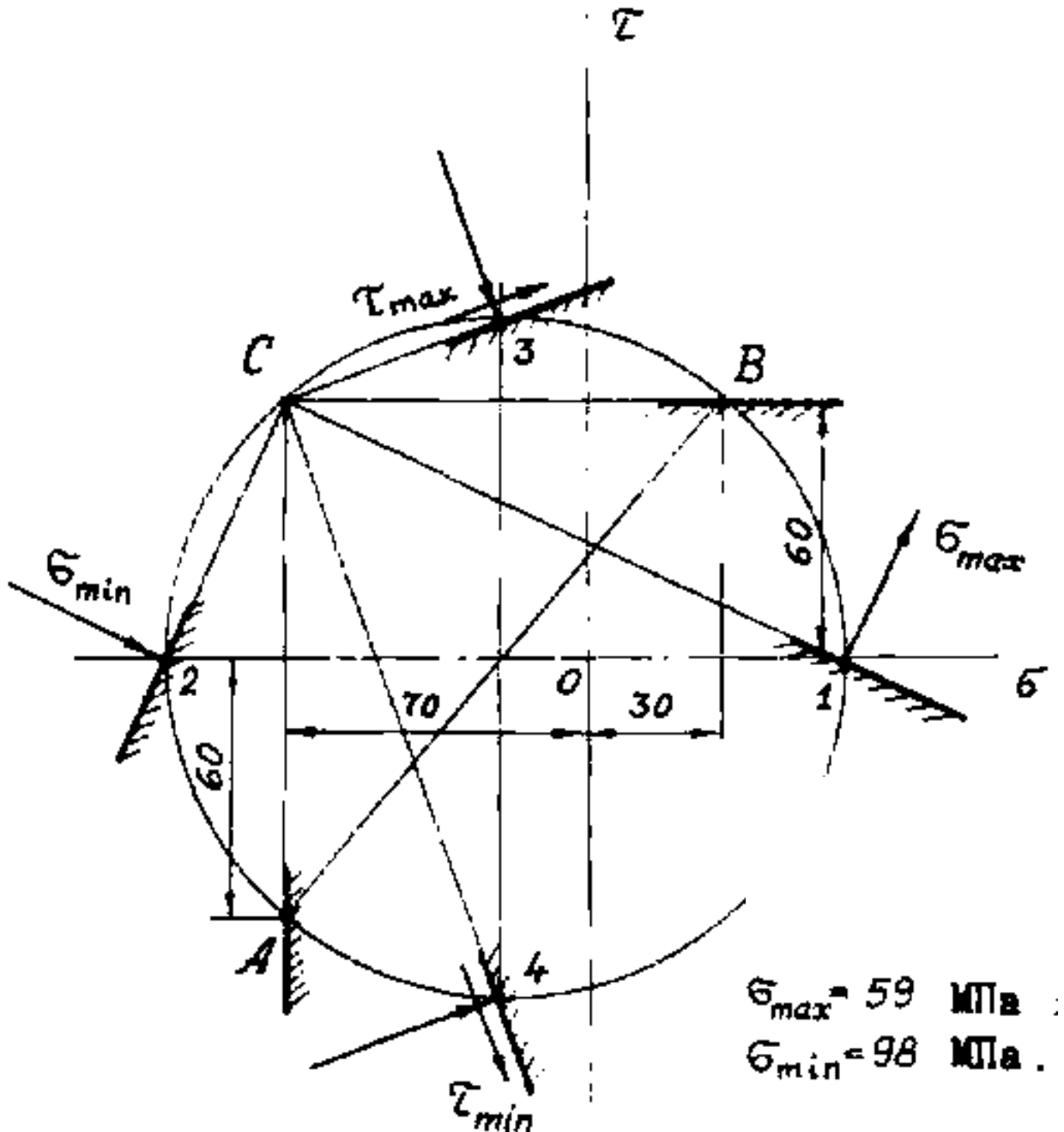


Рисунок 4.3 – Круг Мора для визначення напруженого стану в точці

При перевірці кубика матеріалу на міцність приймаються головні

напруження, отримані аналітичним методом $\sigma_1 = \sigma_{max} = 58,1$ МПа.

За першою теорією міцності:

$$\sigma_{max} = 58,1 \text{ МПа} < [\sigma] = 160 \text{ МПа};$$

$$\sigma_{min} = 98,1 \text{ МПа} < [\sigma] = 160 \text{ МПа}.$$

Таким чином, умова міцності виконується.

За другою теорією міцності (при $\mu = 0,3$):

$$58,1 - 0,3(-98,1) = 87,53 \text{ МПа} < [\sigma];$$

$$|-98,1 - 0,3 \cdot 58,1| = 115,53 \text{ МПа} < [\sigma].$$

Умова міцності також виконується.

Так само й за третьою теорією міцності:

$$\sigma_1 - \sigma_3 = 58,1 - (-98,1) = 156,2 \text{ МПа} < [\sigma].$$

За четвертою теорією міцності:

$$\sqrt{58,1^2 + (-98,1)^2 - 58,1 \cdot (-98,1)} = 136,74 < [\sigma].$$

Отже, за всіма теоріями міцності, що розглядалися, умова міцності виконується. Але можливі випадки, коли за одними теоріями умова міцності буде виконуватися, а за іншими – ні, тому до вибору теорії міцності при розрахунках слід підходити зважено або користуватися декількома.

Визначаються відносні лінійні деформації ребр кубика.

За завданням має місце плоский напружений стан, тому $\sigma_z = 0$.

Модуль пружності приймається рівним $E = 2 \cdot 10^5$ МПа.

Тоді відносні деформації ребр кубика, за узагальненим законом Гука, дорівнюють:

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E} [\sigma_x - \mu(\sigma_y + \sigma_z)] = \frac{1}{2 \cdot 10^5} [-70 - 0,3 \cdot 30] = 3,95 \cdot 10^{-4};$$

$$\varepsilon_y = \frac{1}{E} [\sigma_y - \mu(\sigma_x + \sigma_z)] = \frac{1}{2 \cdot 10^5} [-30 - 0,3 \cdot (-70)] = 2,55 \cdot 10^{-4};$$

$$\varepsilon_z = \frac{1}{E} [\sigma_z - \mu(\sigma_x + \sigma_y)] = \frac{1}{2 \cdot 10^5} [-0,3(-70 + 30)] = 0,6 \cdot 10^{-4}.$$

Абсолютні деформації ребр кубика складають:

$$\Delta a_x = \varepsilon_x \cdot a = 3,95 \cdot 10^{-4} \cdot 10 = 3,95 \cdot 10^{-3} \text{ см};$$

$$\Delta a_y = \varepsilon_y \cdot a = 2,55 \cdot 10^{-4} \cdot 10 = 2,55 \cdot 10^{-3} \text{ см};$$

$$\Delta a_z = \varepsilon_z \cdot a = 0,6 \cdot 10^{-4} \cdot 10 = 0,6 \cdot 10^{-3} \text{ см};$$

Відносна об'ємна деформація кубика:

$$\varepsilon_V = \frac{1-2\mu}{E} (\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3) = \frac{1-2 \cdot 0,3}{2 \cdot 10^5} (58,1 + 0 - 98,1) = -0,8 \cdot 10^{-4}.$$

Абсолютна зміна об'єму:

$$\Delta V = \varepsilon_V \cdot V_0 = -0,8 \cdot 10^{-4} \cdot 10^3 = -0,08 \text{ см}^3.$$

Тут $V_0 = 10 \text{ см}^3$ – об'єм кубика до деформування.

Визначаються напруження, що діють на площадках, які розташовані під кутами $\alpha = 30^\circ$ і $\alpha + 90^\circ = 120^\circ$ по відношенню до головних майданчиків. Вони визначаються за формулами:

$$\sigma_{\alpha} = \sigma_{\max} \cdot \cos^2 \alpha + \sigma_{\min} \cdot \sin^2 \alpha = 58,1 \cdot 0,866^2 - 98,1 \cdot 0,5^2 = 19,05 \text{ МПа};$$

$$\sigma_{\alpha+90} = \sigma_{\max} \cdot \sin^2 \alpha + \sigma_{\min} \cdot \cos^2 \alpha = 58,1 \cdot 0,5^2 - 98,1 \cdot 0,866^2 = -59,05 \text{ МПа};$$

$$\tau_{\alpha} = -\tau_{\alpha+90} = \frac{\sigma_{\max} - \sigma_{\min}}{2} \cdot \sin 2\alpha = \frac{58,1 - (-98,1)}{2} \cdot 0,866 = 67,64 \text{ МПа};$$

$$\tau_{\alpha+90} = -67,64 \text{ МПа}.$$

Для перевірки правильності розрахунків слід скористатися властивістю сталості суми нормальних напружень при повороті майданчиків:

$$\sigma_{\max} + \sigma_{\min} = \sigma_{\alpha} + \sigma_{\alpha+90};$$

$$58,1 - 98,1 = 19,05 - 59,05 = -40.$$

На рис. 4.4 показані напрямки головних напружень і напружень, що визначалися на площадках під заданим кутом α .

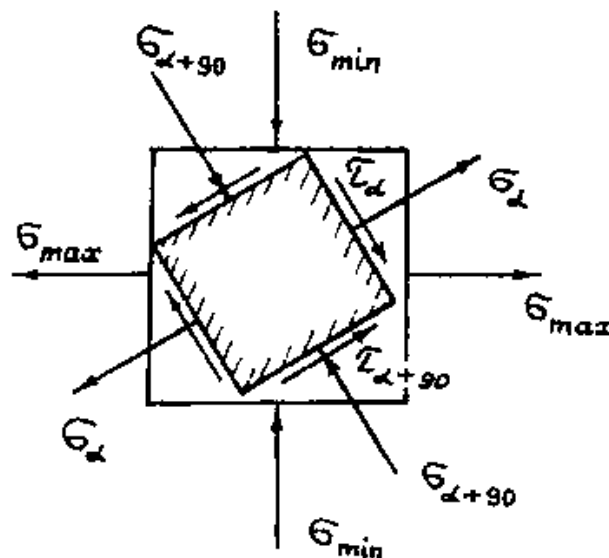
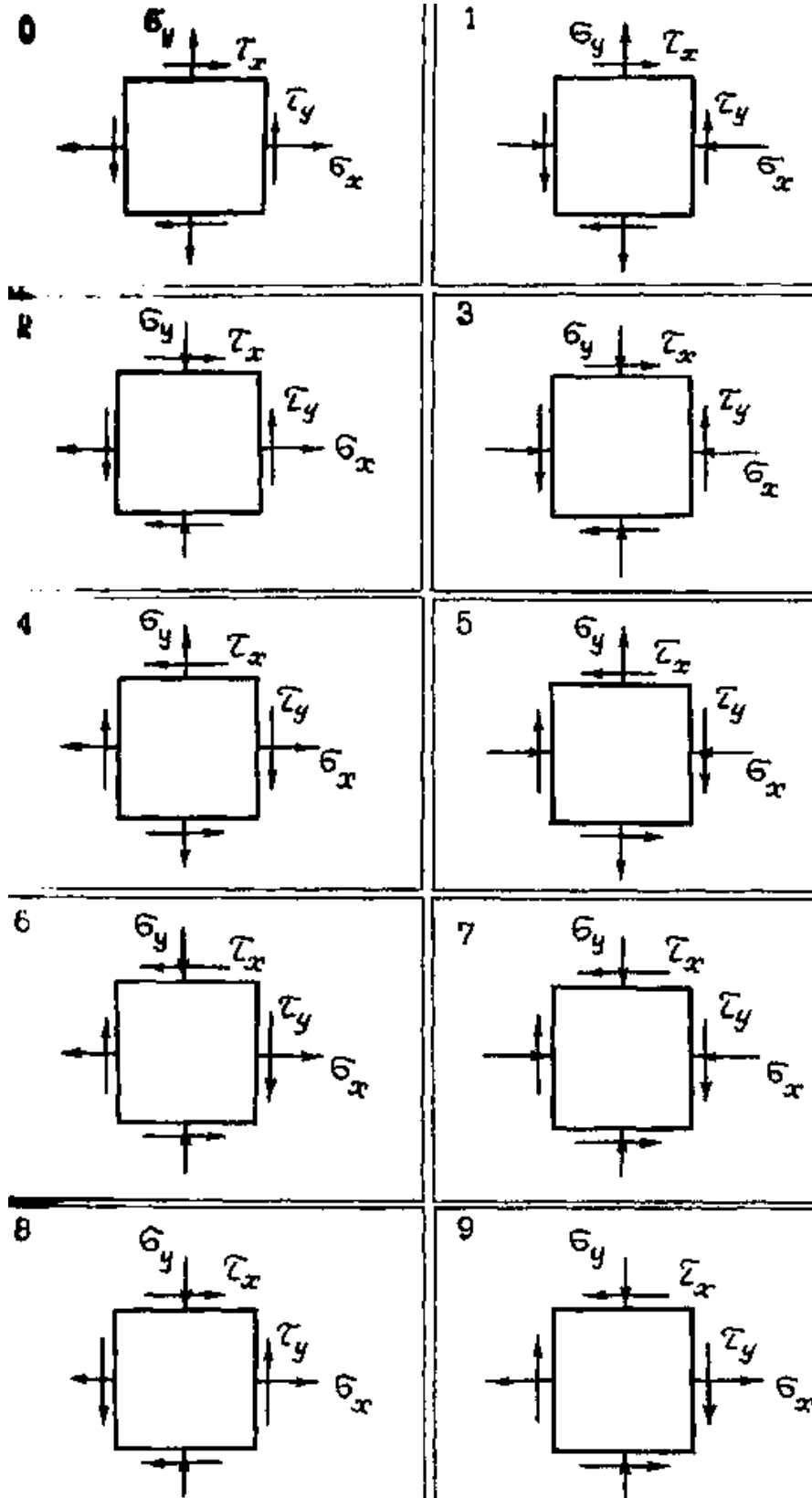


Рисунок 4.4 – Головні напруження та напруження під заданим кутом α

4.2 Завдання до самостійної роботи за темою 4

Варіанти плоских напружених станів:



Таблиця 4.1 – Вихідні дані для дослідження плоского напруженого стану в точці матеріалу

Цифри шифру			
Перша	Друга		Третя
Номер схеми	σ_x , МПа	σ_y , МПа	τ_y , МПа
0	80	50	70
1	130	60	30
2	120	40	50
3	100	20	60
4	50	120	60
5	30	120	40
6	80	90	40
7	140	40	50
8	50	110	50
9	150	50	20

4.3 Контрольні запитання за темою 4

1. Що називається напруженим станом в точці?
2. Види напруженого стану.
3. Визначення головних майданчиків і головних напружень.
4. Як визначаються положення та величини головних напружень при плоскому напруженому стані?
5. Як знаходяться екстремальні дотичні напруження і положення майданчиків зсуву?
6. Як знаходяться напруження на майданчиках, повернутих на кут α і $\alpha + 90^\circ$ по відношенню до відомих?
7. Закон парності дотичних напружень.
8. Властивість інваріантності нормальних напружень.
9. Узагальнений закон Гука.
10. Відносна зміна об'єму.
11. Абсолютна зміна об'єму.
12. Теорії міцності.

5 РОЗРАХУНОК БАЛОК ПРИ ПЛОСКОМУ ПОПЕРЕЧНОМУ ЗГИНАННІ

Згинанням називається така деформація, при якій відбувається викривлення осей прямих брусів або зміна кривизни кривих стержнів. При згинанні прямого стержня волокна (перерізи стержня вздовж його осі), паралельні осі стержня зі ввігнутої сторони коротшають (стискаються), а у вигнутої – подовжуються (розтягуються). Прямолінійний стержень, який в основному працює на згинання, називається балкою.

Плоске поперечне згинання – це такий випадок, коли всі зовнішні сили перпендикулярні до осі стержня та розташовані в площині, що співпадає з віссю симетрії поперечного перерізу балки. В цьому випадку зігнута вісь балки також лежить в цій площині.

Для плоского поперечного випадку згинання характерним є те, що в поперечних перерізах балки діє два внутрішніх силових фактори – згинальний момент M_x і поперечна сила Q_y . Якщо ж згинальний момент на окремій ділянці балки або на всій її довжині постійний, а поперечна сила дорівнює нулю, то згинання називається чистим.

Внутрішні силові фактори знаходяться методом перерізів, при цьому встановлюються такі правила знаків (рис. 5.1):

а) згинальний момент в перерізі балки вважається додатним, якщо він розтягує нижні волокна балки;

б) поперечна сила вважається додатною, якщо вона обертає відсічену частину балки за годинниковою стрілкою.

З правил знаків, прийнятих для M_x та Q_y впливають такі практичні вказівки:

а) додатні значення згинального моменту M_x створюють сили, спрямовані вгору, незалежно від того, чи розташовані вони ліворуч, чи праворуч від перерізу балки, що розглядається;

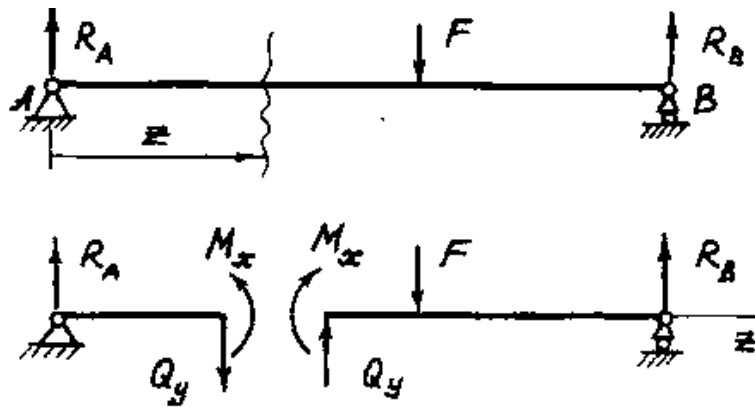


Рисунок 5.1 – Розрахункова схема балки та внутрішні зусилля

б) додатні значення Q_y створюють сили, спрямовані вгору, якщо вони розташовані ліворуч від перерізу, що розглядається, та спрямовані вниз, якщо вони розташовані праворуч від нього.

Пошук внутрішніх силових факторів може бути виконаний лише після того, як визначені всі невідомі опорні реакції.

Для побудови епюр розрахункових параметрів вся конструкція повинна бути розбита на окремі силові ділянки, в межах кожної з яких навантаження має один безперервний закон зміни. Виходячи з цього, межами ділянок будуть характерні перерізи балки, в яких прикладені зосереджені сили або моменти, а також починається або закінчується розподілене навантаження.

Згинальний момент M_x , поперечна сила Q_y та інтенсивність зовнішнього розподіленого навантаження q , пов'язані диференціальними співвідношеннями:

$$\frac{dQ_y}{dz} = q; \quad \frac{dM_x}{dz} = Q_y; \quad \frac{d^2M_x}{dz^2} = q.$$

На основі цих залежностей сформульовані правила контролю при побудові епюр:

1) якщо на ділянці балки відсутнє зовнішнє розподілене навантаження $q = 0$, то на цій ділянці поперечна сила постійна $Q_y = const$, а згинальний момент змінюється за лінійним законом $M_x = M_x(z)$;

2) якщо на ділянці балки діє розподілене навантаження постійної інтенсивності $q = const$, то на цій ділянці поперечна сила змінюється за лінійним законом $Q_y = Q_y(z)$, а згинальний момент – за законом квадратної параболи $M_x = M_x(z^2)$;

3) згинальний момент досягає своїх екстремальних значень в тих перерізах балки, в яких поперечна сила дорівнює нулю; якщо при цьому поперечна сила змінює знак з плюса на мінус, то згинальний момент сягає максимального значення (у межах ділянки, що розглядається), а якщо знак змінюється з мінуса на плюс – то мінімального;

4) якщо в перерізі балки прикладена зосереджена сила, то під цією силою на епюрі Q_y буде стрибок на величину цієї сили, а епюра M_x в місці прикладення сили матиме злам в напрямку, протилежному дії сили;

5) якщо в перерізі балки прикладений зовнішній згинальний момент, то на епюрі M_x в цьому перерізі буде стрибок на величину діючого моменту, а на епюрі Q_y не буде ніяких змін;

б) якщо на ділянці $Q_y > 0$, то $M_x(z)$ зростає, а якщо $Q_y < 0$, то $M_x(z)$ зменшується.

Згинальний момент призводить до виникнення в поперечному перерізі балки нормальних напружень σ_z , які змінюються по висоті перерізу за лінійним законом:

$$\sigma_z = -\frac{M_x}{I_x} \cdot y$$

Максимальні напруження виникають у волокнах балки, найбільш віддалених від нейтральної шару (тобто поздовжньому перерізі, в якому

$\sigma_z = 0$). Переріз балки підбирають за найбільш напруженим перерізом, в якому згинальний момент досягає максимального значення M_x^{max} . Тоді для симетричних відносно горизонтальної осі перерізів (прямокутник, круг, двотавр) умова міцності за нормальними напруженням може бути записана у вигляді:

$$\sigma_{max} = \frac{M_{xmax}}{W_x} \leq [\sigma] \quad (5.1)$$

Тут W_x – осьовий момент опору; $[\sigma]$ – гранично допустиме значення нормального напруження.

З формули (5.1) визначається необхідний момент опору для підбору поперечного перерізу балки:

$$W_x \geq \frac{M_{xmax}}{[\sigma]}$$

Поперечна сила Q_y викликає дотичні напруження τ_y , які знаходяться формулою Журавського:

$$\tau_y = -\frac{Q_y}{b_{(y)}} \cdot \frac{S_x^{отс.ч}}{I_x} \quad (5.2)$$

Розподіл цих напружень за висотою перерізу носить нелінійний характер (рис. 5.2), а найбільші значення мають дотичні напруження нейтрального шару балки. Для двотаврового перетину умова міцності за дотичними напруженнями має вигляд:

$$\tau_{ymax} = \frac{Q_{ymax}}{d} \cdot \frac{S_{xmax}^{отс.ч}}{I_x} \leq [\tau]$$

Тут $S_{xmax}^{омс.ч}$ – максимальний статичний момент площі відсіченої частини перерізу. У довільній точці балки при згинанні виникає плоский напружений стан, обумовлений напруженнями σ_z і τ_y . Головні напруження визначаються відповідно до теорії плоского напруженого стану

$$\sigma_{\frac{max}{min}} = \frac{\sigma_z}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_z}{2}\right)^2 + \tau_y^2}.$$

Повна перевірка балки на міцність включає в себе:

- 1) перевірку на міцність за нормальними напруженнями в перерізі, де діє максимальний згинальний момент M_x^{max} ;
- 2) перевірку на міцність за дотичними напруженнями в перерізі, де діє максимальна поперечна сила Q_y^{max} ;
- 3) перевірку на міцність за головними напруженнями в тих перерізах, де обидва зусилля M_x та Q_y одночасно близькі до максимальних за формулами (для пластичних матеріалів):

- за третьою теорією міцності

$$\sigma_1 - \sigma_3 \leq [\sigma] \qquad \sqrt{\sigma_z^2 + 4\tau_y^2} \leq [\sigma]$$

- за четвертою теорією міцності

$$\sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_3^2 - \sigma_1\sigma_3} \leq [\sigma] \qquad \sqrt{\sigma_z^2 + 3\tau_y^2} \leq [\sigma]$$

Так у двотаврі при перевірці за головними напруженнями небезпечною є точка перерізу на межі переходу від полиці до стінки (т. 3, т. 3'), де й нормальні, і дотичні напруження приймають досить великі значення.

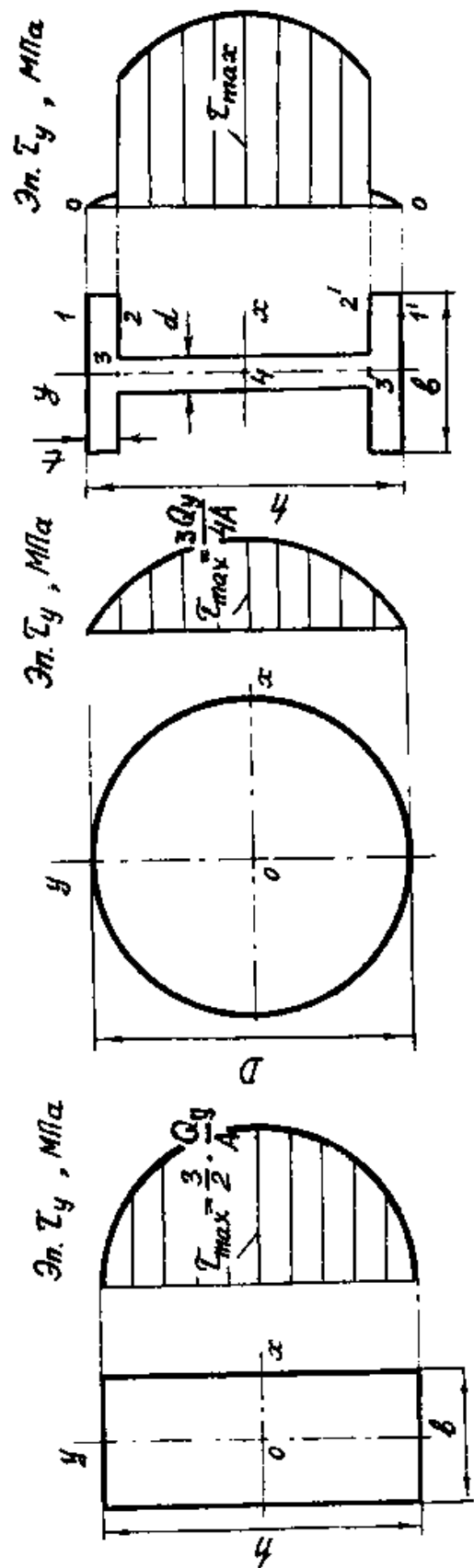


Рисунок 5.2 – Розподіл дотичних напружень за висотою перерізу балки

У більшості випадків практичного розрахунку конструкцій, що працюють на згинання, необхідно також провести їх розрахунок на жорсткість. Під розрахунком на жорсткість слід розуміти оцінку пружної піддатливості балки під дією прикладених навантажень і підбір таких розмірів поперечного перерізу, при яких поперечні переміщення не перевищуватимуть встановлених нормами меж. Умову жорсткості можна записати у вигляді:

$$|y_{max}| \prec [y]$$

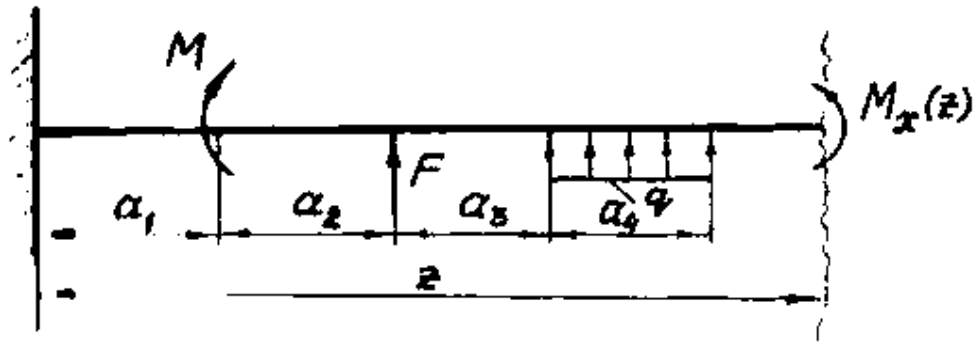
Тут $|y_{max}|$ – найбільший фактичний прогин, $[y]$ – гранично допустима величина прогину, встановлена на основі експериментальних та експлуатаційних даних.

Для перевірки жорсткості балки необхідно опанувати методику визначення поперечних переміщень точок балки під дією будь-якого зовнішнього навантаження. Найбільш поширеним методом визначення прогинів є метод початкових параметрів, який дозволяє для балки постійної жорсткості визначати прогини з лише одного рівняння – універсального рівняння пружної лінії.

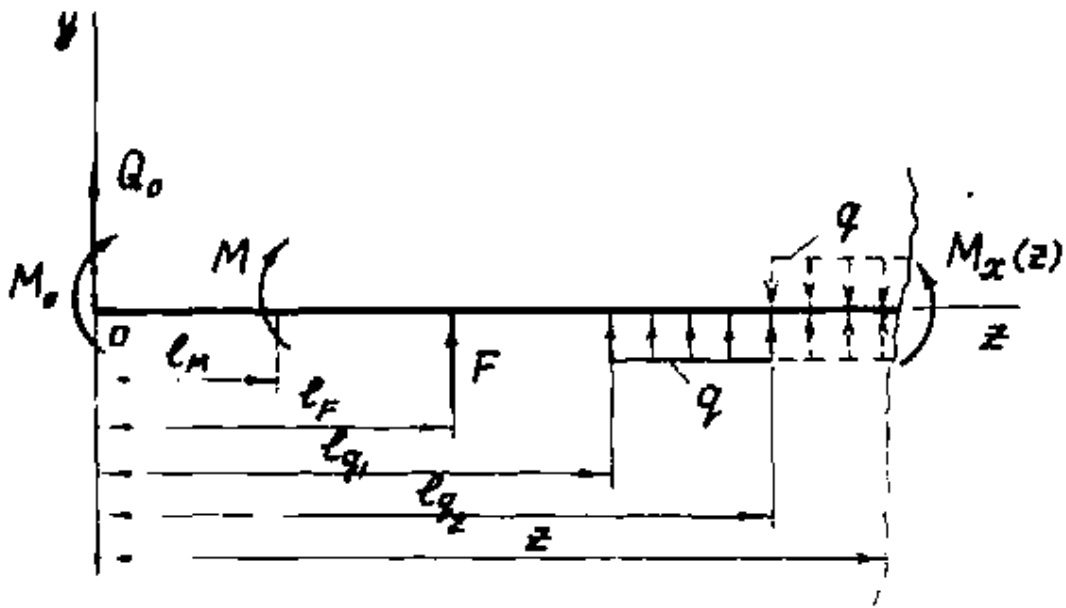
На рис. 5.3, а показано ділянку консольної балки, на якій прикладено навантаження, що зустрічаються найчастіше, серед яких:

- а) зосереджений згинальний момент M ;
- б) зосереджена сила F , прикладена перпендикулярно осі балки;
- в) розподілене на частині балки навантаження з постійною інтенсивністю q .

Початок координат поміщається в закладення (найбільш жорстку опору), та складається вираження для згинального моменту ділянки, що розглядається. На рис. 5.3, б напрямки прикладених навантажень показані таким чином, що вони викликають додатний згинальний момент:



а



б

- а) розрахункова схема балки;
 б) початкові параметри рівняння зігнутої осі.

Рисунок 5.3 – До визначення переміщень балки

$$M_x(z) = M_o \cdot z^0 + M(z - l_M) + Q_o \cdot z + F(z - l_F) + q \frac{(z - l_{q1})^2}{2} - q \frac{(z - l_{q2})^2}{2}$$

Згинальний момент пов'язаний з прогином наближеним диференціальним рівнянням зігнутої осі балки:

$$\frac{d^2 y}{dz^2} = \frac{M_x(z)}{EI_x} \quad (5.3)$$

Тоді після дворазового інтегрування (5.3) можна прийти до вираження для визначення прогину в перерізі балки:

$$EI_x y(z) = M_o \cdot \frac{z^2}{2} + M \frac{(z-l_M)^2}{2} + Q_o \frac{z^3}{6} + F \frac{(z-l_F)}{6} + q \frac{(z-l_{q_1})^2}{2} - q \frac{(z-l_{q_2})^2}{2} + EI_x \cdot y_o + EI_x \cdot \theta_o \cdot z,$$

Тут y_o , θ_o – постійні інтегрування, або прогин і кут повороту на початку координат (початкові значення).

Розглянутий спрощений випадок містить лише по одному з типових зовнішніх силових факторів. На даному відрізку може бути кілька зосереджених моментів, зосереджених сил, декілька ділянок розподіленого навантаження. У цьому випадку рівняння для прогину будь-якого з перерізів балки виходить з розгляду універсального рівняння пружної лінії, яке має вигляд:

$$EI_x y(z) = EI_x \cdot y_o + EI_x \cdot \theta_o \cdot z + M_o \cdot \frac{z^2}{2!} + Q_o \frac{z^3}{3!} + \sum_i M_i \frac{(z-l_{M_i})^2}{2!} + \sum_i F_i \frac{(z-l_{F_i})}{3!} + \sum_i q_i \frac{(z-l_{q_i})^2}{4!} \quad (5.4)$$

Тут l_{M_i} , l_{F_i} , l_{q_i} – відстані від початку координат до точок прикладення відповідних зосереджених моментів M_i , сил F_i та до початку дії

розподілених навантажень q_i . Згинальний момент M_0 і поперечна сила Q_0 , що діє в перерізі, який збігається з початком координат, називаються статичними початковими параметрами і знаходяться з умов рівноваги балки, а постійні інтегрування y_0 , θ_0 – геометричні початкові параметри (прогин і кут повороту перерізу на початку координат), які знаходяться з умов закріплення балки.

У разі обривання розподіленого навантаження, якщо воно не доходить до кінця балки, його продовжують до кінця частини, що розглядається (додаткове навантаження) і вводять компенсуюче навантаження зворотного напрямку і тієї ж інтенсивності.

Обидва ці навантаження показані на рис. 5.3,6 пунктиром.

Коефіцієнти $z - l_i$ у рівнянні (5.4) повинні бути більше нуля, тобто до уваги беруться лише ті навантаження, які розташовані між початком координат і перерізом, що розглядається. Якщо ж виявиться $z - l_i < 0$, то це означає, що відповідне навантаження розташоване за даним перерізом z , у якому визначається прогин. Таке доданок викреслюється з рівняння.

У разі, якщо початок координат збігається із закладенням, тоді $y_0 = \theta_0 = 0$. Якщо ж початок координат поміщено на нерухомій опорі, тоді $y_0 = 0$, $\theta_0 \neq 0$.

З рівняння (5.4) шляхом диференціювання можна також отримати залежність для визначення кутів повороту перерізів балки:

$$\theta(z) = \frac{dy}{dz}.$$

5.1 Проектування консольної балки при плоскому поперечному згинанні

Для консольної балки необхідно:

- 1) побудувати епюри поперечних сил $Q_y(z)$ і згинальних моментів $M_x(z)$;
- 2) виходячи з умови міцності:

$$\sigma_{max} \leq [\sigma]$$

підібрати прямокутний, круглий і двотавровий перерізи та оцінити їх раціональність за витратами матеріалу (співвідношенням сторін прямокутного перерізу прийняти $h / b = 4$);

3) для небезпечних перерізів двотаврової балки побудувати епюри нормальних напружень $\sigma_z(y)$, дотичних напружень $\tau_y(y)$ та провести повну перевірку міцності;

4) користуючись методом початкових параметрів скласти рівняння зігнутої осі для всіх ділянок двотаврової балки, визначити прогини в характерних точках і побудувати зігнуту вісь балки, перевірити жорсткість балки за умовою:

$$|y_{max}| \leq [y],$$

де $|y_{max}|$ – найбільший фактичний прогин;

$$[y] = l / 200;$$

l – довжина консолі.

У розрахунках прийняти:

$$[\sigma] = 210 \text{ МПа},$$

$$[\tau] = 105 \text{ МПа}.$$

Варіанти розрахункових схем і вихідні дані для виконання індивідуального завдання самостійної роботи наведені в п. 5.3, табл. 5.1.

Розглядається балка, розрахункова схема якої представлена на рис. 5.4, а із заданими параметрами:

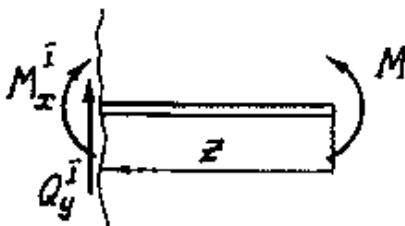
- довжина ділянки балки $a = 1,2$ м;
- довжина ділянки балки $b = 2$ м;
- довжина ділянки балки $c = 4$ м;
- зосереджена сила $F = 3$ кН;
- розподілене навантаження $q = 12$ кН/м;
- зовнішній зосереджений $M = 36$ кН·м.

Власна вага матеріалу балки не враховується.

Консольна балка розбивається на силові ділянки, для визначення внутрішніх зусиль початок координат зручно розміщувати у крайній точці вільного кінця консолі. Внутрішні поперечні сили $Q_y(z)$ та згинальні моменти $M_x(z)$ розраховуються за силовими ділянками, і будуються їх епюри (рис. 5.4, б, в).

Ділянка I ($0 \leq z \leq 4$ м):

- за відсутності на ділянці зосереджених сил і розподіленого навантаження

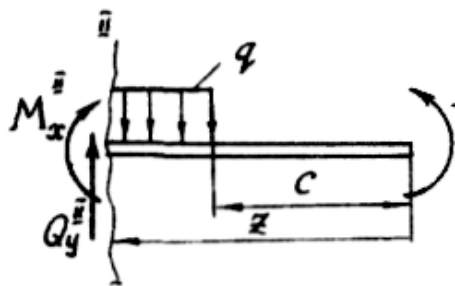


$$Q'_y = 0;$$

- згинальний момент в межах ділянки постійний

$$M'_x = M = 36 \text{ кН}\cdot\text{м} = \text{const.}$$

Ділянка II ($4 \text{ м} \leq z \leq 6 \text{ м}$):



- функція внутрішньої поперечної сили

на ділянці – лінійна

$$Q_y^II(z) = q \cdot (z - c);$$

$$Q_y^II(4) = 12 \cdot (4 - 4) = 0;$$

$$Q_y^II(6) = 12 \cdot (6 - 4) = 24 \text{ кН};$$

- функція внутрішнього згинального моменту на ділянці –

квадратична

$$M_x^II(z) = M - q \cdot \frac{(z - c)^2}{2};$$

$$M_x^II(4) = 36 - 12 \cdot \frac{(4 - 4)^2}{2} = 36 \text{ кН}\cdot\text{м};$$

$$M_x^II(6) = 36 - 12 \cdot \frac{(6 - 4)^2}{2} = 12 \text{ кН}\cdot\text{м}.$$

Ділянка III ($6 \text{ м} \leq z \leq 7,2 \text{ м}$):

- функція внутрішньої поперечної сили на ділянці – лінійна

$$Q_y^II(z) = q \cdot (z - c) - F;$$

$$Q_y^II(6) = 12 \cdot (6 - 4) - 3 = 21 \text{ кН};$$

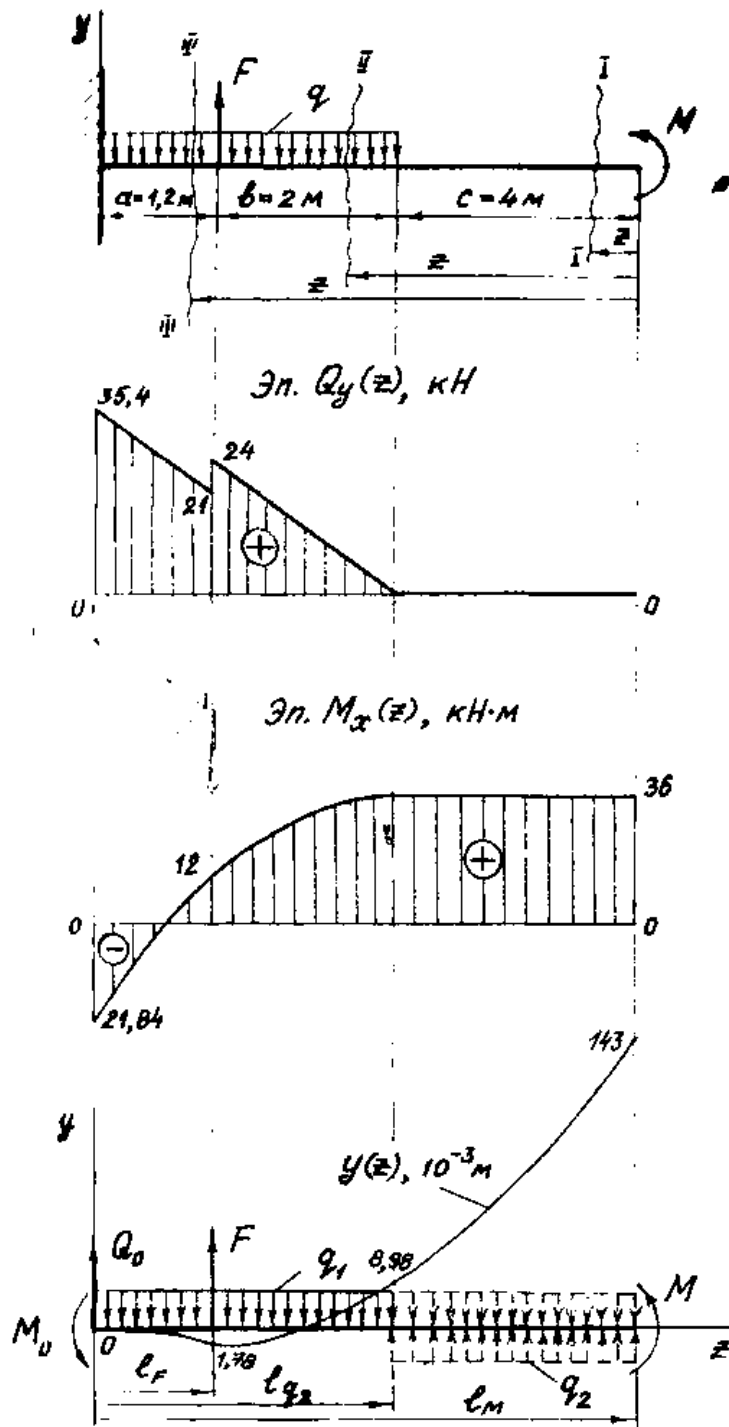
$$Q_y^II(7,2) = 12 \cdot (7,2 - 4) - 3 = 35 \text{ кН};$$

- функція внутрішнього згинального моменту на ділянці –

квадратична

$$M_x^III(z) = M - q \cdot \frac{(z - c)^2}{2} + F(z - b - c);$$

$$M_x^III(6) = 36 - 24 = 12 \text{ кН}\cdot\text{м};$$



- а) розрахункова схема з поділом на силові ділянки;
 б) епюра поперечних сил $Q_y(z)$;
 в) епюра згинальних моментів $M_x(z)$;
 г) розрахункова схема для визначення прогинів і зігнута вісь.

Рисунок 5.4 – Розрахунок консольної балки

$$M_x'''(7,2) = 36 - 12 \frac{(7,2-4)^2}{2} + 3(7,2-4-2) = -21,84 \text{ кН}\cdot\text{м}.$$

З умови міцності за нормальними напруженнями

$$\sigma_{max} = M_{xmax} / W_x \leq [\sigma]$$

визначається потрібний момент опору:

$$W_x \geq \frac{M_{xmax}}{[\sigma]} = \frac{36 \cdot 10^{-3}}{210} = 1,71 \cdot 10^{-4} \text{ м}^3.$$

Далі визначаються потрібні розміри перерізів.

Прямокутний переріз:

$$W_x = \frac{bh^2}{6} = \frac{b^3 \cdot 16}{6} \geq 1,71 \cdot 10^{-4} \text{ м}^3,$$

$$b \geq \sqrt[3]{\frac{6 \cdot 1,71 \cdot 10^{-4}}{16}} = 4 \cdot 10^{-2} \text{ м} = 4 \text{ см},$$

$$h = 4 \cdot b = 16 \text{ см};$$

$$A_{\blacksquare} = b \cdot h = 4 \cdot 16 = 64 \text{ см}^2.$$

Круглий переріз:

$$W_x = \frac{\pi D^3}{32} \geq 1,71 \cdot 10^{-4} \text{ м}^3,$$

$$D \geq \sqrt[3]{\frac{32}{\pi} \cdot 1,71 \cdot 10^{-4}} = 12 \cdot 10^{-2} \text{ м} = 12 \text{ см},$$

$$A_{\square} = \frac{\pi D^2}{4} = \frac{3,14}{4} \cdot 12^2 = 113 \text{ см}^2;$$

Двотавровий переріз.

З сортаменту вибирається двотавр I № 20, для якого:

$$W_x = 184 \text{ см}^3; \quad A_1 = 26,8 \text{ см}^2.$$

Виписуються розміри двотавра та геометричні характеристики перерізу:

$$\begin{aligned} b_n &= 0,1 \text{ м}; & t &= 0,84 \cdot 10^{-2} \text{ м}; & S_x &= 104 \cdot 10^{-6} \text{ м}^3; \\ h &= 0,2 \text{ м}; & d &= 0,52 \text{ см}; & I_x &= 1840 \cdot 10^{-8} \text{ м}^4. \end{aligned}$$

Оцінюється раціональність перерізів за витратами матеріалу:

$$\frac{A_{\square}}{A_{\perp}} = \frac{64}{26,8} = 2,39; \quad \frac{A_{\bullet}}{A_{\perp}} = \frac{113}{26,8} = 4,22; \quad \frac{A_{\perp}}{A_{\perp}} = 1$$

Раціональність перетинів зростає в такій послідовності:

$$A_{\bullet} : A_{\square} : A_{\perp} = 4,22 : 2,39 : 1.$$

На вихідній схемі (рис. 5.4, а) для двотаврової балки вказують три небезпечних перерізи:

1) переріз, в якому діє максимальний згинальний момент $M_{max} = 36 \text{ кН}\cdot\text{м}$;

2) переріз, в якому діє максимальна поперечна сила $Q_{max} = 35,4 \text{ кН}$;

3) переріз, в якому великими одночасно діють значні згинальний момент і поперечна сила $M_x = 21,84 \text{ кН}\cdot\text{м}$, $Q_y = 35,4 \text{ кН}$.

Для перерізу 1 необхідно побудувати епюру нормальних напружень $\sigma_z(y)$, які змінюються по висоті за лінійним законом:

$$\sigma_z(y) = \frac{M_{max}}{I_x} \cdot y$$

У найбільш віддалених від нейтральної шару волокнах при $y = \pm h / 2$ (т. 1 і 1', рис. 5.5, а):

$$\sigma_{z(1)} = \sigma_{z(1')} = \frac{M_{max}}{W_x} = \frac{36 \cdot 10^{-3}}{1,84 \cdot 10^{-4}} = 195 \text{ МПа,}$$

Напруження в т. 4, яка належить нейтральному шару:

$$\sigma_{z(4)} = 0.$$

З урахуванням того, що в даному перерізі нижні волокна розтягнуті, будується епюра $\sigma_z(y)$ (рис. 5.5, б).

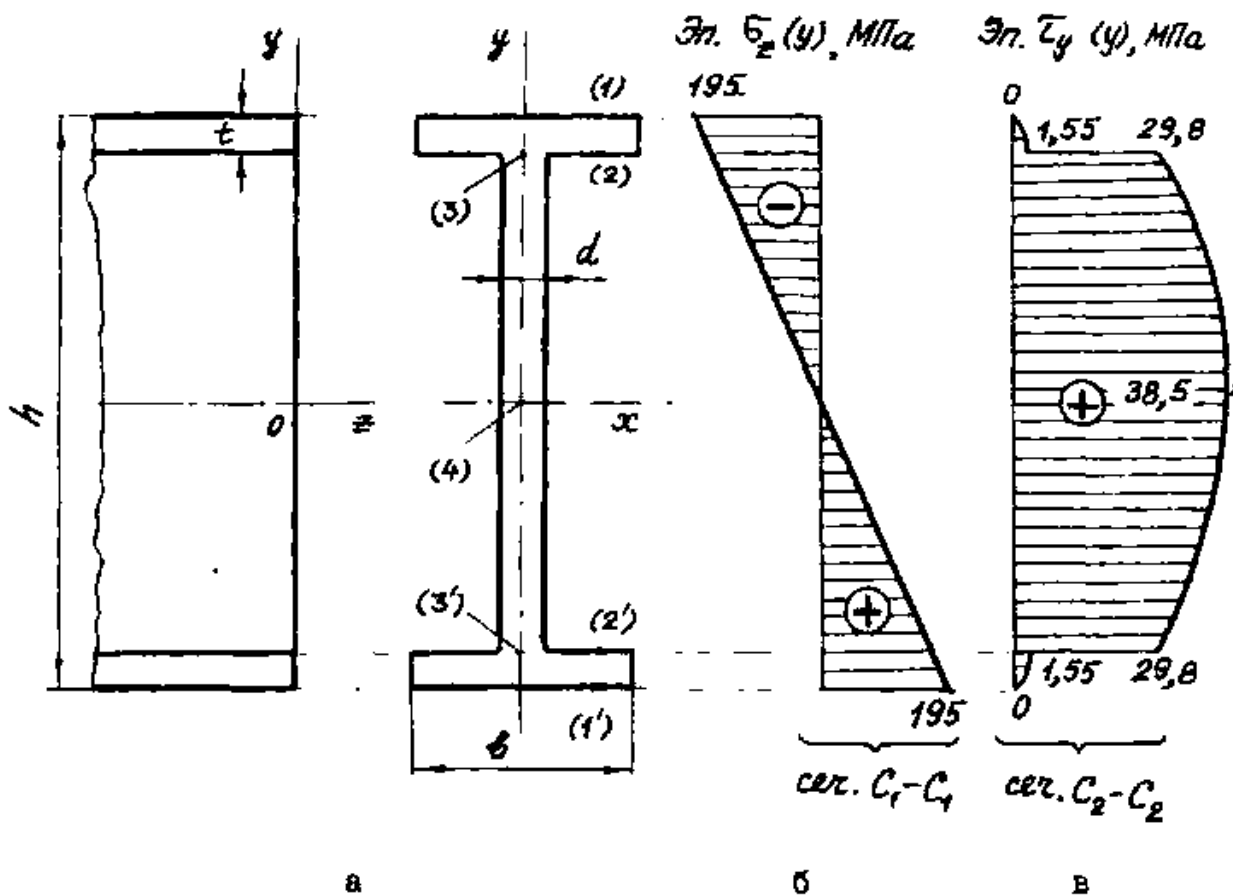
Для перерізу 2 будується епюра дотичних напружень $\tau_y(y)$ (рис. 5.5, в), які визначаються за формулою Журавського:

$$\tau_{y(i)} = \frac{Q_{max} \cdot S_{x(i)}^{omc.ч}}{I_x \cdot b(y_i)}.$$

Тут має місце нелінійна залежність дотичних напружень зі зміною висоти. Тому для побудови епюри необхідно розглянути кілька характерних точок поперечного перерізу:

$$S_{x(1)}^6 = 0 \quad \Rightarrow \quad \tau_{y(1)} = 0;$$

$$S_{x(2)}^{omc.ч} = b_n \cdot t \left(\frac{h-t}{2} \right) = 0,1 \cdot 0,84 \cdot 10^{-2} \cdot \frac{1}{2} (0,2 - 0,84 \cdot 10^{-2}) = 80,5 \cdot 10^{-6} \text{ м}^3;$$



- а) характерні точки;
 б) епюра нормальних напружень $\sigma_z(y)$;
 в) епюра дотичних напружень $\tau_y(y)$.

Рисунок 5.5 – Напружений стан балки двотаврового перерізу

$$b(y_2) = b_n = 0,1 \text{ м};$$

$$\tau_{y(2)} = \tau_{y(2')} = \frac{35,4 \cdot 10^{-3} \cdot 80,5 \cdot 10^{-6}}{1840 \cdot 10^{-8} \cdot 0,1} = 1,55 \text{ МПа};$$

$$b(y_3) = d = 0,52 \cdot 10^{-2} \text{ м};$$

$$\tau_{y(3)} = \tau_{y(32)} = \frac{35,4 \cdot 10^{-3} \cdot 80,5 \cdot 10^{-6}}{1840 \cdot 10^{-8} \cdot 0,52 \cdot 10^{-2}} = 29,8 \text{ МПа};$$

$$S_{x(4)}^e = S_x = 104 \cdot 10^{-6} \text{ м}^3;$$

$$\tau_{y(4)} = \tau_{max} = \frac{35,4 \cdot 10^{-3} \cdot 104 \cdot 10^{-6}}{1840 \cdot 10^{-8} \cdot 0,52 \cdot 10^{-2}} = 38,5 \text{ МПа},$$

Таким чином, міцність за дотичними напруженнями при $\tau_{max} = 38,5 \text{ МПа} < [\tau] = 105 \text{ МПа}$ в перерізі 2 забезпечується.

Скориставшись третьою теорією міцності, перевіряється міцність в перерізі 3 за головними напруженнями.

У двотаврової балки найбільш навантаженою в цьому випадку буде т. 3, для якої

$$\sigma_{z(3)} = \frac{21,84 \cdot 10^{-3}}{1840 \cdot 10^{-8}} \cdot \left(\frac{0,2}{2} - 0,84 \cdot 10^{-2} \right) = 108,7 \text{ МПа},$$

а напруження $\tau_{y(3)} = 29,8 \text{ МПа}$ обчислювалося раніше.

Тоді головні напруження:

$$\sigma_{1(3)} = \frac{\sigma_z}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_z}{2}\right)^2 + \tau_y^2}, \text{ МПа};$$

$$\sigma_{1(3)} = \frac{108,7}{2} + \sqrt{\left(\frac{108,7}{2}\right)^2 + 29,8^2} = -7,63 \text{ МПа}.$$

За третьою теорією міцності виходить:

$$\sigma_{1(3)} - \sigma_{3(3)} = 116,3 - (-7,63) = 129,9 \text{ МПа} < [\sigma] = 210 \text{ МПа},$$

тобто міцність забезпечується.

Використовуючи метод початкових параметрів, визначаються прогини в характерних перерізах балки та будується її зігнута вісь.

При пошуку значень прогинів початок координат розміщується в затисненні та визначаються опорні реакції:

$$\sum F_{iy} = 0;$$

$$Q_0 + F - q \cdot (a + b) = 0;$$

$$Q_0 = q \cdot (a + b) - F = 12 \cdot (1,2 + 2) - 3 = 35,4 \text{ кН};$$

$$\Sigma M_{i(0)} = 0;$$

$$M + F \cdot a + M_0 - q \frac{(a + b)^2}{2} = 0,$$

$$M_0 = q \frac{(a + b)^2}{2} - M - F \cdot a = 12 \cdot \frac{(1,2 + 2)^2}{2} - 36 - 3 \cdot 1,2 = 21,84 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

Тут F_0 , M_0 – зосереджена реакція і момент в затисненні.

Початкові параметри задачі, що розглядається:

$$y_0 = 0; \quad \theta_0 = 0.$$

Необхідно перетворити розрахункову схему балки таким чином, як показано на рис. 5.4, г. Тоді універсальне рівняння пружної лінії буде мати вигляд:

$$EI_x \cdot y(z) = -M_0 \frac{z^2}{2} + Q_0 \frac{z^3}{6} + F \frac{(z - l_F)^3}{6} - q \frac{z^4}{24} + q \frac{(z - l_{q2})^4}{24}.$$

Записуються вираження для $y(z)$ на кожній силовій ділянці та обчислюються значення в характерних перерізах. На відміну від визначення внутрішніх зусиль, слід розглядати балку від закладення, починаючи з силової ділянки III.

Ділянка III ($0 \leq z \leq 1,2 \text{ м}$):

$$y(z) = \frac{1}{EI_x} \left[-M_0 \cdot \frac{z^2}{2} + Q_0 \cdot \frac{z^3}{6} - q \cdot \frac{z^4}{24} \right]$$

при $z = 0$

$$y(0) = 0;$$

при $z = 1,2$ м

$$y(1,2) = \frac{1 \cdot 10^{-3}}{2 \cdot 10^5 \cdot 1840 \cdot 10^{-8}} \left[-21,84 \cdot \frac{1,2^2}{2} + 35,4 \cdot \frac{1,2^3}{6} - 12 \cdot \frac{1,2^4}{24} \right] = -1,78 \cdot 10^{-3} \text{ м.}$$

Ділянка II ($1,2 \text{ м} \leq z \leq 3,2 \text{ м}$):

$$y(z) = \frac{1}{EI_x} \left[-M_o \cdot \frac{z^2}{2} + Q_o \cdot \frac{z^3}{6} - q \cdot \frac{z^4}{24} + F \frac{(z-l_F)^3}{6} \right]$$

при $z = 1,2$ м

$$y(1,2) = -1,78 \cdot 10^{-3} \text{ м;}$$

при $z = 3,2$ м

$$y(3,2) = \frac{1 \cdot 10^{-3}}{2 \cdot 10^5 \cdot 1840 \cdot 10^{-8}} \left[-21,84 \cdot \frac{3,2^2}{2} + 35,4 \cdot \frac{3,2^3}{6} - 12 \cdot \frac{3,2^4}{24} + 3 \cdot \frac{(3,2-1,2)^3}{6} \right] = 8,98 \cdot 10^{-3}$$

Ділянка I ($3,2 \text{ м} \leq z \leq 7,2 \text{ м}$):

$$y(z) = \frac{1}{EI_x} \left[-M_o \cdot \frac{z^2}{2} + Q_o \cdot \frac{z^3}{6} + F \frac{(z-l_F)^3}{6} - q \cdot \frac{z^4}{24} + q \cdot \frac{(z-l_{q2})^4}{24} \right]$$

при $z = 3,2$ м

$$y(3,2) = 8,98 \cdot 10^{-3} \text{ м};$$

при $z = 7,2 \text{ м}$

$$y(7,2) = 1,43 \cdot 10^{-1} \text{ м.}$$

За знайденими значеннями прогинів будується зігнута вісь балки $y(z)$ (рис. 5.4, г).

Умова жорсткості має вигляд:

$$|y_{max}| \leq [y],$$

де $[y]$ – гранично допустиме значення прогину, чисельно рівне:

$$[y] = \frac{a + b + c}{200} = \frac{7,2}{200} = 0,36 \cdot 10^{-1} \text{ м.}$$

Таким чином умова жорсткості не задовольняється. Перевищення гранично допустимого прогину – в 4 рази:

$$y_{max} = 1,43 \cdot 10^{-1} > [y] = 0,36 \cdot 10^{-1} \text{ м.}$$

Тому при проектуванні реальної конструкції варто було б збільшити розмір двотаврового профілю, щоб осьовий момент інерції перерізу складав $I_x = 4 \cdot 1840 \cdot 10^{-8} = 7360 \cdot 10^{-8} \text{ м}^4$ або замінити консольну схему балки на двохопорну.

5.2 Розрахунок шарнірно опертої балки при плоскому поперечному згинанні

Для балки на двох шарнірних опорах необхідно:

1) побудувати епюри внутрішніх зусиль – поперечної сили $Q_y(z)$ і згинального моменту $M_x(z)$;

2) виходячи з умови міцності за нормальними напруженням:

$$\sigma_{max} \leq [\sigma]$$

підібрати прямокутний, круглий і двотавровий перерізи та оцінити їх раціональність за витратами матеріалу (співвідношенням сторін прямокутного перерізу прийняти $h / b = 4$);

У розрахунках прийняти:

$$[\sigma] = 210 \text{ МПа.}$$

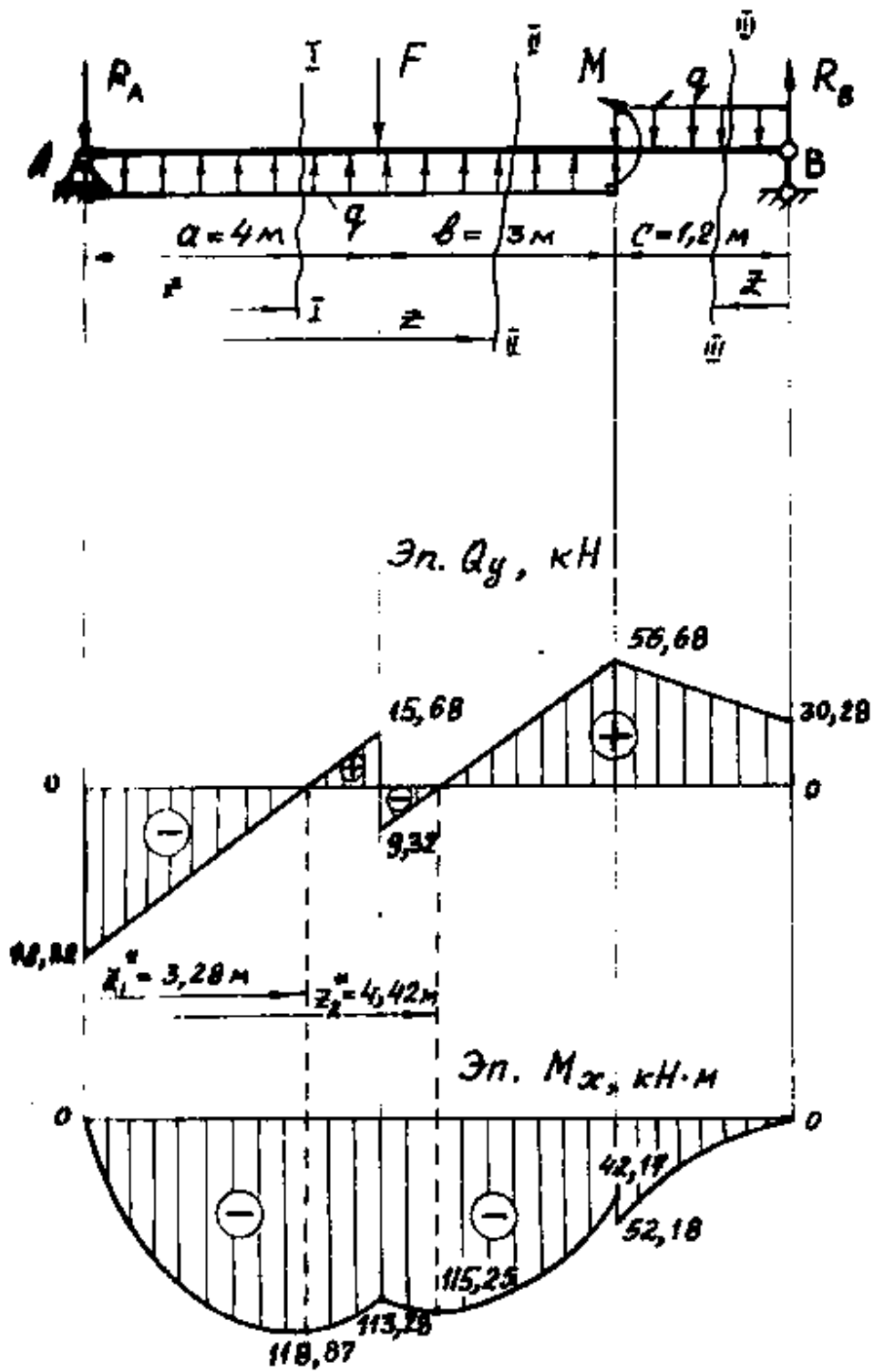
Варіанти розрахункових схем і вихідні дані для виконання індивідуального завдання самостійної роботи наведені в п. 5.3, табл. 5.1.

Розглядається балка, розрахункова схема якої представлена на рис. 5.6, а із заданими параметрами:

- довжина ділянки балки $a = 4$ м;
- довжина ділянки балки $b = 3$ м;
- довжина ділянки балки $c = 1,2$ м;
- зосереджена сила $F = 25$ кН;
- розподілене навантаження $q = 22$ кН/м;
- зовнішній зосереджений $M = 10$ кН·м.

Власна вага матеріалу балки не враховується.

Визначаються реакції в опорах:



- а) розрахункова схема з поділом на силові ділянки;
- б) еюра поперечних сил $Q_y(z)$;
- в) еюра згинальних моментів $M_x(z)$.

Рисунок 5.6 – Розрахунок двохопорної балки

$$\sum M_{i(A)} = 0$$

$$q \cdot \frac{(a+b)^2}{2} + M + R_B(a+b+c) - F \cdot a - q \cdot c \left(a + b + \frac{c}{2} \right) = 0.$$

$$R_B = \frac{1}{a+b+c} \left[-q \cdot \frac{(a+b)^2}{2} - M + F \cdot a + q \cdot c \left(a + b + \frac{c}{2} \right) \right] =$$

$$= \frac{1}{8,2} \left[-22 \cdot \frac{7^2}{2} - 10 + 25 \cdot 4 + 22 \cdot 1,2 \left(7 + \frac{1,2}{2} \right) \right] = -30,28 \text{ кН},$$

$$\sum M_{i(B)} = 0$$

$$R_A(a+b+c) + F(b+c) + q \cdot \frac{c^2}{2} + M - q(a+b) \left(\frac{a+b}{2} + c \right) = 0.$$

$$R_A = \frac{1}{a+b+c} \left[q \cdot (a+b) \left(\frac{a+b}{2} + c \right) - F \cdot (b+c) - q \frac{c^2}{2} - M \right] =$$

$$= \frac{1}{8,2} \left[22 \cdot 7 \left(\frac{7}{2} + 1,2 \right) - 25(3+1,2) - 22 \cdot \frac{1,2^2}{2} - 10 \right] = 72,32 \text{ кН}.$$

Перевірка:

$$\sum F_{iy} = 0$$

$$q(a+b) + R_B - R_A - F - q \cdot c = 0$$

$$22(4+3-1,2) + (-30,28) - 72,32 - 25 = 0.$$

Балка розбивається на силові ділянки, розраховуються та будуються епюри поперечних сил $Q_y(z)$ і згинальних моментів $M_x(z)$.

Ділянка I ($0 \leq z \leq 4$ м):

- функція внутрішньої поперечної сили на ділянці – лінійна

$$Q_y^I(z) = q \cdot z - R_A;$$

$$Q_y^I(0) = -R_A = -72,32 \text{ кН};$$

$$Q_y^I(4) = 22 \cdot 4 - 72,32 = 15,68 \text{ кН.}$$

- функція внутрішнього згинального моменту на ділянці –
квадратична

$$M_x^I(z) = q \frac{z^2}{2} - R_A \cdot z;$$

$$M_x^I(0) = 0,$$

$$M_x^I(4) = 22 \cdot \frac{4^2}{2} - 72,32 \cdot 4 = -113,28 \text{ кН}\cdot\text{м.}$$

Оскільки на першій ділянці існує переріз, в якому $Q_y^I = 0$, то в цьому перерізі M_x приймає екстремальне значення:

$$\frac{dM_x^I}{dz} = 2 \cdot \frac{qz}{2} - R_A = 0.$$

$$z_1^* = \frac{R_A}{q} = 72,32 / 22 = 3,28 \text{ м.}$$

У цьому перетині значення M_x^I дорівнює:

$$M_x^I(3,28) = 22 \cdot \frac{3,28^2}{2} - 72,32 \cdot 3,28 = -118,87 \text{ кН}\cdot\text{м.}$$

Ділянка II ($4 \text{ м} \leq z \leq 7 \text{ м}$):

- функція внутрішньої поперечної сили на ділянці – лінійна

$$Q_y^{II}(z) = q \cdot z - R_A - F$$

$$Q_y^{II}(4) = 22 \cdot 4 - 72,32 - 25 = -9,32 \text{ кН;}$$

$$Q_y^{\text{II}}(7) = 22 \cdot 7 - 72,32 - 25 = 56,68 \text{ кН};$$

- функція внутрішнього згинального моменту на ділянці – квадратична

$$M_x^{\text{II}}(z) = q \frac{z^2}{2} - R_A \cdot z - F(z - 4)$$

$$M_x^{\text{II}}(4) = -113,28 \text{ кН}\cdot\text{м};$$

$$M_x^{\text{II}}(7) = 22 \cdot \frac{7^2}{2} - 72,32 \cdot 7 - 25(7 - 4) = -42,17 \text{ кН}\cdot\text{м}.$$

На другій ділянці еюра $Q_y(z)$ також проходить через нульову лінію, тому необхідно знайти екстремальне значення згинального моменту:

$$\frac{dM_x^{\text{II}}}{dz} = 2 \cdot q \frac{z}{2} - R_A - F = 0.$$

$$z_2^* = \frac{R_A + F}{q} = \frac{72,32 + 25}{22} = 4,42 \text{ м};$$

$$M_x^{\text{II}}(4,42) = 22 \cdot \frac{4,42^2}{2} - 72,32 \cdot 4,42 - 25(4,42 - 4) = -115,25 \text{ кН}\cdot\text{м}.$$

Ділянка III ($0 \leq z \leq 1,2$ м):

- функція внутрішньої поперечної сили на ділянці – лінійна

$$Q_y^{\text{III}}(z) = -R_B + q \cdot z$$

$$Q_y^{\text{III}}(0) = -R_B = -(-30,28) = 30,28 \text{ кН};$$

$$Q_y^{\text{III}}(1,2) = -(-30,28) + 22 \cdot 1,2 = 56,68 \text{ кН};$$

- функція внутрішнього згинального моменту на ділянці –
квадратична

$$M_x'''(z) = R_B \cdot z - q \cdot \frac{z^2}{2}$$

$$M_x'''(0) = 0,$$

$$M_x'''(1,2) = -30,28 \cdot 1,2 - 22 \cdot \frac{1,2^2}{2} = -52,17 \text{ кН}\cdot\text{м}.$$

З умови міцності за нормальними напруженнями визначається необхідний момент опору, після чого визначаються необхідні розміри перерізів:

$$W_x \geq \frac{M_{\max}}{[\sigma]} = \frac{118,87 \cdot 10^{-3}}{210} = 5,66 \cdot 10^{-4} \text{ м}^3.$$

Прямокутний переріз:

$$W_x = \frac{bh^2}{6} = \frac{16 \cdot b^3}{6} \geq 5,66 \cdot 10^{-4} \text{ м}^3;$$

$$b \geq \sqrt[3]{\frac{6}{16} \cdot 5,66 \cdot 10^{-4}} = 5,97 \cdot 10^{-2} \text{ м} = 5,97 \text{ см};$$

Приймається $b = 6 \text{ см}$, тоді:

$$h = 4 \cdot b = 4 \cdot 6 = 24 \text{ см};$$

$$A_{\square} = h \cdot b = 24 \cdot 6 = 144 \text{ см}^2.$$

Круглий переріз:

$$W_x = \frac{\pi D^3}{32} \geq 5,66 \cdot 10^{-4} \text{ м}^3;$$

$$D \geq \sqrt[3]{\frac{32 \cdot 5,66 \cdot 10^{-4}}{3,14}} = 0,179 \text{ м} = 18 \text{ см};$$

$$A_{\square} = \frac{\pi D^2}{4} = \frac{3,14 \cdot 18^2}{4} = 254,5 \text{ см}^2.$$

Двотавровий переріз вибирається із сортаменту, приймається І № 33, у якого момент опору більше необхідного значення:

$$W_x = 597 \text{ см}^3 > 566 \text{ см}^3,$$

а площа дорівнює $A_I = 53,8 \text{ см}^2$.

Оцінюється раціональність перерізів:

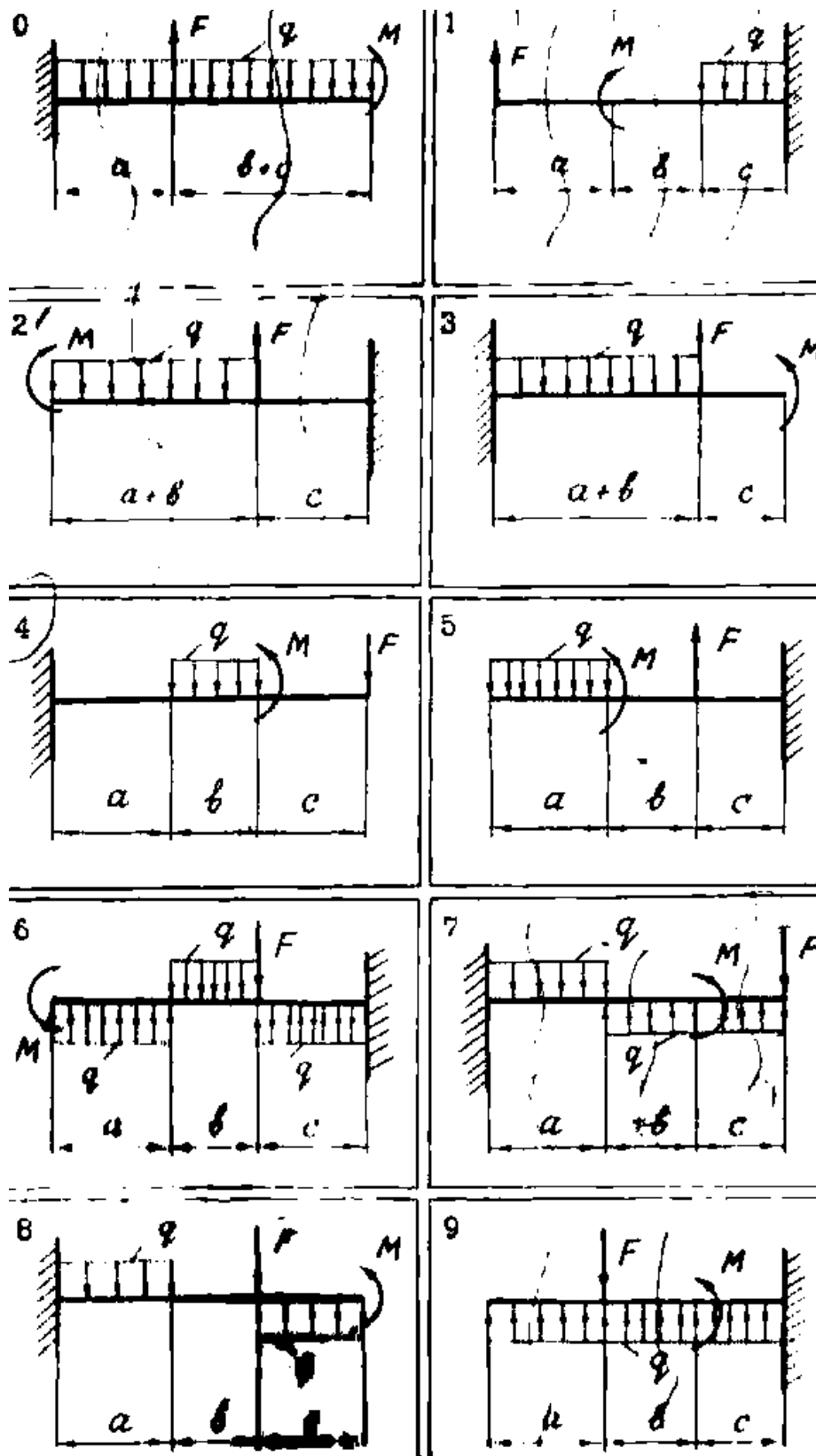
$$\frac{A_{\square}}{A_{\perp}} = \frac{254,5}{53,8} = 4,73; \quad \frac{A_{\square}}{A_{\perp}} = \frac{144}{53,8} = 2,68; \quad \frac{A_{\perp}}{A_{\perp}} = 1.$$

Вона буде зростати в такій послідовності:

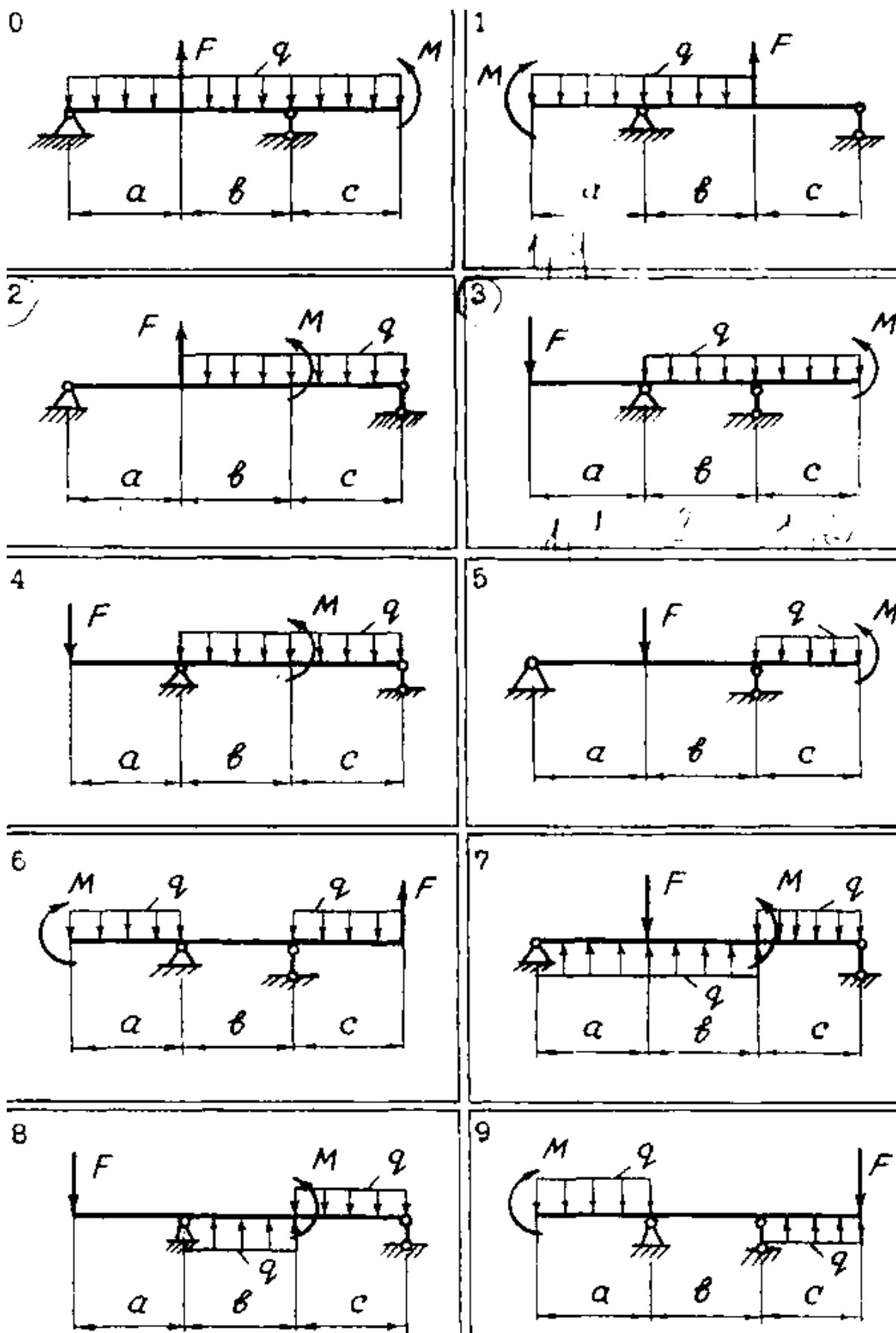
$$A_{\square} : A_{\square} : A_{\perp} = 4,73 : 2,68 : 1.$$

5.3 Завдання до самостійної роботи за темою 5

Варіанти розрахункових схем консольних балок (п. 5.1):



Варианти розрахункових схем двохопорних балок (п. 5.2):



Таблиця 5.1 – Вихідні дані для розрахунку консольних і двохопорних балок

Цифри шифру						
Перша	Друга			Третя		
Номер схеми	a , м	b , м	c , м	F , кН	M , кН·м	q , кН/м
0	1,0	3,0	2,0	10	30	20
1	1,2	2,0	4,0	20	40	10
2	1,4	3,0	1,2	30	36	12
3	2,2	2,8	1,0	40	18	18
4	2,0	2,2	4,0	35	22	16
5	4,0	2,4	1,6	25	28	22
6	2,4	2,6	2,2	15	12	14
7	2,0	1,8	2,4	16	10	24
8	2,6	4,0	2,8	18	32	8
9	3,0	2,0	2,6	24	20	6

5.4 Контрольні запитання за темою 5

1. Яка деформація називається згинанням?
2. Які внутрішні силові фактори діють при чистому згинанні?
3. Які внутрішні силові фактори діють при плоскому поперечному згинанні?
4. В яких випадках згинальний момент і поперечна сила вважаються додатними?
5. Які існують правила контролю правильності побудови епюр?
6. Як знаходиться максимальний згинальний момент?
7. Як змінюються нормальні напруження за висотою балки?
8. Як змінюються дотичні напруження за висотою балки?
9. Як зображуються епюри дотичних напружень для найпростіших поперечних перерізів?
10. Умови міцності за нормальними та дотичними напруженнями?
11. Що в себе включає повний розрахунок на міцність балки при плоскому поперечному згинанні за висотою?
12. Який загальний вигляд рівняння для визначення прогинів балки методом початкових параметрів?
13. Який сенс постійних інтегрування y_0 , θ_0 ?
14. Чому дорівнюють постійні інтегрування y_0 , θ_0 при різних випадках закріплення балки?
15. Навіщо в універсальне рівняння зігнутої осі балки додається компенсуюче розподілене навантаження?

6 ЕНЕРГЕТИЧНІ МЕТОДИ ВИЗНАЧЕННЯ ДЕФОРМАЦІЙ ПРИ ПЛОСКОМУ ПОПЕРЕЧНОМУ ЗГИНАННІ

До енергетичних методів, які широко застосовуються для визначення лінійних і кутових переміщень в пружних системах, відносяться способи Мора і Верещагіна.

Прогин в перерізі C , який визначається способом Мора, зводиться до інтеграла:

$$y_c = \sum_{i=1}^n \int_0^{l_i} \frac{M_x(z) \cdot M_x^{(1)}(z)}{EI_x} dz, \quad (6.1)$$

де y_c – прогин в перерізі C ;

$M_x(z)$ – аналітичне вираження для згинального моменту на i -й ділянці від дії заданих навантажень;

$M_x^{(1)}(z)$ – аналітичне вираження для згинального моменту на i -й ділянці від додатка одиничної зосередженої сили в т. C ;

l_i – довжина i -ї ділянки;

n – число ділянок;

E – модуль пружності матеріалу;

I_x – осьовий момент інерції.

Під знаком суми у формулі (2.1) розуміється підсумовування інтегралів всіх силових ділянок за довжиною балки.

Визначення переміщень y і кутів повороту θ за способом Мора може бути виконано в наступному порядку:

1) будується допоміжна система, яка навантажується одиничним навантаженням в тому перерізі, в якому потрібно визначити переміщення. При визначенні лінійних переміщень прикладається одинична сила $F = 1$,

при визначенні кутових переміщень – момент $M = 1$;

2) для кожної силової ділянки балки записуються вираження згинальних моментів заданої $M_x(z)$ і допоміжної $M_x^{(1)}(z)$ систем;

3) обчислення інтегралів Мора проводиться по силових ділянках у межах всієї довжини балки.

Якщо переміщення або кут повороту має знак «плюс», то його напрямок збігається з напрямком, відповідно, одиничної сили або одиничного моменту. Знак «мінус» вказує, що дійсний напрямок переміщення або кута повороту протилежно напрямку, відповідно, одиничної сили або одиничного моменту.

Прогин, який визначається способом Верещагіна, зводиться до формули:

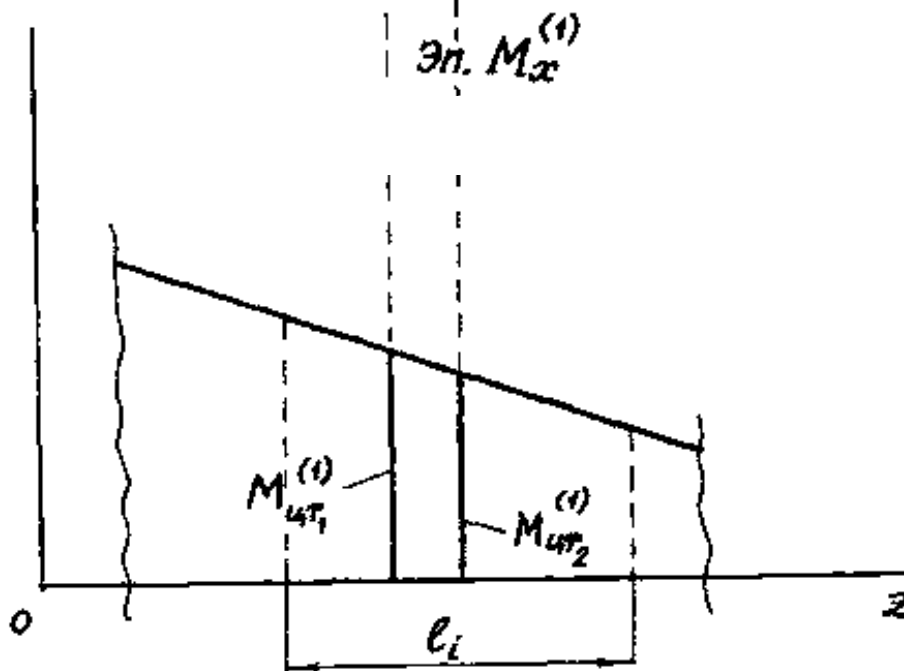
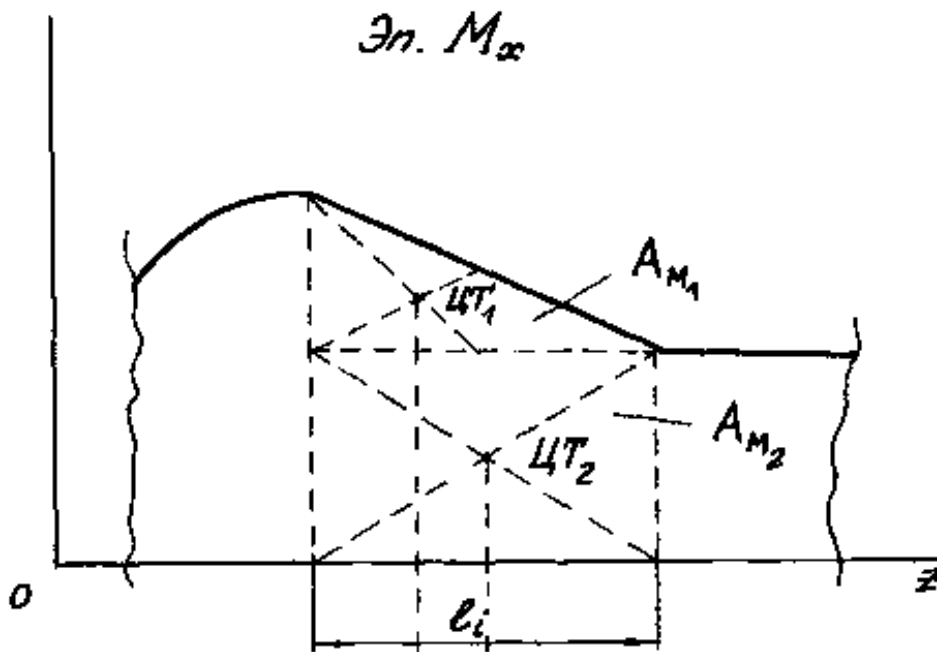
$$y_c = \sum_{i=1}^n \frac{\dot{A}_i \cdot \dot{I}_{\partial\partial}^{(1)}}{\dot{A}I_x}, \quad (6.2)$$

де A_M – площа епюри M_x від зовнішнього навантаження (вантажної епюри) на i -й ділянці;

$\dot{I}_{\partial\partial}^{(1)}$ – ордината з епюри від одиничного навантаження (одиничної епюри) під центром ваги вантажної епюри M_x .

Обчислення за формулою (2.2) виконується за силовими ділянками, на кожній з яких епюра повинна бути прямолінійна, без зламів (рис. 2.1). У тих випадках, коли обидві епюри прямолінійні, можна множити площу будь-якої з епюр на ординату іншої. Якщо на силовій ділянці епюра $M_x(z)$ має складний вид, то вона може бути розбита на прості фігури, для яких легко можна визначити площі та положення центрів ваги. При цьому кожна з площ множать на ординату одиничної епюри, взяту під центром ваги отриманої вантажної епюри.

Для заданої двохопорної або консольної балки необхідно:



а) вантажна еюра;

б) одинична еюра.

Рисунок 6.1 – До визначення переміщень енергетичними методами

- 1) побудувати епюру згинальних моментів $M_x(z)$;
- 2) підібрати двотавровий поперечний переріз з умови міцності за нормальними напруженнями, прийнявши

$$[\sigma] = 210 \text{ МПа};$$

$$E = 2 \cdot 10^5 \text{ МПа};$$

3) визначити прогини та кути повороту в поперечних перетинах С і D способом Мора;

4) визначити прогини та кути повороту в поперечних перетинах С і D способом Верещагіна.

Розрахункові схеми та вихідні дані для виконання індивідуального завдання самостійної роботи наведені в п. 6.3, табл. 6.1.

Далі розглядаються приклади визначення прогинів і кутів повороту перерізів двохопорної та консольної балок.

6.1 Визначення прогинів і кутів повороту перерізів шарнірно опертої балки

Для заданої розрахункової схеми балки (рис. 6.2, а, в) визначити y_D і θ_C при:

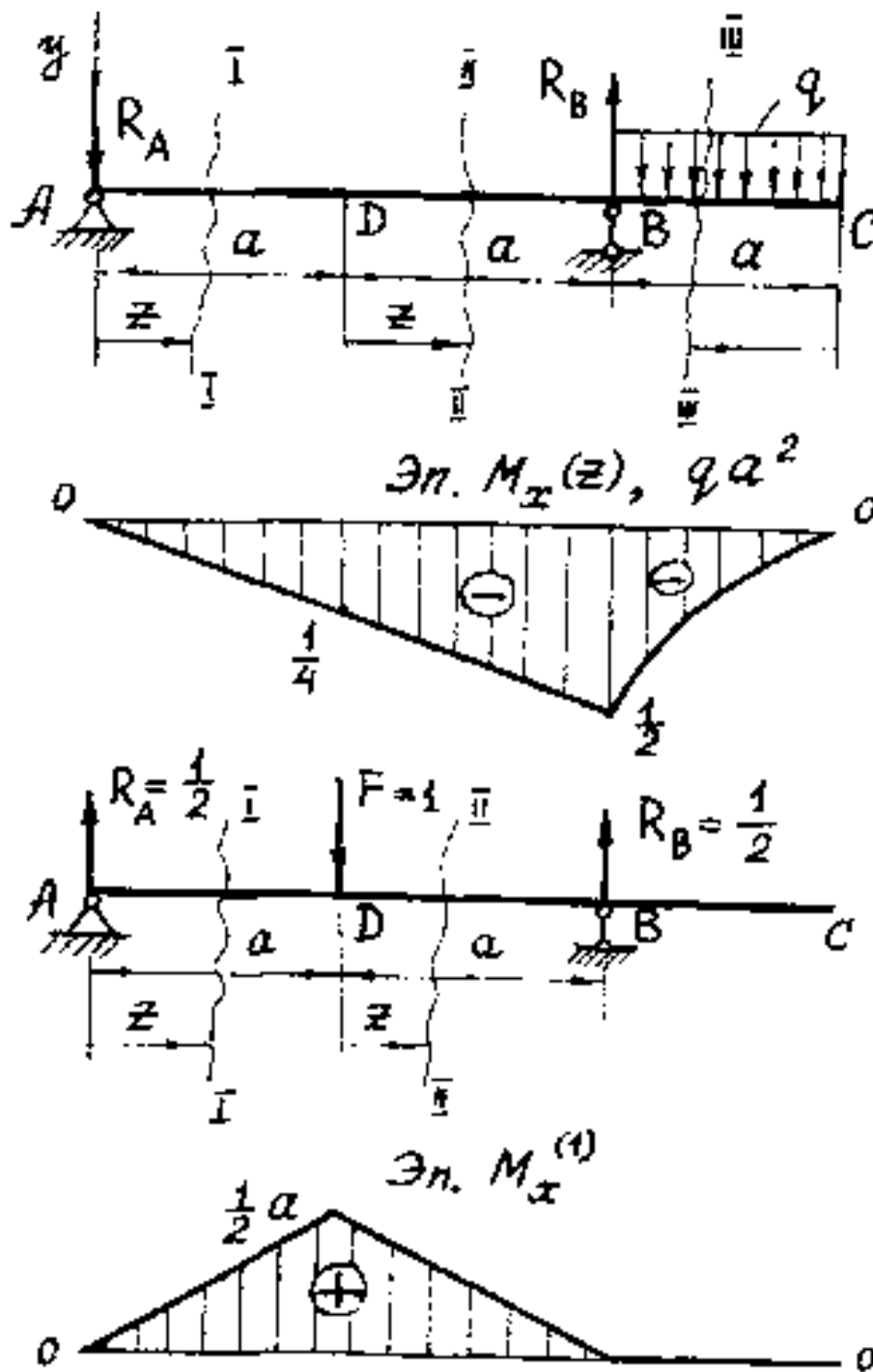
$$q = 30 \text{ кН/м}; \quad a = 1,2 \text{ м}; \quad E = 2 \cdot 10^5 \text{ МПа.}$$

Визначаються реакції в опорах балки:

$$\begin{aligned} \sum M_{i(B)} &= 0 \\ -R_A \cdot 2a + q \frac{a^2}{2} &= 0 \\ R_A &= \frac{1}{2a} \cdot \frac{qa^2}{2} = q \frac{a}{4} \\ \sum M_{i(A)} &= 0 \\ -R_B \cdot 2a + q \cdot a \left(2a + \frac{a}{2}\right) &= 0 \\ R_B &= \frac{1}{2a} \cdot \frac{5}{2} qa^2 = \frac{5}{4} qa \end{aligned}$$

Перевірка:

$$\begin{aligned} \sum F_{iy} &= 0 \\ R_B - R_A - qa &= 0 \\ \frac{5}{4} qa - \frac{1}{4} qa - qa &= 0 \end{aligned}$$



- а) розрахункова схема;
 б) вантажна еюра;
 в) допоміжна система з одиничним навантаженням;
 г) одинична еюра.

Рисунок 6.2 – Статичний розрахунок балки

Балка розбивається на силові ділянки, складаються вираження для згинальних моментів $M_x(z)$ від заданих навантажень і згинальних моментів $M_x^{(1)}(z)$ від прикладеної одиничної сили. Межі інтегрування (силових ділянок) для обох схем навантаження повинні збігатися. В даному прикладі зручно прийняти для всіх ділянок однакові межі (від 0 до a), що значно спростить інтегрування.

I ділянка ($0 \leq z \leq a$):

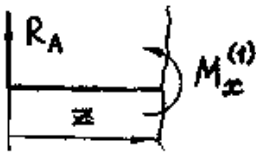
- для вантажної епюри



$$M_x^I(z) = -R_A \cdot z = -\frac{qa}{4}z$$

$$M_x^I(0) = 0,$$

$$M_x^I(a) = -\frac{qa}{4} = -\frac{1}{4}qa^2$$



- для одиничної епюри

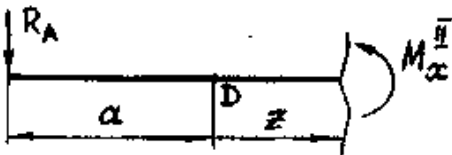
$$M_x^I(z) = R_A \cdot z = \frac{1}{2}z$$

$$M_x^I(0) = 0,$$

$$M_x^I(a) = \frac{1}{2}a$$

II ділянка ($0 \leq z \leq a$):

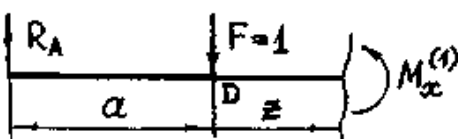
- для вантажної епюри



$$M_x^{II}(z) = -R_A \cdot (a+z) = -\frac{qa}{4}(a+z)$$

$$M_x^{II}(0) = -\frac{1}{4}qa^2,$$

$$M_x^{II}(a) = -\frac{1}{2}qa^2$$



- для одиничної епюри

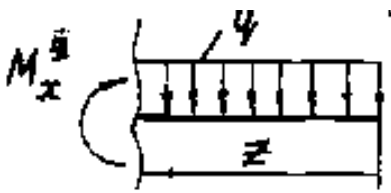
$$M_x^{(1)} = R_A \cdot z = \frac{1}{2} z$$

$$M_x^{(1)}(0) = 0,$$

$$M_x^{(1)}(a) = \frac{1}{2} a$$

III ділянка ($0 \leq z \leq a$):

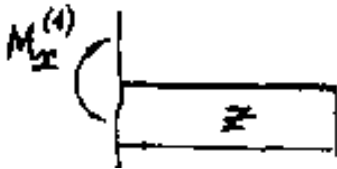
- для вантажної епюри



$$M_x^{III}(z) = -\frac{qz^2}{2},$$

$$M_x^{III}(0) = 0,$$

$$M_x^{III}(a) = -\frac{1}{2} qa^2$$



- для одиничної епюри по всій довжині

ділянки

$$M_x^{(1)} = 0$$

Будуються епюри M_x і $M_x^{(1)}$ (рис. 6.2, б, г).

Незважаючи на те, що в перерізі D немає зовнішніх навантажень, воно є граничним для двох сусідніх силових ділянок, оскільки в цьому перерізі буде прикладатися одинична сила, а це призведе до зламу на одній з епюр.

Підбирається поперечний переріз з умови міцності. Для цього визначається максимальний згинальний момент на вантажній епюрі:

$$M_{\max} = \frac{1}{2} qa^2 = \frac{1}{2} \cdot 30 \cdot 1,2^2 = 21,6 \text{ кН}\cdot\text{м}$$

і знаходиться потрібний момент опору:

$$W_x^{\delta\delta} \geq \frac{|\dot{I}_{\max}|}{[\sigma]} = \frac{21,6 \cdot 10^{-3}}{210} = 1,03 \cdot 10^{-4} \dot{i}^3 = 103 \text{ см}^3.$$

За цим значенням з сортаменту вибирається двотавр I № 16, у якого:

$$W_x = 109 \text{ см}^3; \quad I_x = 873 \text{ см}^4 = 873 \cdot 10^{-8} \text{ м}^4.$$

Визначається прогин балки в т. D за допомогою інтеграла Мора (6.1). З огляду на те, що на третій ділянці $M_x^{(1)} = 0$:

$$\begin{aligned} y_D &= \frac{1}{EI_x} \left\{ \int_0^a \frac{-qa}{4} z \cdot \frac{1}{2} z dz + \int_0^a \frac{-qa}{4} (a+z) \cdot \frac{a-z}{2} dz \right\} = \\ &= -\frac{qa}{8EI_x} \int_0^a (z^2 + (a+z)(a-z)) dz = -\frac{qa}{8EI_x} \int_0^a (z^2 + a^2 - z^2) dz = \\ &= -\frac{qa}{8EI_x} \cdot a^2 z \Big|_0^a = -\frac{qa^4}{8EI_x} = -\frac{30 \cdot 10^{-3} \cdot 1,2^4}{8 \cdot 2 \cdot 10^5 \cdot 873 \cdot 10^{-8}} = -4,454 \cdot 10^{-3} \end{aligned}$$

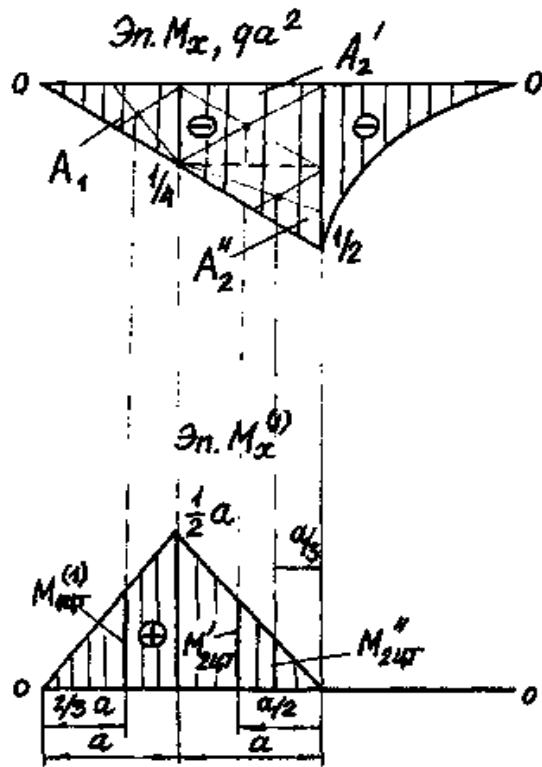
Знак «мінус» означає, що напрямок прогину протилежний напрямку одиничної сили, тобто деформація спрямована вгору.

Визначається прогин за допомогою добутку епюр за правилом Верещагіна. З вантажної епюри $M_x(z)$ визначається площа A_M на ділянках, а з епюри $M_x^{(1)}$ – ординати під їх центрами ваги (рис. 6.3):

$$A_1 = -\frac{qa^2}{4} \cdot \frac{1}{2} a = -\frac{qa^3}{8},$$

$$M_{16\delta\delta}^{(1)} = \frac{1}{2} a \cdot \frac{2}{3} = \frac{a}{3};$$

Площа A_2' визначається як площа прямокутника:



- а) вантажна епюра $M_x(z)$;
 б) одинична епюра $M_x^{(1)}(z)$.

Рисунок 6.3 – До визначення переміщень за допомогою інтеграла Мора

$$A_2' = -\frac{qa^2}{4} \cdot a = -\frac{qa^2}{4}$$

$$M_{2\delta\delta}' = \frac{1}{2} \cdot \frac{a}{2} = \frac{a}{4};$$

Площа A_2'' визначається як площа трикутника:

$$A_2'' = -\frac{qa^2}{4} \cdot \frac{1}{2} a = -\frac{qa^3}{8}$$

$$M_{2\delta\delta}'' = \frac{1}{3} \cdot \frac{a}{2} = \frac{a}{6}.$$

Обчислюючи прогин за формулою (6.2), має місце той же результат:

$$\begin{aligned}
 y_D &= \frac{1}{EI_x} \left(A_1 \cdot M_{1\delta\delta}^{(1)} + A_2' \cdot M_{2\delta\delta}' + A_2'' \cdot M_{2\delta\delta}'' \right) = \\
 &= \frac{1}{EI_x} \left(-\frac{qa^3}{8} \cdot \frac{a}{3} - \frac{qa^3}{4} \cdot \frac{a}{4} - \frac{qa^3}{8} \cdot \frac{a}{6} \right) = -\frac{qa^4}{EI_x} \left(\frac{1}{24} + \frac{1}{16} + \frac{1}{48} \right) = \\
 &= -\frac{qa^4}{8EI_x} = -4,454 \cdot 10^{-3} \text{ i} .
 \end{aligned}$$

Для визначення кута повороту поперечного перерізу С прикладається одиничний момент, знаходяться реакції опор балки і записуються вираження згинальних моментів $M_x^{(1)}$ для раніше прийнятих силових ділянок (рис. 6.4). В цьому випадку можна об'єднати першу та другу ділянки, оскільки при такому прикладенні навантаження жодна з епюр у граничному перерізі не зазнає зламу. Тоді можна записати:

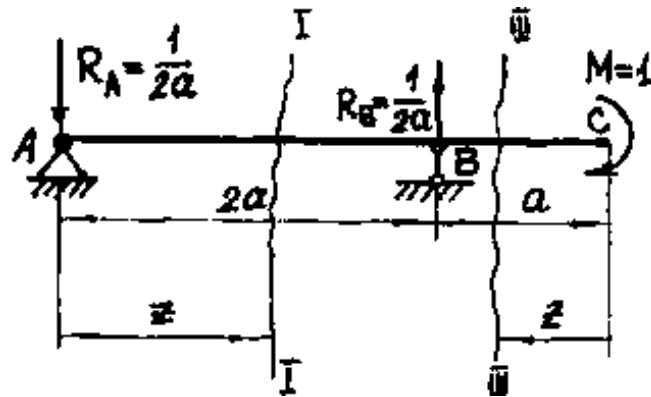


Рисунок 6.4 – Розрахункова схема балки для визначення кутів повороту

Об'єднана I...II ділянка ($0 \leq z \leq 2 \cdot a$):

- для вантажної епюри

$$M_x(z) = -R_A \cdot z = -\frac{qa}{4} \cdot z$$

- для одиничної епюри

$$M_x^{(1)}(z) = -R_A \cdot z = -\frac{1}{2a} z,$$

$$M_x^{(1)}(0) = 0, \quad M_x^{(1)}(2a) = -\frac{1}{2a} \cdot 2a = -1;$$

III ділянка ($0 \leq z \leq a$):

- для вантажної епюри момент $M_x^{III}(z)$ був записаний раніше;

- для одиничної епюри момент $M_x^{(1)}(z)$ постійний по всій довжині

$$M_x^{(1)}(z) = -M = -1$$

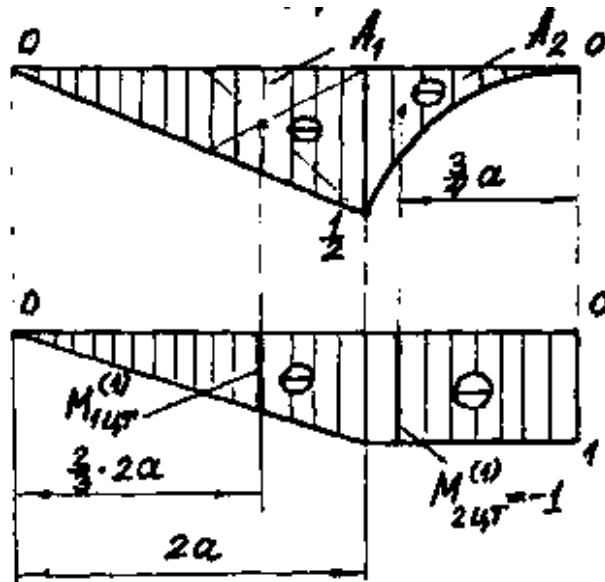
Знаходиться кут повороту методом Мора:

$$\begin{aligned} \theta_c &= \frac{1}{EI_x} \left\{ \int_0^{2a} \frac{-qa}{4} \cdot z \cdot \left(-\frac{1}{2a}\right) z dz + \int_0^a \frac{-qz^2}{2} (-1) dz \right\} = \\ &= \frac{q}{2EI_x} \left\{ \frac{1}{4} \int_0^{2a} z^2 dz + \int_0^a z^2 dz \right\} = \frac{q}{2EI_x} \left\{ \frac{z^3}{12} \Big|_0^{2a} + \frac{z^3}{3} \Big|_0^a \right\} = \\ &= \frac{q}{2EI_x} \left(\frac{8}{12} a^3 + \frac{a^3}{3} \right) = \frac{qa^3}{2EI_x} = \frac{30 \cdot 10^{-3} \cdot 1,2^3}{2 \cdot 2 \cdot 10^5 \cdot 873 \cdot 10^{-8}} = 1,48 \cdot 10^{-2} \end{aligned}$$

Для обчислення кута повороту за правилом Верещагіна будується епюра для одиничного моменту $M_x^{(1)}(z)$, яка розглядається сумісно з вантажною епюрою M_x , побудованою раніше (рис. 6.5):

$$A_1 = -\frac{qa^2}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot 2a = -\frac{qa^3}{2};$$

$$M_{100}^{(1)} = -1 \cdot \frac{2}{3} = -\frac{2}{3};$$



а) вантажна епюра $M_x(z)$, $q \cdot a^2$;

б) одинична епюра $M_x^{(1)}(z)$.

Рисунок 6.5 – До визначення кутів повороту за способом Верещагіна

$$A_2 = -\frac{qa^2}{2} \cdot \frac{1}{3}a = -\frac{qa^3}{6};$$

Одиничний момент

$$M_{2ЦГ}^{(1)} = -1$$

постійний на всій ділянці незалежно від положення центра ваги.

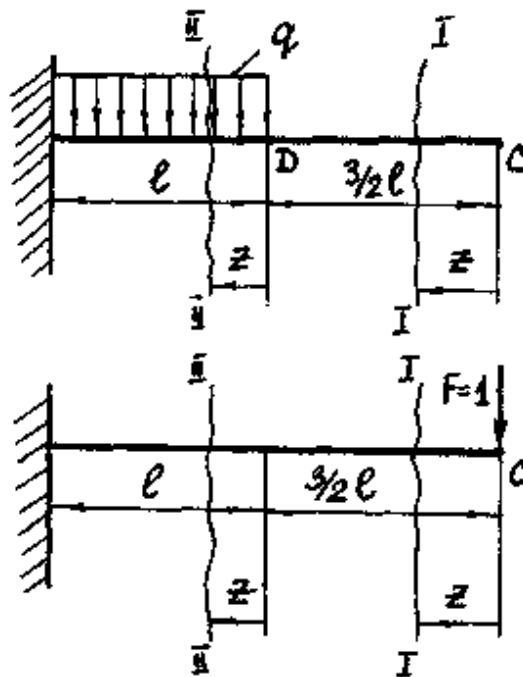
$$\theta_c = \frac{1}{EI_x} \left(-\frac{qa^3}{2} \cdot \left(-\frac{2}{3} \right) - \frac{qa^3}{6} (-1) \right) = \frac{qa^3}{2EI_x} = 1,48 \cdot 10^{-2}$$

Тут поворот перерізу відбувається за годинниковою стрілкою.

6.2 Визначення прогинів і кутів повороту перерізів консольної балки

Для розрахункової схеми балки, приведеної на рис. 6.6 визначити y_C і θ_D при:

$$q=48 \text{ кН/м}; \quad l = 0,7 \text{ м} \quad E = 2 \cdot 10^5 \text{ МПа.}$$



а) розрахункова схема;

б) допоміжна система з одиничним навантаженням.

Рисунок 6.6 – До розрахунку деформацій двохопорної балки

Наведено рішення цієї задачі у скороченому вигляді.

Задану балку зручно розділити на силові ділянки, розглядаючи її від вільного кінця до закладення – при цьому визначати реакції в закладенні немає необхідності. Аналітичні вираження згинальних моментів наводяться далі.

I ділянка ($0 \leq z \leq 1,5 \cdot l$):

оскільки

$$M_x^I = 0,$$

то визначати $M_x^{(I)}(z)$ немає необхідності, бо їх добуток на цій ділянці дорівнюватиме нулю.

II ділянка ($0 \leq z \leq l$):

$$M_x^{II}(z) = -\frac{qz^2}{2}; \quad M_x^{(I)}(z) = -1 \cdot \left(z + \frac{3}{2}l \right).$$

З умови міцності визначається момент опору, який відповідає значенню моменту інерції I_x обраного двотавру. Максимальний згинальний момент виникає в закладенні:

$$M_{max} = M_x^{II}(a) = -\frac{ql^2}{2} = -\frac{48 \cdot 0,7^2}{2} = -11,76 \text{ кН}\cdot\text{м};$$
$$W_x^{\partial\delta} \geq \frac{|\dot{I}_{max}|}{[\sigma]} = \frac{11,76 \cdot 10^{-3}}{210} = 5,6 \cdot 10^{-5} \text{ м}^3 = 56 \text{ см}^3.$$

Обирається двотавр I № 12, у якого:

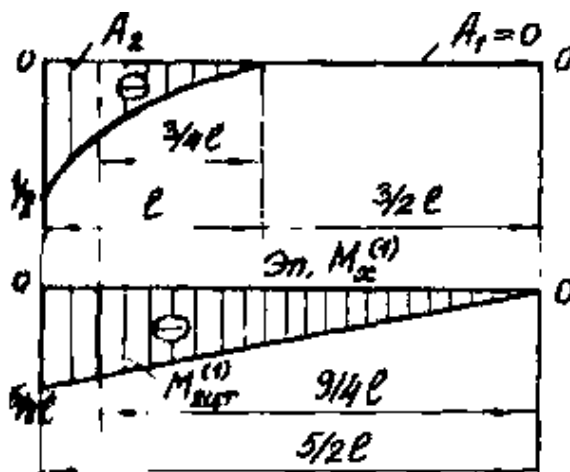
$$W_x = 58,4 \text{ см}^3; \quad I_x = 350 \cdot 10^{-8} \text{ м}.$$

Обчислюється прогин y_c за допомогою інтегралу Мора:

$$y_c = \frac{1}{EI_x} \int_0^l -\frac{qz^2}{2} (-1) \left(z + \frac{3}{2}l \right) dz = \frac{q}{2EI_x} \int_0^l \left(z^3 + \frac{3}{2}lz^2 \right) dz =$$
$$= \frac{q}{2EI_x} \left(\frac{z^4}{4} + \frac{3}{2}l \cdot \frac{z^3}{3} \right) \Big|_0^l = \frac{ql^4}{2EI_x} \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{2} \right) = \frac{3ql^4}{8EI_x} = \frac{3}{8} \cdot \frac{48 \cdot 10^{-3} \cdot 0,7^4}{2 \cdot 10^5 \cdot 350 \cdot 10^{-8}} = 6,174 \cdot 10^{-3} \text{ м}$$

Отримано додатне значення прогину, отже деформація направлена донизу, в напрямку одиничної сили.

Обчислюється прогин y_C за методом Верещагіна. Скориставшись вираженням для $M_x(z)$, $M_x^{(1)}(z)$, будуються вантажна й одинична епюри згинальних моментів (рис. 6.7).



- а) вантажна еюра $M_x(z)$, $q \cdot l^2$;
 б) одинична еюра $M_x^{(1)}(z)$.

Рисунок 6.7 – До визначення прогинів за способом Верещагіна

$$A_1 = 0;$$

$$A_2 = \frac{1}{3} \left(-\frac{ql^2}{2} \right) l = -\frac{ql^3}{6};$$

З подібності трикутників знаходиться значення одиничного моменту:

$$\frac{M_{2\ddot{0}0}^{(1)}}{-\frac{5}{2}l} = \frac{\frac{9}{4}l}{\frac{5}{2}l}$$

$$M_{2\delta\delta}^{(1)} = \left(-\frac{5}{2}\right) \cdot \frac{9}{4} l \cdot \frac{2}{5} l = -\frac{9}{4} l.$$

Тоді прогин дорівнює:

$$y_c = \frac{1}{EI_x} = \left(-\frac{ql^3}{6}\right) \left(-\frac{9}{4} l\right) = \frac{3}{8} \frac{ql^4}{EI_x} = 6,174 \cdot 10^{-3} \text{ м.}$$

Визначаємо кут повороту θ_D за допомогою інтеграла Мора (рис. 6.8):

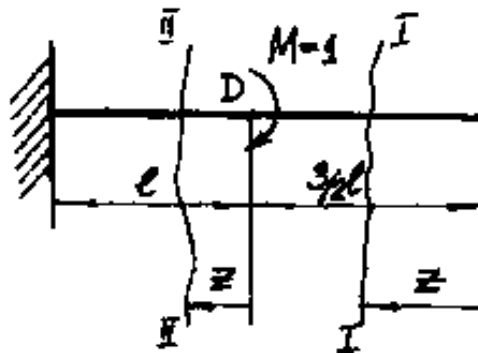


Рисунок 6.8 – До визначення кута повороту за допомогою інтеграла Мора

I ділянка ($0 \leq z \leq 1,5 \cdot l$):

$$M_x^{(1)} = 0,$$

II ділянка ($0 \leq z \leq l$):

$$M_x^{(1)} = -1.$$

Тоді кут повороту дорівнює:

$$\theta_D = \frac{1}{EI_x} \int_0^l \frac{-qz^2}{2} (-1) dz = \frac{q}{2EI_x} \cdot \frac{z^3}{3} \Big|_0^l = \frac{ql^3}{6EI_x} = \frac{48 \cdot 10^{-3} \cdot 0,7^3}{6 \cdot 2 \cdot 10^5 \cdot 350 \cdot 10^{-8}} = 3,92 \cdot 10^{-3} \text{ м.}$$

Визначається кут повороту θ_D за методом Верещагіна. До вантажної епюри добудовується епюра $M_x^{(1)}(z)$ (рис. 6.9). Після чого можна записати:

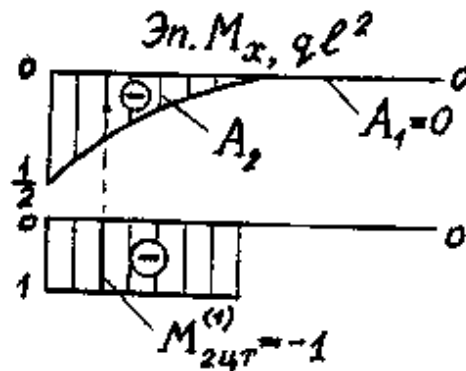
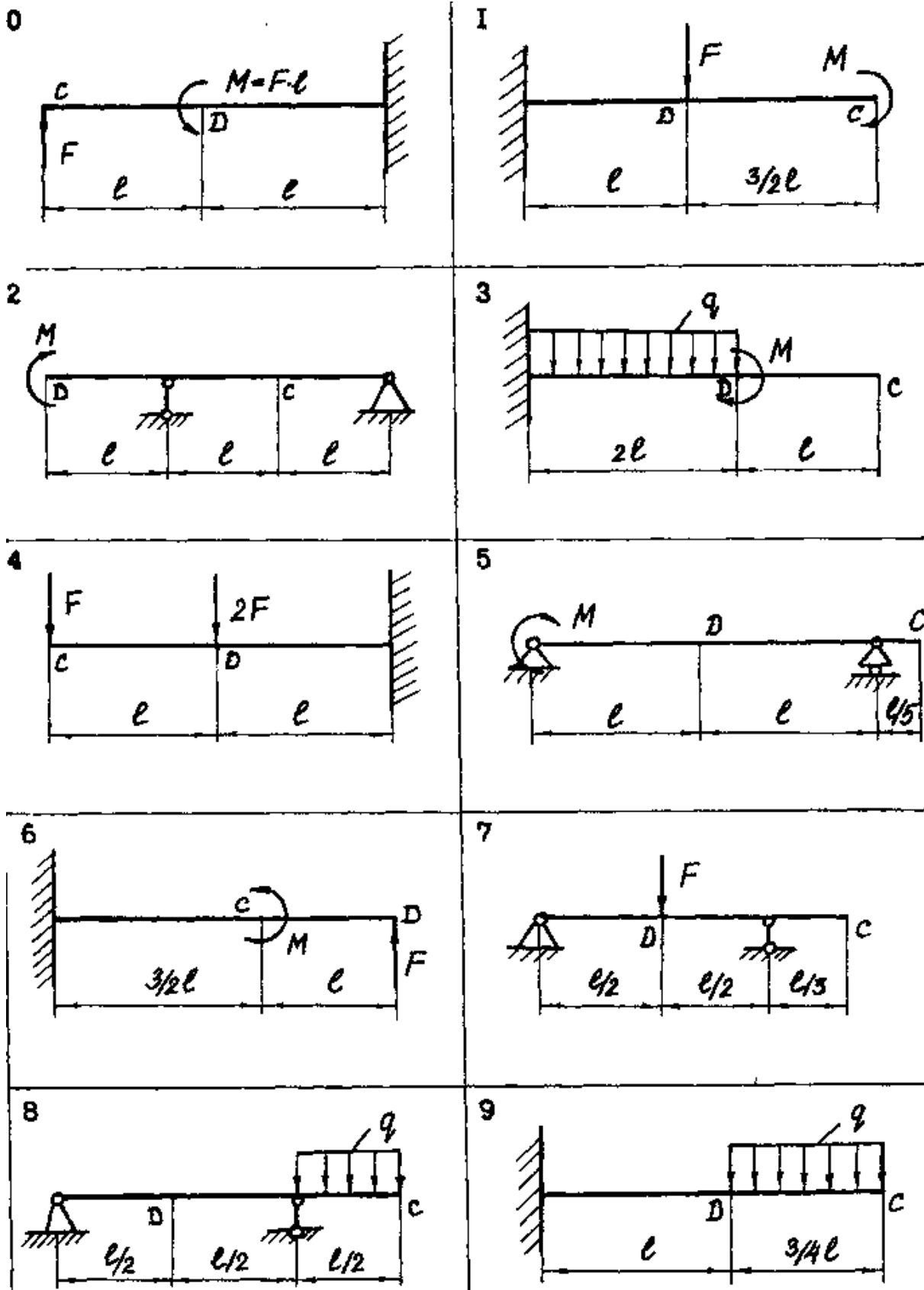


Рисунок 6.9 – До визначення кута повороту за способом Верещагіна

$$\theta_D = \frac{1}{EI_x} \cdot \left(-\frac{ql^3}{6} \right) \cdot (-1) = \frac{ql^3}{6EI_x} = 3,92 \cdot 10^{-3} \text{ м.}$$

Отримано додатне значення кута повороту, отже деформація направлена за годинниковою стрілкою, в напрямку одиничного момента.

6.3 Завдання до самостійної роботи за темою 6



Таблиця 6.1 – Вихідні дані для розрахунку енергетичними методами деформацій балки, що згинається

Цифри шифру						
Перша		Друга			Третя	
Номер схеми	l , м	M , кН·м	F , кН	q , кН/м	Визначити	
					прогин	кут повороту
0	0,5	50	40	35	y_C, y_D	θ_C, θ_D
1	0,6	30	45	50	y_C, y_D	θ_C, θ_D
2	0,8	20	50	40	y_C, y_D	θ_C, θ_D
3	1,0	25	55	50	y_C, y_D	θ_C, θ_D
4	1,2	20	60	12	y_C, y_D	θ_C, θ_D
5	0,5	40	65	50	y_C, y_D	θ_C, θ_D
6	0,6	45	70	30	y_C, y_D	θ_C, θ_D
7	0,8	40	75	25	y_C, y_D	θ_C, θ_D
8	1,0	25	40	18	y_C, y_D	θ_C, θ_D
9	1,2	20	60	50	y_C, y_D	θ_C, θ_D

6.4 Контрольні запитання за темою 6

1. Яке навантаження необхідно прикладати в перерізі балки для визначення прогину в цьому ж перерізі?
2. Яке навантаження необхідно прикладати в перерізі балки для визначення кута повороту?
3. У якому порядку виконується розрахунок за методом Мора?
4. У якому порядку виконується розрахунок за способом Верещагіна?
5. Як визначаються справжні напрямки кута повороту балки в перерізі?
6. Як визначаються справжні напрямки прогину балки в перерізі?
7. Чим характеризується жорсткість балки при плоскому поперечному згинанні?

7 РОЗРАХУНОК БАГАТОПРОЛЬОТНИХ НЕРОЗРІЗНИХ БАЛОК

Нерозрізними називаються балки, що лежать більш ніж на двох опорах і не мають проміжних шарнірів. Такі балки широко застосовуються в різних конструкціях і є статично невизначеними. На рис. 7.1 показана балка, яка опирається на m шарнірних опор і є $(m - 2)$ рази статично невизначеною, оскільки рівнянь статичної рівноваги для такої механічної системи можна скласти тільки два, а число невідомих реакцій дорівнює m):

$$CCHC = H - P = m - 2.$$

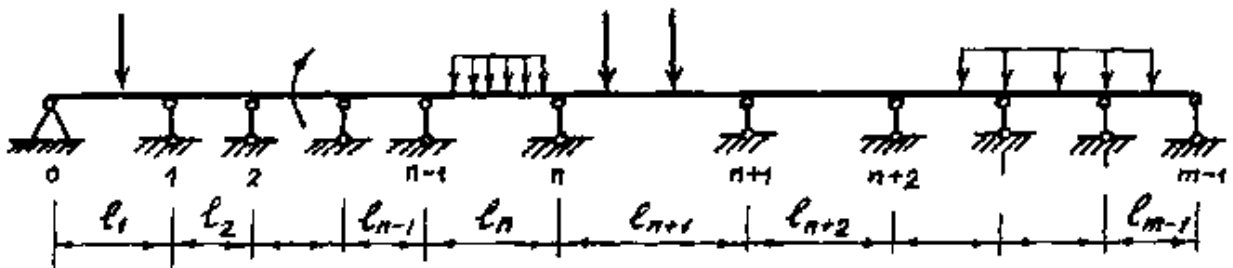


Рисунок 7.1 – Розрахункова схема статично невизначеної багатопрольотної нерозрізної балки

Якщо крайня опора жорстка, то статична невизначеність збільшується на одиницю. Основну систему для нерозрізної балки зручно будувати постановкою шарнірів в перерізах над усіма проміжними опорами. Тоді еквівалентна система являє собою ряд простих шарнірно опертих балок, навантажених заданими навантаженнями і невідомими згинальними моментами $M_1 = X_1$, $M_2 = X_2$, ..., $M_{n+1} = X_{n+1}$, ..., прикладеними в перерізах, де поставлені шарніри.

Якщо розглянути дві однопрогонові балки основної системи, що примикають до n -ї опори (рис. 7.2, а), то для кожної проміжної опори

повинна виконуватися умова рівності нулю взаємного кута повороту торців двох суміжних балок:

$$\Delta n = \Delta_n^n + \Delta_n^n = 0.$$

Цю умову в канонічному вигляді можна записати так:

$$\delta_{n,n-1} \cdot X_{n-1} + \delta_{n,n} \cdot X_n + \delta_{n,n+1} \cdot X_{n+1} + \Delta_{nF} = 0 \quad (7.1)$$

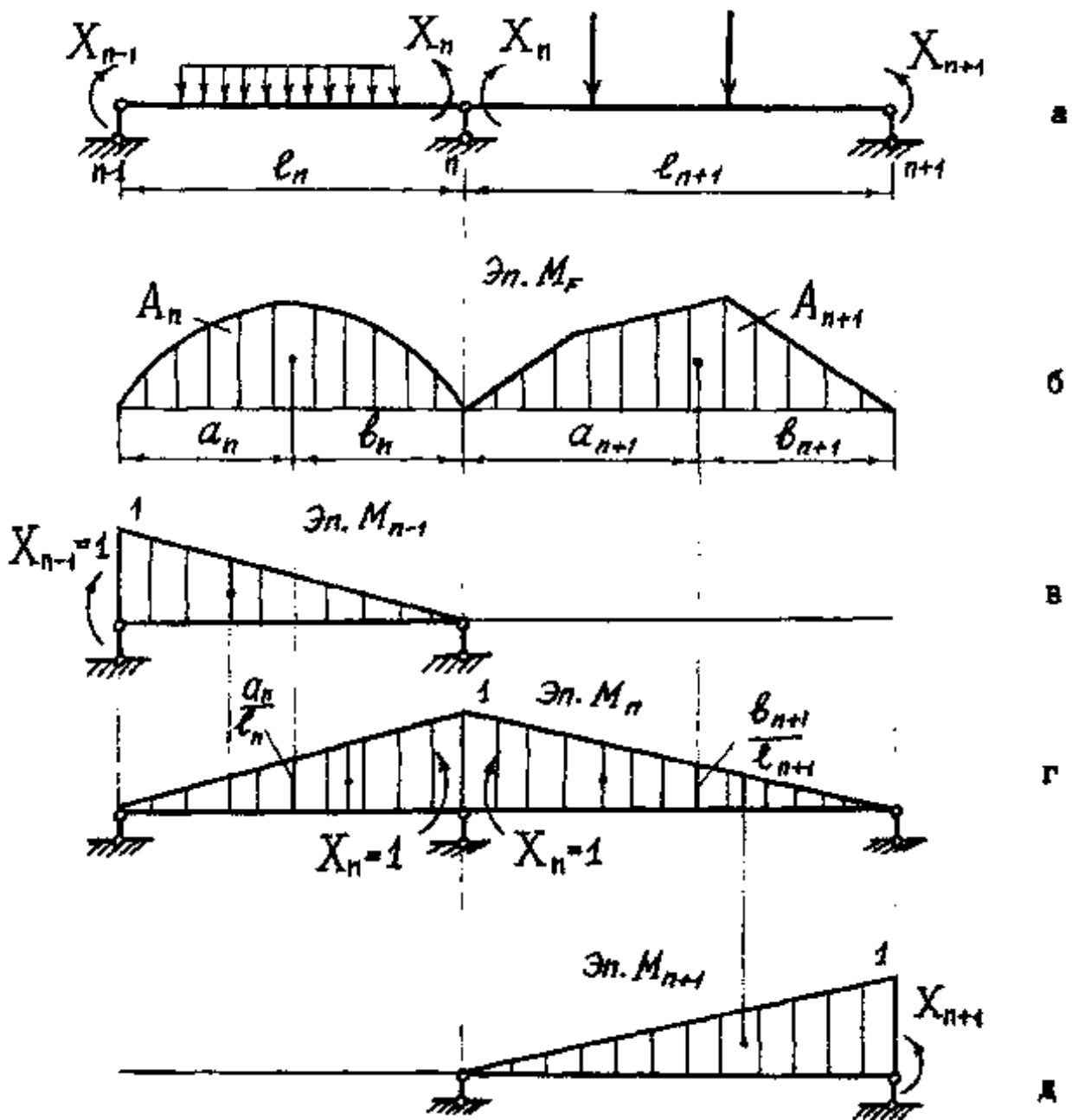
Для визначення переміщень δ і Δ , що входять в рівняння (7.1), будуються епюри згинальних моментів в основній системі окремо від заданого навантаження (рис. 7.2, б) і від кожного з зайвих невідомих, що дорівнюють одиниці (рис. 7.2, в, г, д).

Застосовуючи спосіб Верещагіна, і вважаючи, що в кожному прольоті балка має постійний переріз, можна записати:

$$\begin{aligned} \Delta_{nF} &= \frac{1}{EI_n} \cdot A_n \frac{a_n}{l_n} + \frac{1}{EI_{n+1}} \cdot A_{n+1} \frac{b_{n+1}}{l_{n+1}}; \\ \delta_{n,n-1} &= \frac{1}{EI_n} \cdot \frac{l_n}{2} \cdot 1 \cdot \frac{1}{3} = \frac{l_n}{6EI_n}; \\ \delta_{n,n} &= \frac{1}{EI_n} \cdot \frac{l_n}{2} \cdot 1 \cdot \frac{2}{3} + \frac{1}{EI_{n+1}} \cdot \frac{l_{n+1}}{2} \cdot 1 \cdot \frac{2}{3} = \frac{l_n}{3EI_n} + \frac{l_{n+1}}{3EI_{n+1}}; \\ \delta_{n,n+1} &= \frac{1}{EI_{n+1}} \cdot \frac{l_{n+1}}{2} \cdot 1 \cdot \frac{1}{3} = \frac{l_{n+1}}{6EI_{n+1}}. \end{aligned} \quad (7.2)$$

Підставляючи вираження (7.2) в (7.1) і вважаючи постійним поперечний переріз багатопрольотної балки по всій її довжині, рівняння трьох моментів представляється у вигляді:

$$M_{n-1} \cdot l_n + 2M_n(l_n + l_{n+1}) + M_{n+1} \cdot l_{n+1} = -6 \left(A_n \cdot \frac{a_n}{l_n} + A_{n+1} \cdot \frac{b_{n+1}}{l_{n+1}} \right) \quad (7.3)$$



- а) основна система розрахункової схеми;
- б) вантажна еюра моментів M_F ;
- в) еюра моментів від невідомого одиничного моменту M_{n-1} ;
- г) еюра моментів від невідомого одиничного моменту M_n ;
- д) еюра моментів від невідомого одиничного моменту M_{n+1} .

Рисунок 7.2 – До розрахунку статично невизначеної багатопрольотної нерозрізної балки

В (7.3) добутки $A_n \cdot a_n$, $A_{n+1} \cdot b_{n+1}$ представляють собою статичні моменти площ вантажних епюр (від зовнішнього навантаження) відносно крайніх опор, тому при їх обчисленні площу епюри доцільно розбивати на найпростіші елементи, для яких положення центрів ваги легко визначається.

Основні етапи розрахунку нерозрізних балок:

1. Визначається ступінь статичної невизначеності вихідної системи, яка дорівнює числу проміжних опор. Задається основна система, для чого в перерізах над опорами встановлюються шарніри і прикладаються невідомі опорні моменти.

2. Для кожної з проміжних опор записується рівняння трьох моментів. Для визначення правих частин цих рівнянь будуються вантажні епюри згинальних моментів для прольотів, що розглядаються як незалежні двоопорні балки. Із системи рівнянь трьох моментів визначаються всі невідомі епюрні моменти.

3. Визначаються реакції опор двохопорних балок від спільної дії зовнішніх навантажень і визначених опорних моментів. Для проміжних опор реакції від лівої та правої балок алгебраїчно складаються, та перевіряється умова статичної рівноваги системи.

4. Будуються епюри поперечних сил $Q_y(z)$ і згинальних моментів $M_x(z)$.

5. З основної умови міцності підбирається двотавровий поперечний переріз балки.

6. Здійснюється повна перевірка міцності двотаврового перерізу балки.

7. Будується зігнута вісь балки та перевіряється умова жорсткості.

7.1 Розрахунок статично невизначеної консольної балки за допомогою рівняння трьох моментів

Для статично невизначеної затисненої балки потрібно:

- 1) розкрити статичну невизначеність системи;
- 2) побудувати епюри $Q_y(z)$ і $M_x(z)$;
- 3) підібрати двотавровий переріз балки.

У розрахунках прийняти гранично допустиме напруження:

$$[\sigma] = 200 \text{ МПа.}$$

Розрахункові схеми та вихідні дані для виконання індивідуального завдання самостійної роботи наведені в п. 7.3, табл. 7.2.

Виконаємо необхідні розрахунки для балки, зображеної на рис. 7.3, а, при наступних вихідних даних:

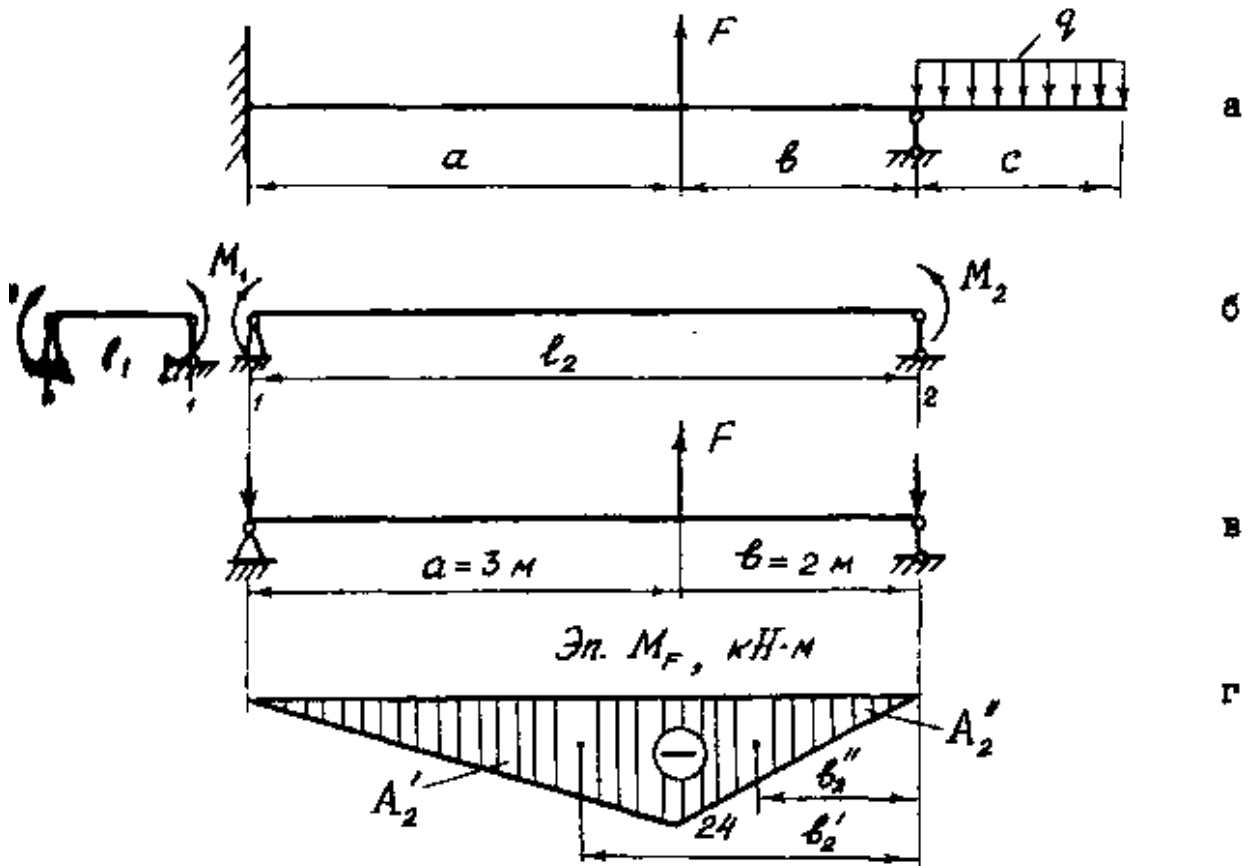
- довжина ділянки балки $a = 3$ м;
- довжина ділянки балки $b = 2$ м;
- довжина ділянки балки $c = 1$ м;
- зовнішня зосереджена сила $F = 20$ кН;
- зовнішнє розподілене навантаження $q = 10$ кН/м.

Власна вага матеріалу балки не враховується.

Задана балка один раз статично невизначена. Будується основна система у вигляді статично визначених однопрогонових балок, додаючи замість закладення додатковий проліт нульової довжини (рис. 7.3, б). У перерізах, де поставлені шарніри, необхідно прикласти опорний момент $M_0 = 0$ і невідомий момент M_1 , а також момент

$$M_2 = -q \frac{c^2}{2} = -5 \text{ кН}\cdot\text{м.}$$

Від зовнішнього навантаження, яке діє в прольотах, будуються вантажні епюри згинальних моментів (рис. 7.3, в, г).



- а) розрахункова схема;
- б) основна система з нульовим прольотом і невідомими моментами;
- в) розрахункова схема основного прольота;
- г) вантажна епюра моментів від зовнішнього навантаження M_F .

Рисунок 7.3 – До визначення невідомих згинальних моментів в багатопрольотній нерозрізній балці

Складається рівняння трьох моментів для проміжної опори 1:

$$M_0 \cdot l_1 + 2M_1(l_1 + l_2) + M_2 \cdot l_2 = -6 \left(A_1 \cdot \frac{a_1}{l_1} + A_2' \cdot \frac{b_2'}{l_2} + A_2'' \cdot \frac{b_2''}{l_2} \right),$$

$$l_1 = 0,$$

$$l_2 = a + b = 5 \text{ м.}$$

Площі вантажної епюри та відстані від її центрів тяжіння до правих опор дорівнюють:

$$A_1 = 0; \quad A_2' = -\frac{1}{2} F \frac{ab}{a+b} \cdot a = -\frac{20 \cdot 9 \cdot 2}{2(3+2)} = -36;$$

$$A_2'' = -\frac{1}{2} F \frac{ab}{a+b} \cdot b = -\frac{20 \cdot 3 \cdot 4}{2(3+2)} = -24;$$

$$b_2' = b + \frac{1}{3}a = 2 + \frac{3}{3} = 3 \text{ м};$$

$$b_2'' = \frac{2}{3}b = \frac{2}{3} \cdot 2 = 1,333 \text{ м.}$$

Підставляючи знайдені значення в рівняння, можна отримати:

$$2M_1(0+5) - 5 \cdot 5 = -6 \cdot \left(-36 \cdot \frac{3}{5} - 24 \cdot \frac{1,333}{5} \right),$$

звідки $M_1 = 19,3 \text{ кН}\cdot\text{м}$.

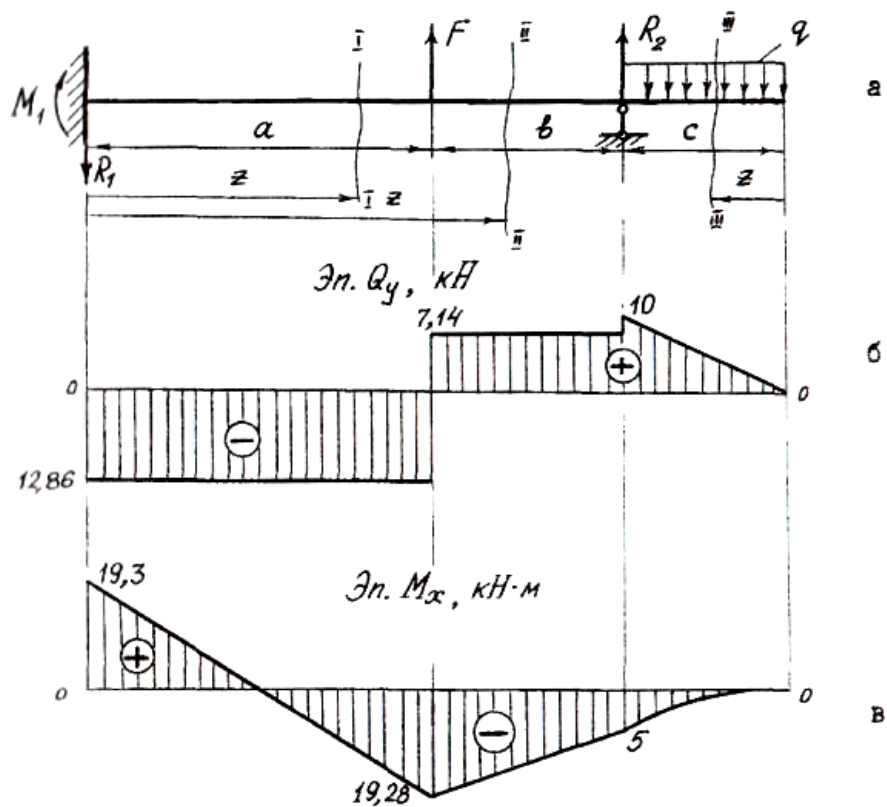
З урахуванням знайденого опорного моменту та навантаження на консолі визначаються реакції опор і будуються епюри внутрішніх зусиль $Q_y(z)$ і $M_x(z)$ (рис. 7.4, а, б, в):

$$\sum M_{i(1)} = 0; \quad -M_1 + F \cdot a + R_2(a+b) - q \cdot c \left(a + b + \frac{c}{2} \right) = 0;$$

$$R_2 = \frac{1}{a+b} \cdot \left[M_1 + q \cdot c \left(a + b + \frac{c}{2} \right) - F \cdot a \right] = \frac{1}{5} (19,30 + 10 \cdot 5,5 - 20 \cdot 3) = 2,86 \text{ кН};$$

$$\sum M_{i(2)} = 0; \quad -M_1 + R_1(a+b) - F \cdot b - q \frac{c^2}{2} = 0;$$

$$R_1 = \frac{1}{a+b} \left(M_1 + Fb + q \frac{c^2}{2} \right) = \frac{1}{5} \left(19,30 + 20 \cdot 2 + 10 \cdot \frac{1}{2} \right) = 12,86 \text{ кН.}$$



- а) розрахункова схема з поділом на силові ділянки;
 б) епюра поперечних сил $Q_y(z)$;
 в) епюра згинальних моментів $M_x(z)$.

Рисунок 7.4 – До визначення внутрішніх зусиль в багатопрольотній нерозрізній балці

Перевірка виконується:

$$\sum F_{iy} = 0; \quad -R_1 + F + R_2 - q \cdot c = -12,86 + 20 + 2,86 - 10 \cdot 1 = 0.$$

Ділянка I ($0 \leq z \leq 3$ м):

$$Q_y^I(z) = -R_1 = -12,86 \text{ кН} = \text{const};$$

$$M_x^I(z) = M_1 - R_1 \cdot z;$$

при $z = 0$

$$M_x^I(0) = M_1 = 19,30 \text{ кН}\cdot\text{м};$$

при $z = 3 \text{ м}$

$$M_x^I(3) = 19,30 - 12,86 \cdot 3 = -19,28 \text{ кН}\cdot\text{м};$$

Ділянка II ($3 \text{ м} \leq z \leq 5 \text{ м}$):

$$Q_y^II(z) = -R_1 + F = -12,86 + 20 = 7,14 \text{ кН} = \text{const};$$

$$M_x^II(z) = M_1 - R_1 \cdot z + F(z - 3);$$

при $z = 3 \text{ м}$

$$M_x^II(3) = -19,28 \text{ кН}\cdot\text{м};$$

при $z = 5 \text{ м}$

$$M_x^II(5) = 19,3 - 12,86 \cdot 5 + 20(5 - 3) = -5 \text{ кН}\cdot\text{м};$$

Ділянка III ($0 \leq z \leq 1 \text{ м}$):

$$Q_y^III(z) = q \cdot z;$$

при $z = 0$

$$Q_y^III(0) = 0;$$

при $z = 1 \text{ м}$

$$Q_y^III(1) = 10 \text{ кН};$$

$$M_x'''(z) = -q \frac{z^2}{2};$$

при $z = 0$

$$M_x'''(0) = 0;$$

при $z = 1$ м

$$M_x'''(1) = -\frac{10}{2} = -5 \text{ кН}\cdot\text{м}.$$

Двотавровий переріз балки підбирається з умови міцності за нормальними напруженнями при згинанні:

$$W_x^T \geq \frac{|M_{x\max}|}{[\sigma]} = \frac{19,3 \cdot 10^{-3}}{200} = 9,65 \cdot 10^{-5} \text{ м}^3 = 96,5 \text{ см}^3.$$

За сортаментом підбирається двотавр I № 16, у якого момент опору дорівнює $W_x = 109 \text{ см}^3$.

7.2 Розрахунок багатопрольотної нерозрізної балки на міцність і жорсткість

Для заданої багатопрольотної нерозрізної балки, розрахункова схема якої наведена на рис. 7.5, а, потрібно:

- 1) розкрити статичну невизначеність балки за допомогою рівнянь трьох моментів;
 - 2) побудувати епюри внутрішніх зусиль – поперечної сили $Q_y(z)$ та згинального моменту $M_x(z)$;
 - 3) підібрати двотавровий переріз балки;
 - 4) виконати повну перевірку міцності;
 - 5) побудувати зігнуту вісь балки;
 - 6) здійснити перевірку балки на жорсткість.
- У розрахунках прийняти:

$$[\sigma] = 200 \text{ МПа}; \quad [\tau] = 0,5 \cdot [\sigma].$$

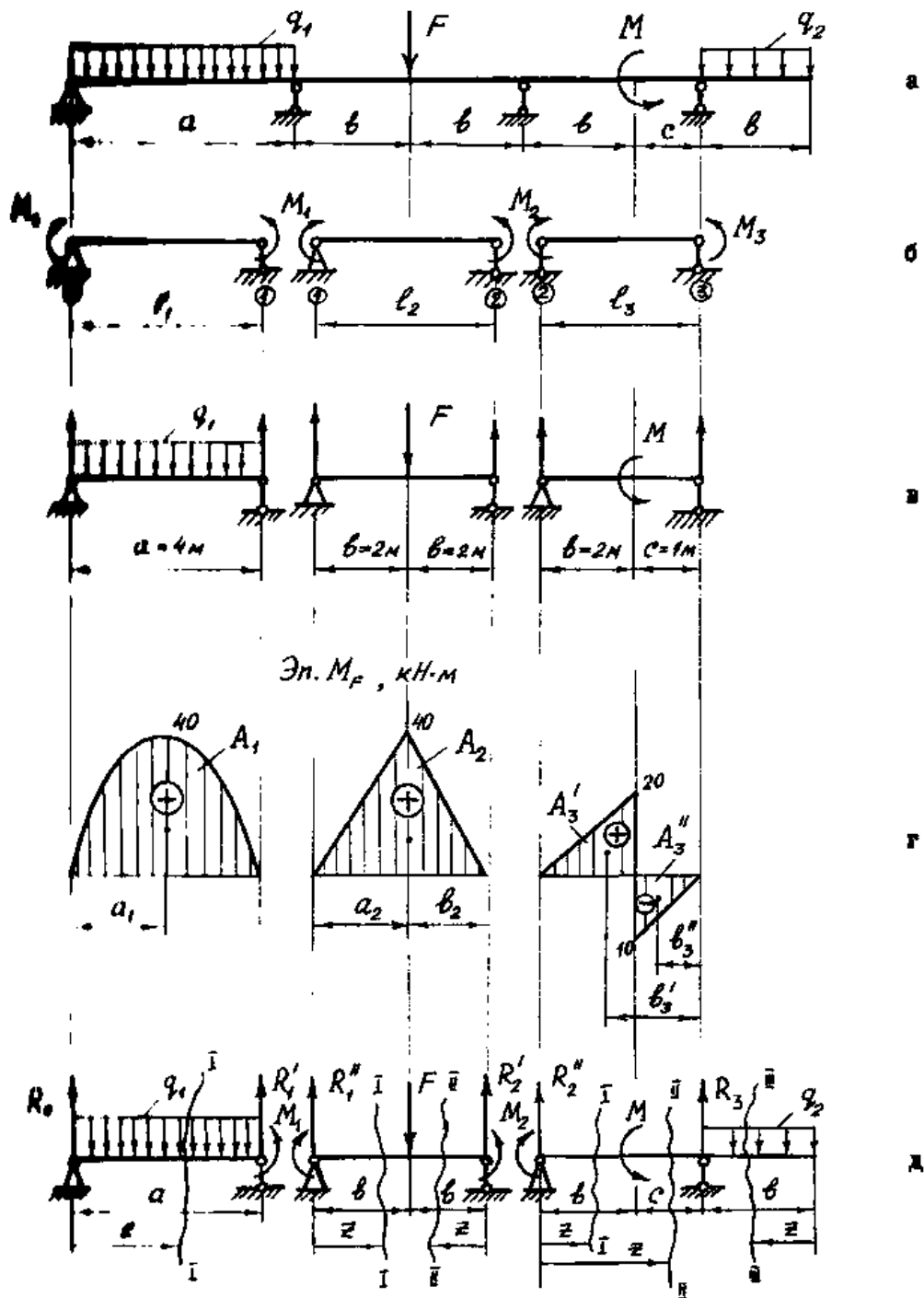
Розрахункові схеми та вихідні дані для виконання індивідуального завдання самостійної роботи наведені в п. 7.3, табл. 7.2.

Вихідні дані для розрахунку:

- довжина ділянки балки $a = 4 \text{ м}$;
- довжина ділянки балки $b = 2 \text{ м}$;
- довжина ділянки балки $c = 1 \text{ м}$;
- зовнішня зосереджена сила $F = 40 \text{ кН}$;
- зовнішній зосереджений момент $M = 30 \text{ кН}\cdot\text{м}$;
- зовнішнє розподілене навантаження $q_1 = 20 \text{ кН/м}$;
- зовнішнє розподілене навантаження $q_2 = 10 \text{ кН/м}$.

Власна вага матеріалу балки не враховується.

Ступінь статичної невизначеності балки дорівнює числу проміжних



- а) розрахункова схема;
 б) основна система з невідомими моментами;
 в) розрахункові схеми окремих прольотів;
 г) вантажна епіюра моментів від зовнішнього навантаження M_F ;
 д) еквівалентна система.

Рисунок 7.5 – Розрахунок багатопрольотної нерозрізної балки

опор, тобто балка двічі статично невизначена.

Основна система представляється у вигляді послідовних статично визначених двохопорних балок. У опорних перерізах прикладаються невідомі опорні моменти, а дія консолі замінюється моментом (рис. 7.5, б).

Будуються епюри згинальних моментів (вантажні епюри) для двохопорних балок від заданих зовнішніх навантажень, які мають стандартний вигляд (рис. 7.5, в, г).

Складаються рівняння трьох моментів для проміжних опор балки постійної жорсткості:

$$\left\{ \begin{array}{l} M_0 \cdot l_1 + 2M_1(l_1 + l_2) + M_2 \cdot l_2 = -6 \left(A_1 \frac{a_1}{l_1} + A_2 \frac{b_2}{l_2} \right) \\ M_1 \cdot l_2 + 2M_2(l_2 + l_3) + M_3 \cdot l_3 = -6 \left(A_2 \frac{a_2}{l_2} + A_3' \frac{b_3'}{l_3} + A_3'' \frac{b_3''}{l_3} \right) \end{array} \right. ;$$
$$M_0 = 0; \quad M_3 = -q_2 \cdot \frac{b^2}{2} = -10 \frac{2^2}{2} = -20 \text{ кН}\cdot\text{м};$$
$$l_1 = a = 4 \text{ м}; \quad l_2 = 2b = 4 \text{ м}; \quad l_3 = b + c = 3 \text{ м}.$$

Площі вантажних епюр (рис. 7.5, г) обчислюються за формулами:

$$A_1 = \frac{2}{3} \cdot \frac{q_1 \cdot a^2}{8} \cdot a = \frac{2}{3} \cdot \frac{20}{8} \cdot 4^3 = 106,667 ;$$

$$A_2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{F \cdot b^2}{2b} \cdot 2b = \frac{1}{2} \cdot 40 \cdot 2^2 = 80 ;$$

$$A_3' = \frac{1}{2} M \cdot \frac{b}{b+c} \cdot b = \frac{1}{2} \cdot 30 \cdot \frac{2^2}{3} = 20 ;$$

$$A_3'' = -\frac{1}{2} M \cdot \frac{c}{b+c} \cdot c = -\frac{1}{2} \cdot 30 \cdot \frac{1}{3} = -5 .$$

Відстані від центрів ваги цих епюр до лівих і правих опор дорівнюють:

$$a_1 = 0,5 \cdot a = 2 \text{ м}; \quad a_2 = b_2 = b = 2 \text{ м};$$

$$b'_3 = \frac{1}{3}b + c = \frac{2}{3} + 1 = 1,667 \text{ м}; \quad b''_3 = \frac{2}{3}c = 0,667 \text{ м}.$$

Тепер система рівнянь трьох моментів приймає вигляд:

$$\left\{ \begin{array}{l} 16M_1 + 4M_2 = -6 \left(106,667 \cdot \frac{2}{4} + 80 \cdot \frac{2}{4} \right) \\ 4M_1 + 14M_2 - 60 = -6 \left(80 \cdot \frac{2}{4} + 20 \frac{1,667}{3} - 5 \frac{0,667}{3} \right) \end{array} \right\}$$

Її рішення надає значення згинальних моментів на проміжних опорах:

$$M_1 = -33,077 \text{ кН}\cdot\text{м}; \quad M_2 = -7,692 \text{ кН}\cdot\text{м}.$$

Знайдені опорні моменти прикладаються до двохопорних балок із заданими навантаженнями (еквівалентна система – рис. 7.5, д), знаходяться опорні реакції і будуються епюри внутрішніх поперечних сил $Q_y(z)$ і згинальних моментів $M_x(z)$ окремо для кожної двохопорної балки, які є прольотами вихідної нерозрізної балки (рис. 7.6, б, в).

Перший проліт:

$$\sum M_{i(0)} = 0; \quad M_1 + R'_1 a - \frac{q_1 \cdot a^2}{2} = 0;$$

$$R'_1 = \frac{1}{a} \left(q_1 \cdot \frac{a^2}{2} - M_1 \right) = \frac{1}{4} \left(20 \cdot \frac{4^2}{2} + 33,077 \right) = 48,269 \text{ кН};$$

$$\sum M_{i(1)} = 0; \quad M_1 + q_1 \frac{a^2}{2} - R_0 \cdot a = 0;$$

$$R_0 = \frac{1}{a} \left(M_1 + q_1 \cdot \frac{a^2}{2} \right) = \frac{1}{4} \left(-33,077 + 20 \cdot \frac{4^2}{2} \right) = 31,731 \text{ кН}.$$

Ділянка I ($0 \leq z \leq 4$ м):

$$Q_y^I(z) = R_0 - q_1 z,;$$

при $z = 0$

$$Q_y^I(0) = R_0 = 31,731 \text{ кН};$$

при $z = 4$ м

$$Q_y^I(4) = 31,731 - 20 \cdot 4 = -48,269 \text{ кН};$$

$$M_x^I(z) = R_0 z - q_1 \frac{z^2}{2},$$

при $z = 0$

$$M_x^I(0) = 0,$$

при $z = 4$ м

$$M_x^I(4) = 31,731 \cdot 4 - 20 \cdot \frac{4^2}{2} = -33,076 \text{ кН}\cdot\text{м}.$$

Оскільки на цій ділянці поперечна сила змінює знак з плюса на мінус, то в перерізі, в якому $Q_y^I(z^*) = 0$ згинальний момент буде дорівнювати:

$$M_x^I(z^*) = M_{max}^I.$$

Для того, щоб знайти координату поперечного перерізу z^* , необхідно записати:

$$\frac{dM_x^I}{dz} = 0; \quad R_0 - 2q_1 \cdot \frac{z^*}{2} = 0. \quad z^* = \frac{R_0}{q} = \frac{31,731}{20} = 1,587 \text{ м};$$

$$M_x^I(1,587) = 31,731 \cdot 1,587 - 20 \cdot \frac{1,587^2}{2} = 25,171 \text{ кН}\cdot\text{м}.$$

Другий проліт:

$$\sum M_{i(1)} = 0; \quad M_2 + R_2' \cdot 2b - M_1 - F \cdot b = 0;$$

$$R_2' = \frac{1}{2b} (M_1 + F \cdot b - M_2) = \frac{1}{4} (-33,077 + 40 \cdot 2 + 7,692) = 13,654 \text{ кН};$$

$$\sum M_{i(2)} = 0; \quad M_1 + R_1'' \cdot 2b - F \cdot b - M_2 = 0;$$

$$R_1'' = \frac{1}{2b} (F \cdot b + M_2 - M_1) = \frac{1}{4} (40 \cdot 2 - 7,692 + 33,077) = 26,346 \text{ кН}.$$

Ділянка I ($0 \leq z \leq 2 \text{ м}$):

$$Q_y^I = R_1'' = 26,346 \text{ кН} = \text{const};$$

$$M_x^I(z) = R_1'' \cdot z + M_1,$$

при $z = 0$

$$M_x^I(0) = M_1 = -33,077 \text{ кН}\cdot\text{м};$$

при $z = 2 \text{ м}$

$$M_x^I(2) = 26,346 \cdot 2 - 33,077 = 19,616 \text{ кН}\cdot\text{м}.$$

Ділянка II ($0 \leq z \leq 2$ м):

$$Q_y'' = R_1' = -13,656 \text{ кН} = \text{const};$$

$$M_x''(z) = R_2' \cdot z + M_2,$$

при $z = 0$

$$M_x''(0) = M_2 = -7,692 \text{ кН}\cdot\text{м};$$

при $z = 2$ м

$$M_x''(2) = 13,654 \cdot 2 - 7,692 = 19,616 \text{ кН}\cdot\text{м}.$$

Третій проліт:

$$\sum M_{i(2)} = 0; \quad R_3 \cdot (b+c) + M - q_2 \cdot b \left(c + \frac{3}{2}b \right) - M_2 = 0;$$

$$R_3 = \frac{1}{b+c} \left[q_2 \cdot b \left(c + \frac{3}{2}b \right) + M_2 - M \right] = \frac{1}{3} (10 \cdot 2 \cdot 4 - 7,692 - 30) = 14,103 \text{ кН};$$

$$\sum M_{i(3)} = 0; \quad -R_2'' \cdot (b+c) - M_2 - q_2 \cdot \frac{b^2}{2} + M = 0;$$

$$R_2'' = \frac{1}{b+c} \left(M - M_2 - q_2 \cdot \frac{b^2}{2} \right) = \frac{1}{3} \left(30 + 7,692 - 10 \cdot \frac{4}{2} \right) = 5,897 \text{ кН}.$$

Ділянка I ($0 \leq z \leq 2$ м):

$$Q_y^I = R_2'' = 5,897 \text{ кН} = \text{const};$$

$$M_x^I(z) = R_2'' \cdot z + M_2,$$

при $z = 0$

$$M_x''(0) = M_2 = -7,692 \text{ кН}\cdot\text{м};$$

при $z = 2 \text{ м}$

$$M_x''(2) = 5,897 \cdot 2 - 7,692 = 4,102 \text{ кН}\cdot\text{м}.$$

Ділянка II ($2 \text{ м} \leq z \leq 3 \text{ м}$):

$$Q_y'' = R_2'' = 5,897 \text{ кН} = \text{const};$$

$$M_x''(z) = R_2'' \cdot z + M_2 - M,$$

при $z = 2 \text{ м}$

$$M_x''(2) = 5,897 \cdot 2 - 7,692 - 30 = -25,898 \text{ кН}\cdot\text{м};$$

при $z = 3 \text{ м}$

$$M_x''(3) = 5,897 \cdot 3 - 7,692 - 30 = -20 \text{ кН}\cdot\text{м}.$$

Ділянка III ($0 \leq z \leq 2 \text{ м}$):

$$Q_y'''(z) = q_2 \cdot z;$$

при $z = 0$

$$Q_y'''(0) = 0;$$

при $z = 2 \text{ м}$

$$Q_y'''(2) = 10 \cdot 2 = 20 \text{ кН};$$

$$M_x'''(z) = -q_2 \frac{z^2}{2};$$

при $z = 0$

$$M_x'''(0) = 0;$$

при $z = 2 \text{ м}$

$$M_x'''(2) = -10 \frac{2^2}{2} = -20 \text{ кН}\cdot\text{м}.$$

Знаходяться реакції, що діють в опорах:

$$R_0 = 31,731 \text{ кН}; \quad R_1 = R_1' + R_1'' = 48,269 + 26,346 = 74,615 \text{ кН};$$

$$R_2 = R_2' + R_2'' = 13,654 + 5,897 = 19,551 \text{ кН}; \quad R_3 = 14,103 \text{ кН}.$$

Перевіряється умова статичної рівноваги системи:

$$\sum F_{iy} = 0; \quad R_0 - q_1 \cdot a + R_1 - F + R_2 + R_3 - q_2 \cdot b = 0,$$

$$31,731 - 20 \cdot 4 + 74,615 - 40 + 19,551 + 14,103 - 10 \cdot 2 = 0.$$

Двотавровий переріз балки підбирається при згинанні з умови міцності за нормальними напруженнями. Необхідний момент опору:

$$W_x^T \geq \frac{|M_{x\max}|}{[\sigma]} = \frac{33,077 \cdot 10^{-3}}{200} = 16,54 \cdot 10^{-5} \text{ м}^3 = 165,4 \text{ см}^3.$$

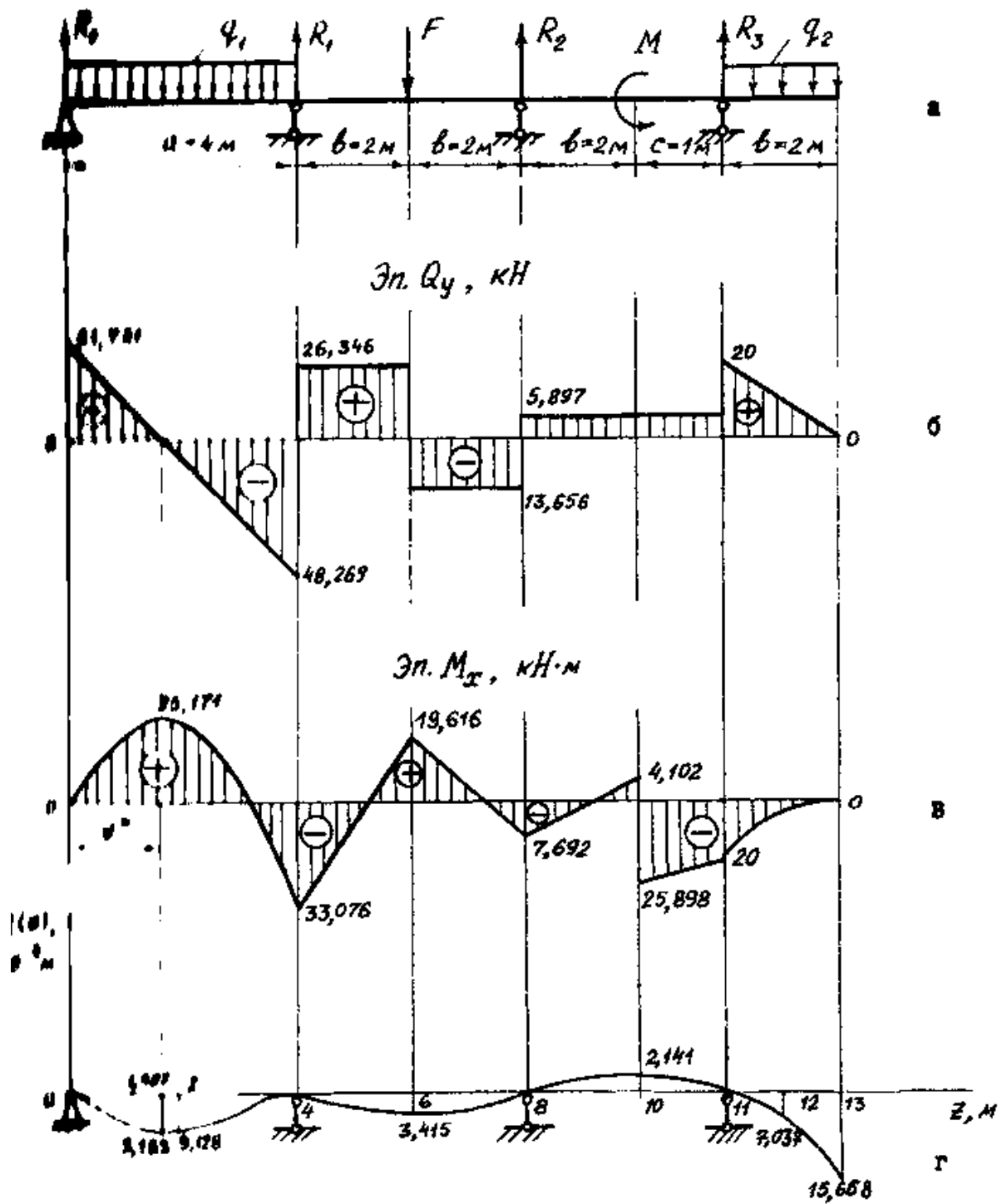


Рисунок 7.6 – Розрахунок багатопрольотної нерозрізної балки

З таблиць сортаменту прокатної сталі необхідно підібрати двотавр з найближчим більшим значенням моменту опору. Приймається двотавр I № 20, який має:

$$W_x = 184 \text{ см}^3; \quad I_x = 1840 \text{ см}^4; \quad S_x^{\max} = 104 \text{ см}^3;$$

$$h = 20 \text{ см}; \quad b = 10 \text{ см}; \quad d = 0,52 \text{ см}; \quad t = 0,84 \text{ см}.$$

Для небезпечного перерізу нерозрізної двотаврової балки виконується повна перевірка міцності. Небезпечний переріз розташований на 1-й опорі (рис. 7.7):

$$M_x = -33,07 \text{ кН}\cdot\text{м}; \quad Q_y = -48,269 \text{ кН}.$$

Перевіряються на міцність:

- за нормальними напруженнями – точки 1 і 1', найбільш віддалені від нейтрального шару

$$\sigma_{z(1)} = \sigma_{z(1')} = \frac{M_{x\max}}{W_x} = \frac{33,077 \cdot 10^{-3}}{184 \cdot 10^{-6}} = 179,77 \text{ МПа} < [\sigma];$$

- в точці 4, що належить нейтральному шару, $\sigma_{z(4)} = 0$; з урахуванням того, що в даному перерізі нижні волокна стиснуті, будується епюра $\sigma_z(y)$ (рис. 7.7, а);

- за дотичними напруженнями за формулою Журавського – точка 4, що належить нейтральному шару

$$\tau_{y(4)} = \frac{Q_{y\max}}{d} \cdot \frac{S_{x\max}}{I_x} = \frac{48,269 \cdot 10^{-3} \cdot 104 \cdot 10^{-6}}{0,52 \cdot 10^{-2} \cdot 1840 \cdot 10^{-8}} = 52,47 \text{ МПа} < [\tau],$$

де S_x^{\max} – статичний момент площі відсіченої частини напівперерізу

береться з сортаменту;

$[\tau] = 0,5 \cdot [\sigma] = 100$ МПа – величина гранично допустимого напруження;

- за головними напруженнями за третьою або четвертою теоріями міцності для точок 3 і 3', що належать вертикальній стінці двотаврового перерізу. У цих точках і нормальні, й дотичні напруження приймають великі значення, наближені до максимальних.

За третьою теорією міцності:

$$\sigma_{1(3)} - \sigma_{3(3)} = \sqrt{\sigma_{z(3)}^2 + 4\tau_{y(3)}^2} = \sqrt{164,67^2 + 4 \cdot 40,6^2} = 183,6 \text{ МПа} < [\sigma].$$

Тут нормальне і дотичне напруження обчислені за формулами:

$$\sigma_{z(3)} = \frac{M_x}{I_x} = \frac{33,077 \cdot 10^{-3}}{1840 \cdot 10^{-8}} \left(\frac{20}{2} - 0,84 \right) \cdot 10^{-2} = 164,67 \text{ МПа};$$

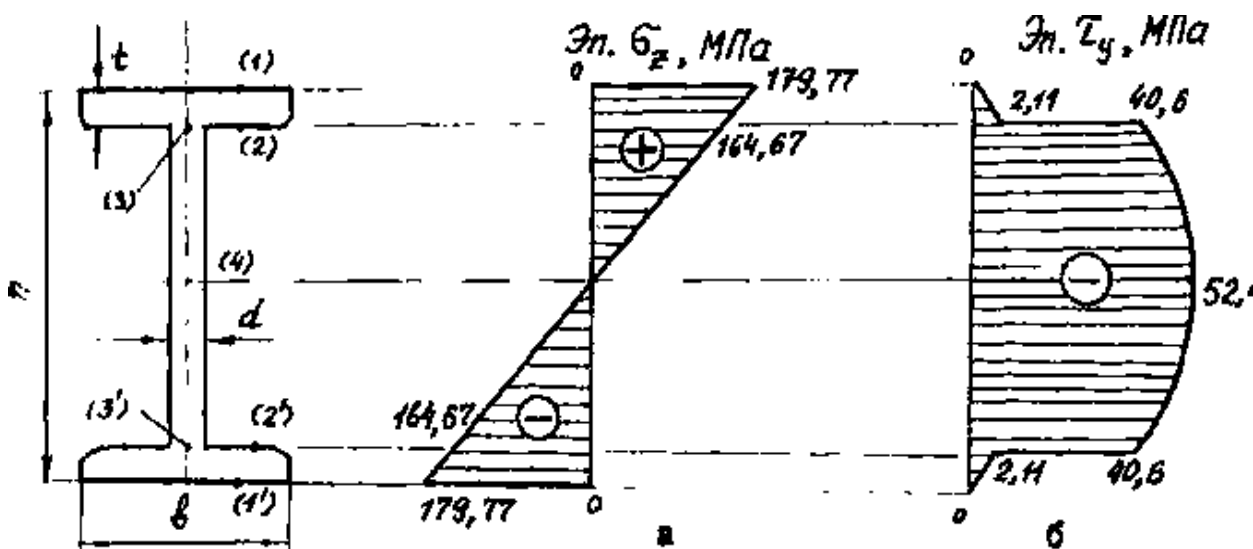
$$\tau_{y(3)} = \frac{Q_y}{d} \cdot \frac{S_x^{\dot{\delta} \bar{n}, \dot{\delta}}}{I_x} = \frac{48,269 \cdot 10^{-3} \cdot 80,472 \cdot 10^{-6}}{0,52 \cdot 10^{-2} \cdot 1840 \cdot 10^{-8}} = 40,6 \text{ МПа};$$

$$S_x^{\dot{\delta} \bar{n}, \dot{\delta}} = b \cdot t \cdot \left(\frac{h}{2} - \frac{t}{2} \right) = 10 \cdot 0,84 \cdot \frac{20 - 0,84}{2} = 80,472 \text{ см}^3.$$

Для побудови епюри $\tau_y(y)$ в небезпечному перерізі додатково визначається напруження в точках 2 і 2', що належать горизонтальним полкам двотавру:

$$\tau_{y(2)} = \tau_{y(2')} = \frac{Q_y}{b} \cdot \frac{S_x^{\dot{\delta} \bar{n}, \dot{\delta}}}{I_x} = \frac{48,269 \cdot 10^{-3} \cdot 80,472 \cdot 10^{-6}}{0,1 \cdot 1840 \cdot 10^{-8}} = 2,11 \text{ МПа};$$

Будується епюра $\tau_y(y)$, яка показана на рис. 7.7, б.



а) епюра нормальних напружень $\sigma_z(y)$;

б) епюра дотичних напружень $\tau_y(y)$.

Рисунок 7.7 – Повна перевірка міцності перерізу балки

Результати розрахунків за нормальними, дотичними та головними напруженнями підтверджують, що міцність двотаврової балки забезпечена.

Методом початкових параметрів обчислюються прогини балки.

Початок координат розміщується на крайній лівій опорі, тоді для крайньої правої ділянки універсальне рівняння пружної лінії має вигляд:

$$E \cdot I_x \cdot y(z) = EI_x \cdot y_0 + EI_x \theta_0 \cdot z + R_0 \frac{z^3}{6} - q_1 \frac{z^4}{24} + q_1 \frac{(z-4)^4}{24} + \\ + R_1 \frac{(z-4)^3}{6} - F \frac{(z-6)^3}{6} + R_2 \frac{(z-8)^3}{6} - M \frac{(z-10)^2}{2} + R_3 \frac{(z-11)^3}{6} - q_2 \frac{(z-11)^4}{24}$$

В даному випадку початок координат співпадає з нерухомою опорою, тому геометричні початкові параметри:

$$y_0 = 0, \theta_0 \neq 0$$

Слід відзначити, що розподілене навантаження не повинно закінчуватися до кінця балки по довжині, тому воно подовжується на всю балку, та, починаючи з перетину $z = 4$ м, вводиться компенсуюче навантаження зворотного напрямку, яке враховується в даному рівнянні п'ятою складовою.

Жорсткість при згинанні сталеві двотаврової балки № 20 дорівнює:

$$EI_x = 2 \cdot 10^5 \cdot 10^3 \cdot 1840 \cdot 10^{-8} = 3,68 \cdot 10^3 \text{ кН} \cdot \text{м}^2.$$

Кут повороту на початку координат визначається з умови, що прогин на першій опорі, при $z = 4$ м, дорівнює нулю:

$$y(4) = 0; \quad EI_x \theta_0 \cdot 4 + R_0 \frac{4^3}{6} - q_1 \frac{4^4}{24} = 0.$$

$$\theta_0 = \frac{1}{4EI_x} \cdot \left(q_1 \frac{4^4}{24} - R_0 \frac{4^3}{6} \right) = \frac{4^3}{3680} \cdot \frac{20 - 31,731}{24} = -8,501 \cdot 10^{-3} \text{ рад.}$$

Остаточне рівняння для прогинів на крайній правій ділянці записується у вигляді:

$$y(z) = -8,501 \cdot 10^{-3} \cdot z + \frac{1}{EI_x} \cdot \left(\begin{aligned} &31,731 \cdot \frac{z^3}{6} - 20 \cdot \frac{z^4}{24} + 20 \cdot \frac{(z-4)^4}{24} + 74,615 \frac{(z-4)^3}{6} - \\ &-40 \frac{(z-6)^3}{6} + 19,551 \frac{(z-8)^3}{6} - 30 \frac{(z-10)^2}{2} + \\ &+14,103 \cdot \frac{(z-1)^3}{6} - 10 \cdot \frac{(z-11)^4}{24} \end{aligned} \right)$$

Необхідно зауважити, що при розрахунках коефіцієнти $(z - l_{...i})$ повинні бути більше нуля, тобто у рівняння входять лише ті навантаження, які розташовані між початком координат і перерізом, що розглядається.

Якщо ж виявиться, що $(z - l_{...i}) < 0$, тоді складові рівняння з такими коефіцієнтами необхідно відкинути.

Обчислюються прогини в характерних перетинах, результати розрахунків заносяться в таблицю прогинів $y(z)$ (табл. 7.1) і на їх основі будується зігнута вісь балки (рис. 7.6, г).

Таблиця 7.1 – Величини прогинів балки $y(z)$

Розрахована величина, $\times 10^{-3}$ м	Переріз балки z , м									
	0	1,587	2,0	4,0	6,0	8,0	10,0	11,0	12,0	13,0
$\theta_0 \cdot z$	0	-13,49	-17	-34	-51	-68,01	-85,01	-93,51	-102,01	-110,51
$R_0 z^3 / 6EI_x$	0	5,74	11,5	91,97	310,41	735,79	1437,09	1912,77	2483,3	3157,29
$-q_1 z^4 / 24EI_x$	-	-1,44	-3,62	-57,97	-293,48	-927,54	2264,49	-3315,44	-4695,65	-6467,6
$q_1(z-4)^4 / 24EI_x$	-	-	-	-	3,62	57,97	293,48	543,7	927,54	1485,73
$R_1(z-4)^3 / 6EI_x$	-	-	-	-	27,04	216,28	729,93	1159,1	1730,2	2463,51
$-F(z-6)^3 / 6EI_x$	-	-	-	-	-	-14,49	-115,94	-226,45	-391,3	-621,38
$R_2(z-8)^3 / 6EI_x$	-	-	-	-	-	-	7,09	23,91	56,67	10,68
$-M(z-10)^2 / 2EI_x$	-	-	-	-	-	-	-	-4,08	-16,3	-36,69
$R_3(z-11)^3 / 6EI_x$	-	-	-	-	-	-	-	-	0,64	5,11
$-q_2(z-11)^4 / 24EI_x$	-	-	-	-	-	-	-	-	-0,11	-1,81
Прогин балки $y(z)$, $\times 10^{-3}$ м	0	-9,19	-9,12	0	-3,415	0	2,14	0	-7,04	-15,67

Проводиться перевірка умови жорсткості у кожному прольоті по формулі:

$$y_{\max} \leq [y]; \quad [y] = l_i / 200; \quad y_{\max} / l_i \leq k = 1 / 200.$$

де l_i – довжина i -го прольоту.

У 1-му прольоті

$$\frac{9,183 \cdot 10^{-3}}{4} = 0,0023 < 0,005;$$

у 2-му прольоті

$$\frac{3,415 \cdot 10^{-3}}{4} = 0,00085 < 0,005;$$

у 3-му прольоті

$$\frac{2,141 \cdot 10^{-3}}{3} = 0,0007 < 0,005;$$

на консольній частині балки

$$\frac{15,668 \cdot 10^{-3}}{2} = 0,00783 > 0,05.$$

Оскільки умова жорсткості для консольної частини не виконується, то з сортаменту необхідно вибрати двотавровий переріз, у якого осьовий момент інерції не менше від потрібної величини:

$$I_x^T = 1840 \cdot \frac{7,83 \cdot 10^{-3}}{5 \cdot 10^{-3}} = 2883 \text{ см}^4.$$

Остаточно приймається двотавр I № 24, у якого $I_x = 3460 \text{ см}^4$, тоді початковий кут повороту та прогин, відповідно:

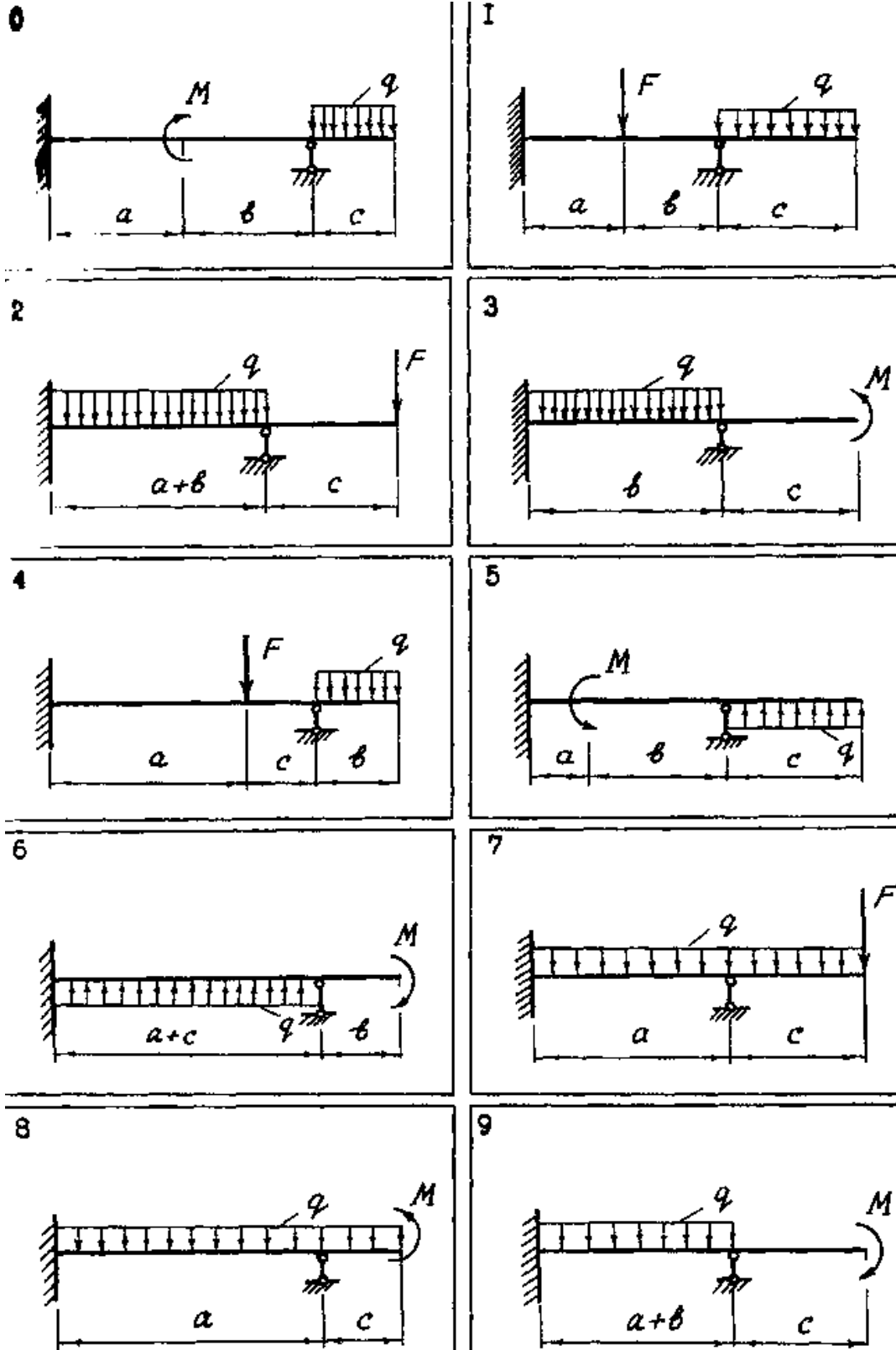
$$\theta_0 = -4,521 \cdot 10^{-3} \text{ рад}; \quad y(13) = -8,328 \cdot 10^{-3} \text{ м},$$

а умова жорсткості виконується:

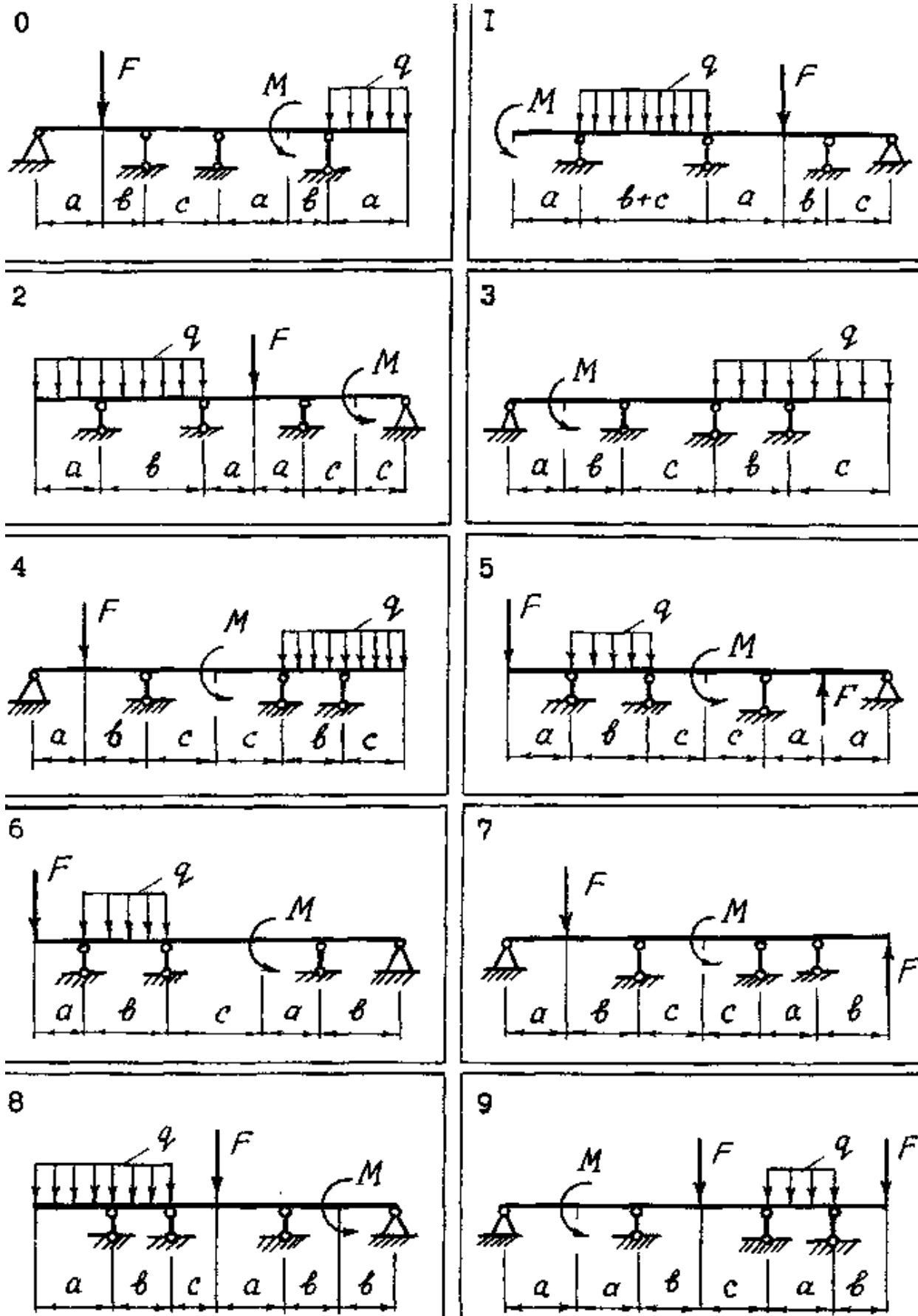
$$\frac{8,328 \cdot 10^{-3}}{2} = 0,004 < 0,005.$$

7.3 Завдання до самостійної роботи за темою 7

Для розрахунку один раз статично невизначеної консольної балки:



Для розрахунку двічі статично невизначеної балки:



Таблиця 7.2 – Вихідні дані для розрахунку статично невизначених багатопрольотних нерозрізних балок

Цифри шифру						
Перша	Друга			Третя		
Номер схеми	a , м	b , м	c , м	F , кН	M , кН·м	q , кН/м
0	2,0	1,5	4,0	15	18	16
1	2,5	2,8	3,2	16	20	14
2	3,0	2,5	3,4	20	14	22
3	2,2	3,0	2,8	18	15	20
4	1,8	3,2	2,5	24	14	15
5	4,0	1,8	2,2	14	15	20
6	3,2	1,8	2,5	12	20	18
7	3,0	2,2	2,4	24	15	12
8	1,8	3,2	2,2	15	22	16
9	2,0	3,2	1,4	20	18	15

7.4 Контрольні запитання за темою 7

1. Які системи називаються статично невизначеними?
2. Що називається ступенем статичної невизначеності системи?
3. Що являють собою нерозрізні балки?
4. Чому дорівнює ступінь статичної невизначеності нерозрізних балок?
5. Що таке вихідна розрахункова схема стержневої системи?
6. Що таке основна система статично невизначеної конструкції?
7. Що таке еквівалентна схема стержневої системи?
8. У якому порядку проводиться розрахунок нерозрізних балок?
9. Запишіть рівняння трьох моментів.
10. Якими прийомами можна побудувати остаточну (сумарну) епюру згинальних моментів?
11. Як проводиться статична перевірка розрахунку нерозрізної балки?
12. У чому полягає деформаційна (кінематична) перевірка остаточної епюри згинальних моментів?

8 ПОЗАЦЕНТРОВЕ РОЗТЯГАННЯ АБО СТИСКАННЯ

Позацентрове розтягання або стискання – це такий вид навантаження, при якому сила, паралельна поздовжній осі стержня, прикладена поза центром ваги поперечного перерізу (рис. 8.1). Така задача часто зустрічається в мостобудуванні при розрахунку опор мостів і в цивільному будівництві при розрахунку колон будівель.

Наприклад, стискаюча сила F , прикладена в точці K , координати якої відносно головних центральних осей інерції поперечного перерізу позначені через x_F , y_F (рис. 8.1, а). Перенесемо силу F паралельно самій собі в центр ваги перерізу, тоді для будь-якого поперечного перерізу дію позацентрово прикладеної сили F можна замінити дією нормальної сили N_2 , яка прикладена в центрі ваги перерізу – точці O , і двох згинальних моментів (рис. 8.1, б):

$$N_2 = -F;$$

$$M_x = F \cdot y_F;$$

$$M_y = F \cdot x_F.$$

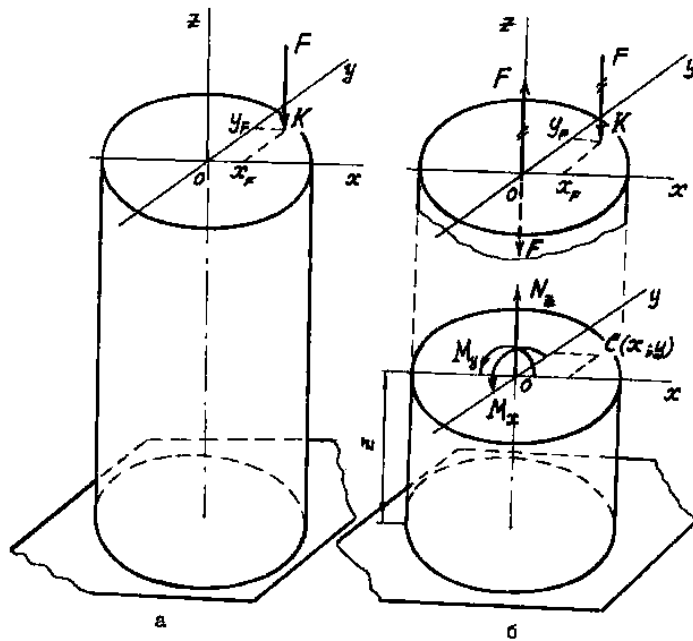


Рисунок 8.1 – Позацентрове розтягання або стискання

Довільна точка C перерізу стержня буде сприймати нормальні напруження, що складаються з напружень осевого стискання силою N_z і напружень від чистого згинання моментами M_x і M_y :

$$\sigma_C = \frac{N_z}{A} - \frac{M_x}{I_x} \cdot y - \frac{M_y}{I_y} \cdot x = -\frac{F}{A} \left(1 + \frac{x_F}{i_y^2} \cdot x + \frac{y_F}{i_x^2} \cdot y \right), \quad (8.1)$$

де квадрати головних радіусів інерції

$$i_x^2 = \frac{I_x}{A}; \quad i_y^2 = \frac{I_y}{A};$$

Якщо сила F прикладена в першому квадранті головної системи координат, буде розтягувати переріз, то знак перед рівнянням (8.1) слід змінити на «плюс».

Часто для визначення небезпечної точки складного профілю стержня виявляється доцільною побудова нейтральної лінії перерізу. Рівняння нейтральної лінії, що розділяє зони розтягання та стискання, можна отримати, прирівнявши вираження (8.1) нулю. Оскільки $F \neq 0$, то вираження в дужках буде визначати рівняння нейтральної лінії. Його можна представити у вигляді рівняння прямої у відрізках на осях координат:

$$\frac{x}{a_i} + \frac{y}{b_i} = 1; \quad a_i = -\frac{i_y^2}{x_F}; \quad b_i = -\frac{i_x^2}{y_F}; \quad (8.2)$$

Задаючись координатами точки прикладення сили F з рівняння (8.2) можна отримати відрізки a_n і b_n , що відсікаються нейтральної лінією на осях x і y (рис. 8.2).

Максимальні напруження (що розтягує та що стискає) виникають в найбільш віддалених точках перерізу D і B (рис. 8.2). Тоді умова міцності

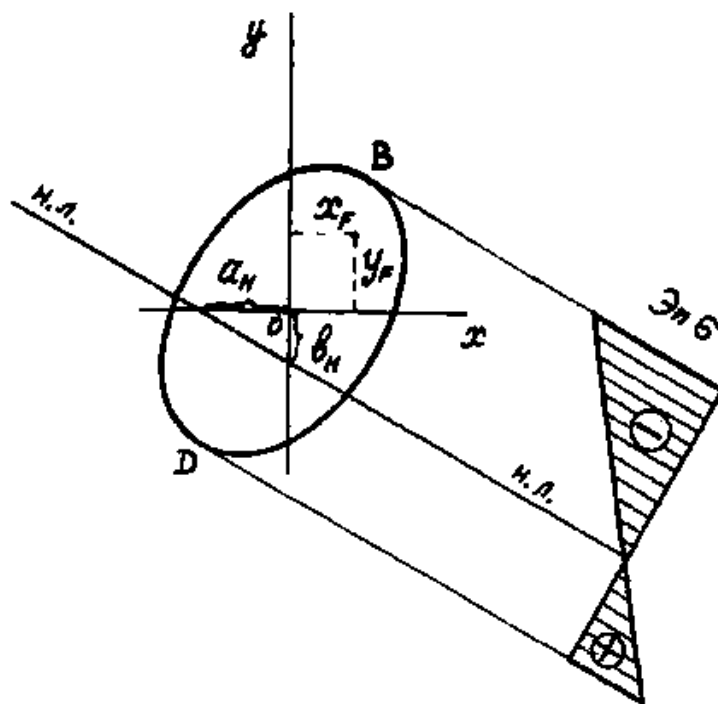


Рисунок 8.2 – Розподіл напружень в перерізі стержня при позacentровому розтяганні або стисканні

за найбільшими нормальними напруженнями має вигляд:

$$\sigma_{\max}^+ = \sigma_D = -\frac{F}{A} \left(1 + \frac{x_F}{i_y^2} \cdot x_D + \frac{y_F}{i_x^2} \cdot y_D \right) \leq R_p$$

$$\sigma_{\min}^- = \sigma_B = -\frac{F}{A} \left(1 + \frac{x_F}{i_y^2} \cdot x_B + \frac{y_F}{i_x^2} \cdot y_B \right) \leq R_C \quad (8.3)$$

Відстань від початку координат до деякої прямої, як відомо з курсу аналітичної геометрії, дорівнює:

$$|OP| = \frac{|a \cdot 0 + b \cdot 0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{c}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

В даному випадку, з урахуванням (8.2) (рис. 8.3):

$$|OP| = \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{1}{a_i}\right)^2 + \left(\frac{1}{b_i}\right)^2}} = \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{x_p}{i_y^2}\right)^2 + \left(\frac{y_F}{i_x^2}\right)^2}} \quad (8.4)$$

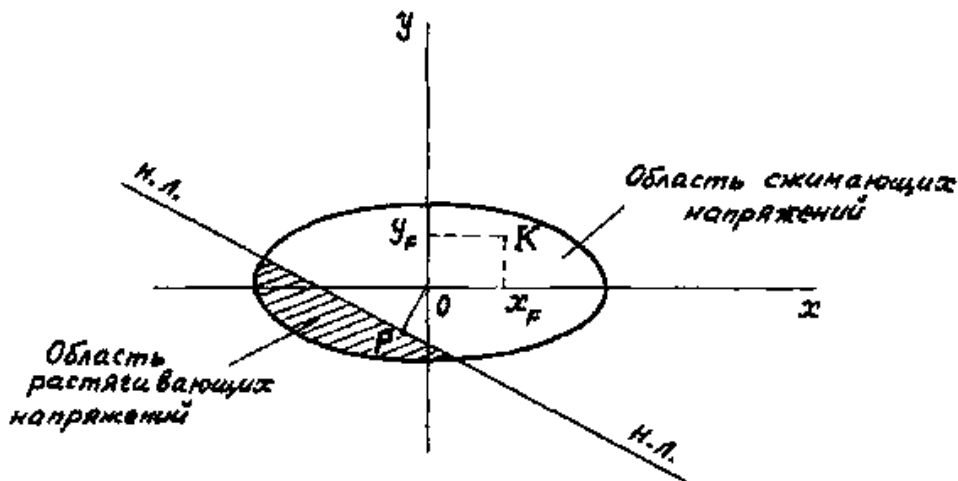


Рисунок 8.3 – Положення нейтральної лінії відносно перерізу стержня при позацентровому розтяганні або стисканні

З вираження (8.4) і рис. 8.3 випливає, що якщо сила F наближається до центру ваги перерізу, то нейтральна лінія віддаляється від нього. У ліміті, при $x_F = y_F = 0$ (коли сила F прикладена в центрі ваги), нейтральна лінія знаходиться в безкінечності. Отже, положення нейтральної лінії визначається координатами точки прикладення сили F .

З цього випливає, що при позацентровому навантаженні нейтральна лінія може як перетинати переріз, так і перебувати за його межами. У першому випадку в перерізі будуть напруження обох знаків – і розтягуючі, і стискаючі. У другому – напруження одного знаку. Напруження одного знаку виникають ще й тоді, коли нейтральна лінія дотикається перерізу. Цей аспект має значення для цегляних і бетонних колон, матеріал яких крихкий та погано працює на розтягання. Тому при проектуванні бажано, щоб напруження при позацентровому стисканні для всього перерізу були такими, що стискають.

Зона навколо центра ваги перерізу, прикладення поздовжньої сили всередині якої викликає у всьому поперечному перерізі напруження одного знаку, називається ядром перерізу.

Для побудови ядра перерізу необхідно розглянути різні положення дотичних до контуру перерізу та, припускаючи, що ці дотичні є нейтральними лініями, знайти координати граничних точок ядра за формулами (8.2):

$$x_y = x_F = -\frac{i_y^2}{a_i}; \quad y_y = y_F = -\frac{i_x^2}{b_i},$$

а потім по цих точках викреслити ядро (рис. 8.4).

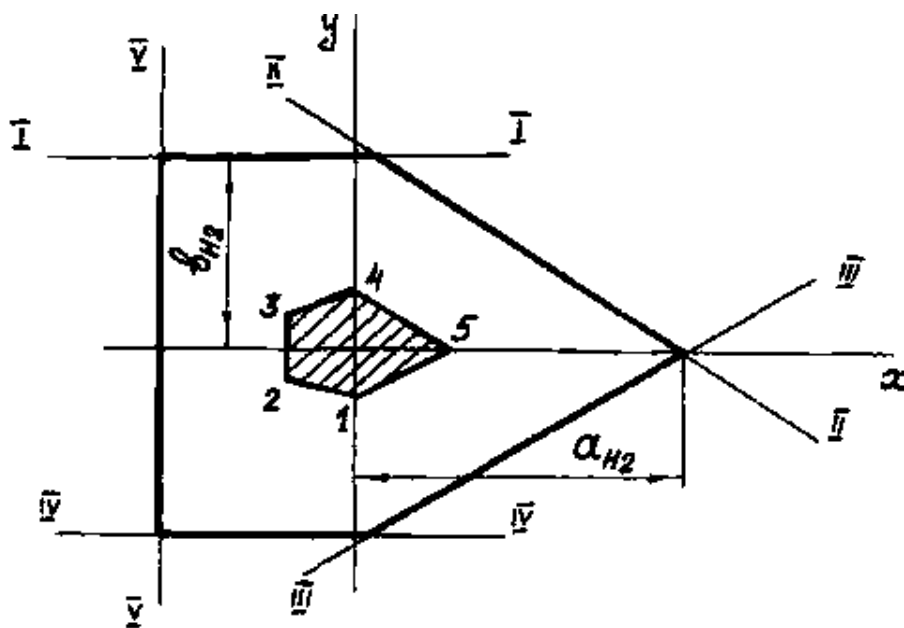


Рисунок 8.4 – Ядро перерізу

8.1 Розрахунок на міцність і побудова ядра перерізу при позацентровому розтяганні або стисканні

Жорстка колона заданого поперечного перерізу стискається силою F , паралельною осі колони і прикладеною з ексцентриситетом відносно центра ваги перерізу. Потрібно:

- 1) визначити положення центра ваги перерізу;
- 2) побудувати нейтральну лінію;
- 3) визначити найбільші напруження розтягання та стискання;
- 4) побудувати епюру нормальних напружень;
- 5) побудувати ядро перетину.

У розрахунках прийняти розрахунковий опір:

$$R_p = R_c = R.$$

Розрахункові схеми та вихідні дані для виконання індивідуального завдання самостійної роботи наведені в п. 8.2, табл. 8.2.

Вихідні дані для розрахунку поперечного перерізу стержня, показано на рис. 8.5, якщо сила прикладена в точці К:

- розрахунковий опір – $R_p = R_c = 10$ МПа;
- довжина ділянки стержня – $a = 0,6$ м;
- довжина ділянки стержня – $b = 0,4$ м.

Власна вага стержня не враховується.

Визначається положення центра ваги перерізу, проводяться головні центральні осі x , y і визначаються геометричні характеристики перерізу.

Площа поперечного перерізу дорівнює:

$$A = A_1 + A_2 = 2b \cdot 3a + 3b \cdot a = 9 \cdot 0,6 \cdot 0,4 = 2,16 \text{ м}^2.$$

Відстань від допоміжної вертикальної осі y_B до центра ваги всього поперечного перерізу:

$$x_c = \frac{\sum S_{iy_B}}{\sum A_i} = \frac{A_1 \cdot x_1 + A_2 \cdot x_2}{A_1 + A_2} = \frac{2b \cdot 3a \cdot b + 3ba \left(2b + \frac{3}{2}b \right)}{2b \cdot 3a + 3b \cdot a} =$$

$$= \frac{6 \cdot 0,4^2 \cdot 0,6 + 3 \cdot 0,4 \cdot 0,6 \cdot 3,5 \cdot 0,4}{6 \cdot 0,4 \cdot 0,6 + 3 \cdot 0,4 \cdot 0,6} = 0,733 \text{ м}.$$

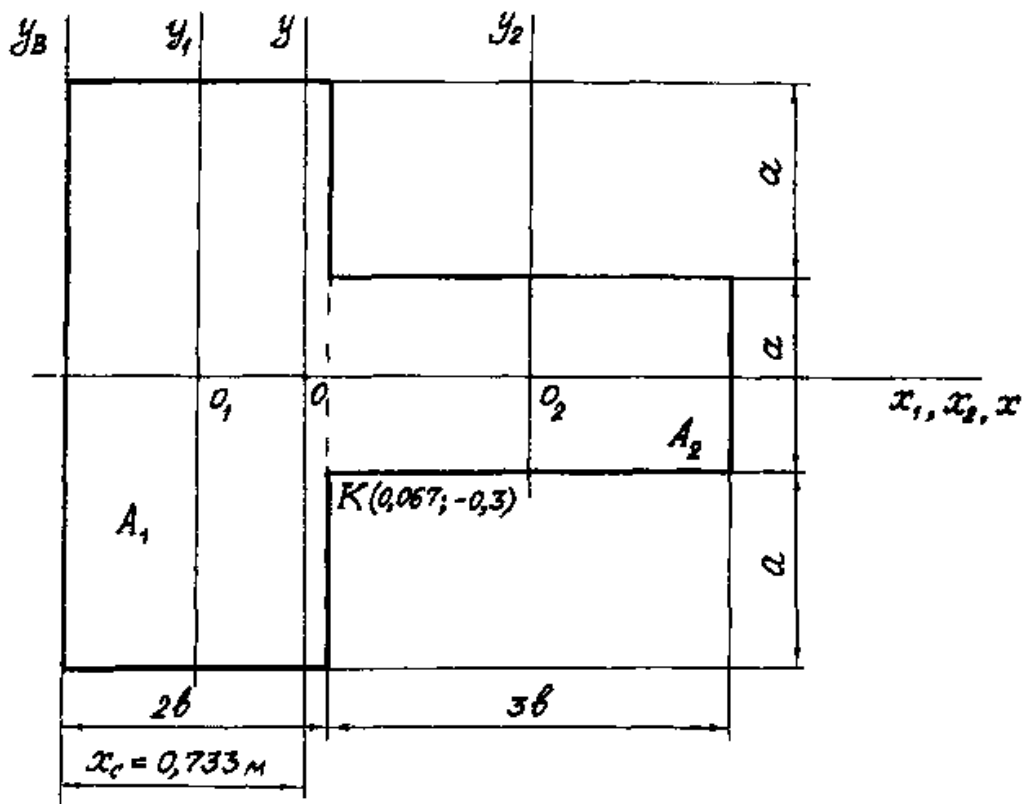


Рисунок 8.5 – Геометрична схема поперечного перерізу стержня

Головні осьові моменти інерції і квадрати головних радіусів інерції обчислюються за формулами:

$$I_x = I_{x_1} + I_{x_2} = \frac{2b \cdot (3a)^3}{12} + \frac{3b \cdot a^3}{12} = \frac{2 \cdot 0,4 \cdot (3 \cdot 0,6)^3}{12} + \frac{3 \cdot 0,4 \cdot 0,6^3}{12} = 0,4104 \text{ м}^4;$$

$$I_y = I_{y_1} + A_1(x_c - b)^2 + I_{y_2} + A_2\left(\frac{3}{2}b + 2b - x_c\right)^2 = \frac{3a \cdot (2b)^3}{12} + 6ab(x_c - b)^2 + \frac{a \cdot (3b)^3}{12} + 3ab(3,5b - x_c)^2 = \frac{3 \cdot 0,6 \cdot 0,8^3}{12} + 6 \cdot 0,6 \cdot 0,4(0,733 - 0,4)^2 + \frac{0,6 \cdot 1,2^3}{12} + 3 \cdot 0,6 \cdot 0,4(3,5 \cdot 0,4 - 0,733)^2 = 0,643 \text{ м}^4;$$

$$i_x^2 = \frac{I_x}{A} = \frac{0,4104}{2,16} = 0,19 \text{ м}^2; \quad i_y^2 = \frac{I_y}{A} = \frac{0,6432}{2,16} = 0,298 \text{ м}^2.$$

Визначаються відрізки на головних осях x , y , що відсікаються нейтральної лінією, за формулами (8.2):

$$a_i = \frac{-i_y^2}{x_F} = \frac{-0,298}{0,067} = -4,448 \text{ м}; \quad b_i = -\frac{i_x^2}{y_F} = \frac{-0,19}{-0,3} = 0,633 \text{ м},$$

після чого проводиться нейтральна лінія (рис. 8.6).

Максимальні напруження виникають в точках В і D, найбільш віддалених від нейтральної лінії. З умов міцності за формулами (8.3) в цих точках визначаються допустимі зусилля, які дорівнюють:

$$[F]_B = \frac{A \cdot R_c}{1 + \frac{x_F}{i_y^2} \cdot x_B + \frac{y_F}{i_x^2} \cdot y_B} = \frac{2,16 \cdot (-10)}{1 + \frac{0,067}{0,298} \cdot 0,067 + \frac{-0,3}{0,19} \cdot (-0,9)} = -8,867 \cdot 10^3 \text{ кН};$$

$$[F]_D = \frac{A \cdot R_p}{1 + \frac{x_F}{i_y^2} \cdot x_D + \frac{y_F}{i_x^2} \cdot y_D} = \frac{2,16 \cdot 10}{1 + \frac{0,067}{0,298} \cdot (-0,733) + \frac{-0,3}{0,19} \cdot 0,9} = -36,87 \cdot 10^3 \text{ кН}.$$

У якості допустимого зовнішнього навантаження приймається величина $-8,87 \cdot 10^3$ кН й

Визначаються напруження, що розтягують і що стискають елемент, в небезпечних точках перерізу, МПа:

$$\begin{aligned}\sigma_B &= \frac{F}{A} \left(1 + \frac{x_F}{i_y^2} \cdot x_B + \frac{y_F}{i_x^2} \cdot y_B \right) = \\ &= \frac{-8,87 \cdot 10^6}{2,16} \cdot \left[1 + \frac{0,067}{0,298} \cdot 0,067 + \frac{-0,3}{0,19} \cdot (-0,9) \right] = -10.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sigma_D &= \frac{F}{A} \left(1 + \frac{x_F}{i_y^2} \cdot x_D + \frac{y_F}{i_x^2} \cdot y_D \right) = \\ &= \frac{-8,87 \cdot 10^6}{2,16} \cdot \left[1 + \frac{0,067}{0,298} \cdot (-0,733) + \frac{-0,3}{0,19} \cdot 0,9 \right] = 2,41.\end{aligned}$$

Для побудови ядра перерізу проведемо ряд прямих ліній, дотичних до контуру перерізу, вважаючи, що вони є нейтральними лініями.

Координати ядра перерізу для проведених нейтральних ліній визначаються за співвідношеннями:

$$x_{yi} = -\frac{i_y^2}{a_{ii}}, \quad y_{yi} = -\frac{i_x^2}{b_{ii}},$$

після чого значення відрізків, що відсікаються нейтральними лініями на головних осях і координати точок ядра перерізу зводяться в табл. 8.1. Будується ядро перетину (рис. 8.6).

Таблиця 8.1 – Координати характерних точок ядра перерізу

Координати, м				
Дотична	a_{ii}	b_{ii}	X_{yi}	Y_{yi}
I	∞	0,9	0	-0,211
II	1,867	0,934	-0,16	-0,203
III	1,267	∞	-0,235	0
IV	1,867	-0,934	-0,16	0,203
V	∞	-0,9	0	0,211
VI	-0,733	∞	0,407	0

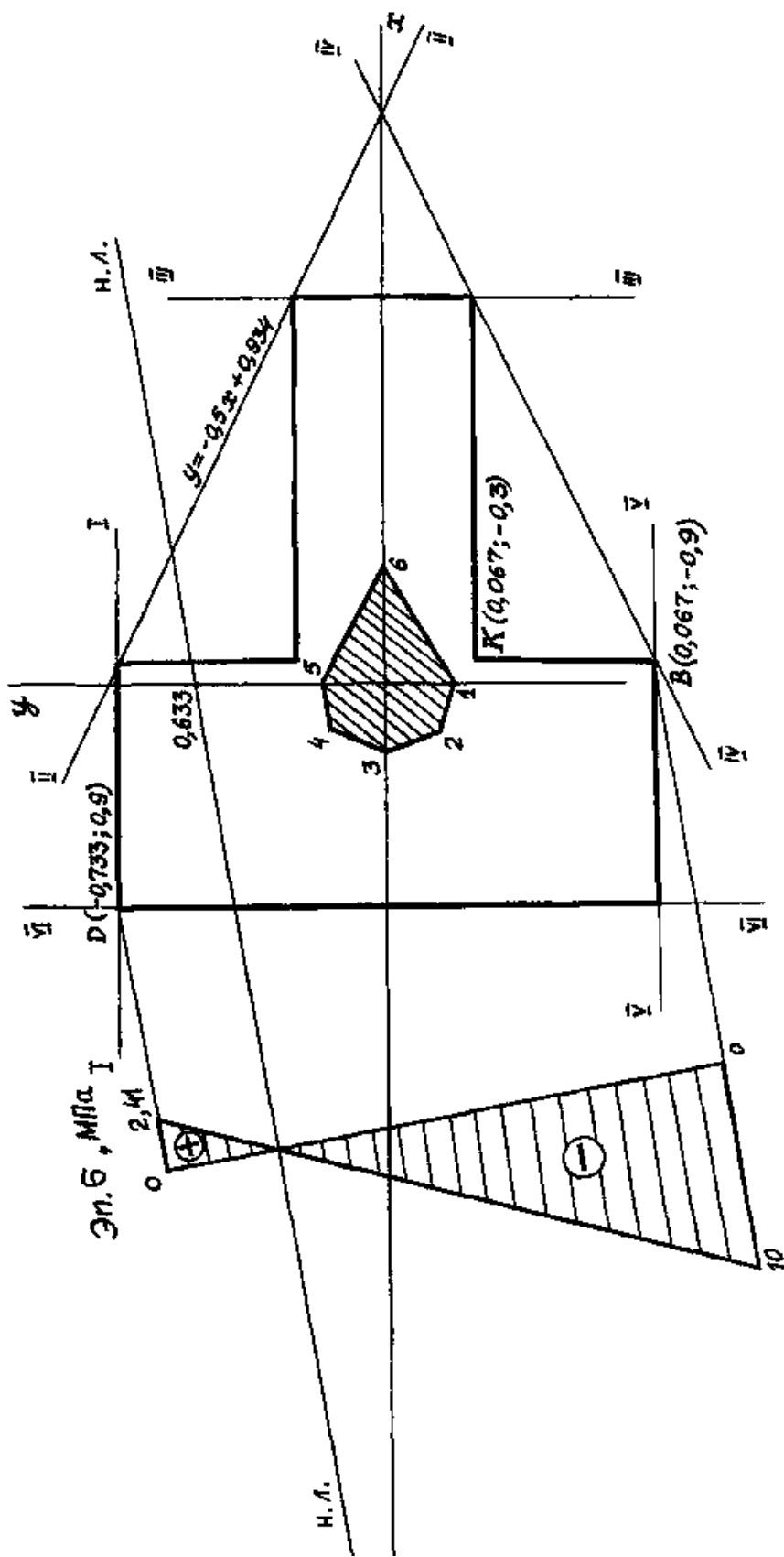
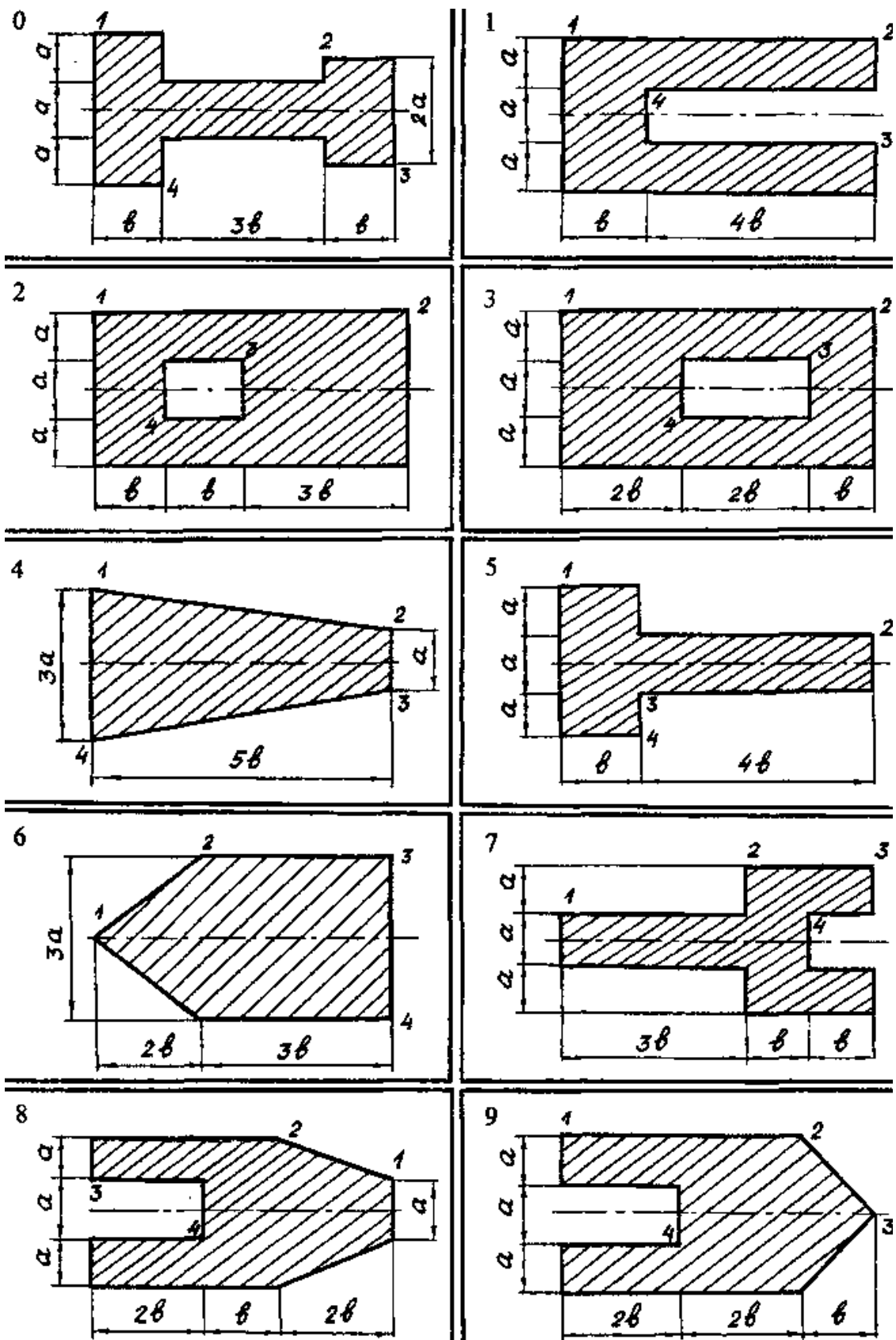


Рисунок 8.6 – Побудова нейтральної лінії, епюри нормальних напружень і ядра перерізу стержня, що працює на позacentрове розтягання або стискання

8.2 Завдання до самостійної роботи за темою 8



Таблиця 8.2 – Вихідні дані для розрахунку стержнів на позацентрове розтягання або стискання

Цифри шифру					
№	Перша	Друга			Третя
	Номер схеми	R , МПа	a , м	b , м	Точка прикладення сили
0	0	20	0,40	0,35	1
1	1	30	0,35	0,3	2
2	2	35	0,30	0,28	3
3	3	40	0,32	0,32	4
4	4	25	0,28	0,34	1
5	5	30	0,42	0,40	2
6	6	40	0,34	0,36	3
7	7	45	0,28	0,26	4
8	8	50	0,36	0,25	1
9	9	25	0,38	0,42	2

8.3 Контрольні запитання за темою 8

1. Що розуміється під позацентровим розтягуванням або стисканням?
2. Як будується нейтральна лінія перерізу?
3. В яких точках виникають екстремальні напруження?
4. Як визначається напруження у довільній точці поперечного перерізу при позацентровому розтягуванні або стисканні?
5. Чому дорівнює напруження в центрі ваги поперечного перерізу?
6. Як будується ядро перерізу?
7. Яке місце займає нейтральна лінія, коли поздовжня сила прикладена на кордоні ядра перетину?

9 КОСЕ ЗГИНАННЯ

Косим згинанням називається такий випадок згинання бруса, при якому площина дії сумарного згинального моменту в перерізі не співпадає з жодною головною віссю інерції. При цьому в перерізі виникають два згинальних моменти – M_x і M_y .

Розглядається балку, жорстко закріплену з одного кінця, на яку діє сила F , прикладена в центрі ваги кінцевого перерізу під кутом α до осі y (рис. 9.1).

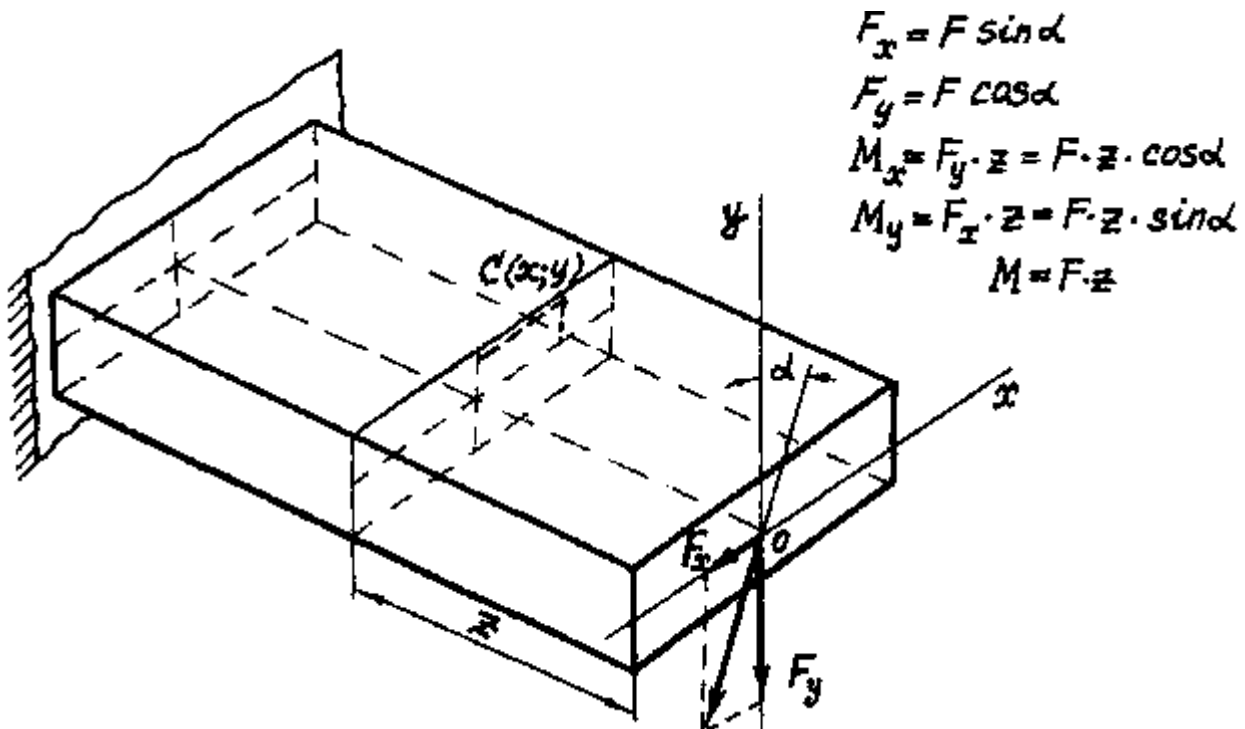


Рисунок 9.1 – Схема бруса при косому згинанні

Згинальні моменти слід вважати додатними, якщо вони викликають напруження розтягування в першій чверті системи координат xOy (x, y – головні центральні осі інерції перерізу). Застосовуючи принцип незалежності дії сил, можна отримати напруження в точці C :

$$\sigma_c = \frac{M_x}{I_x} \cdot y + \frac{M_y}{I_y} \cdot x = M \left(\frac{y \cos \alpha}{I_x} + \frac{x \sin \alpha}{I_y} \right) \quad (9.1)$$

Якщо волокна бруса в першій чверті стиснуті, то у формулі (9.1) перед моментом необхідно поставити знак «мінус».

Як відомо, напруження на нейтральній лінії дорівнює нулю. Тоді прирівнявши (9.1) нулю і з огляду на те, що

$$M \neq 0; \quad \frac{y \cos \alpha}{I_x} + \frac{x \sin \alpha}{I_y} = 0,$$

виходить рівняння нейтральної лінії у вигляді рівняння прямої, що проходить через центр ваги перерізу, з кутовим коефіцієнтом:

$$y = -\frac{I_x}{I_y} \cdot \operatorname{tg} \alpha \cdot x \quad (9.2)$$

Згідно (9.2) кут нахилу нейтральної лінії до осі x буде дорівнювати

$$\operatorname{tg} \varphi = -\frac{I_x}{I_y} \cdot \operatorname{tg} \alpha; \quad \operatorname{tg} \alpha = \frac{M_y}{M_x},$$

тобто кути α і φ в загальному випадку не будуть рівні. Це означає, що при косому згинанні сила F не перпендикулярна нейтральної лінії (рис. 9.2) – на відміну від плоского згинання. Нейтральна лінія повернута в бік осі мінімального моменту інерції.

З аналізу останньої формули випливає, що сила F буде перпендикулярна нейтральній лінії при $I_x = I_y$ (круглий або квадратний поперечний переріз).

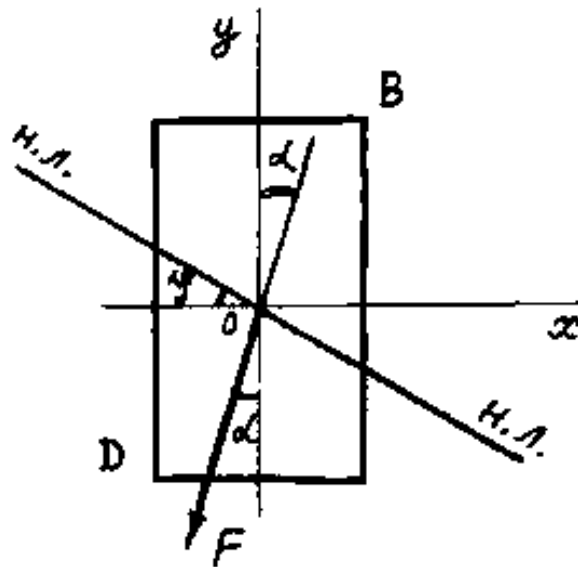


Рисунок 9.2 – Положення нейтральної лінії в перерізі при косому згинанні

Епюра нормальних напружень в поперечному перерізі змінюється за лінійним законом, тому максимальні напруження виникають в точках, найбільш віддалених від нейтральної лінії. На рис. 9.2 найбільш віддаленими є точки В і D. Для цих точок умова міцності за нормальними напруженням запишеться у вигляді:

$$\sigma_{\max}^+ = \sigma_B = \frac{M_x}{I_x} \cdot y_B + \frac{M_y}{I_y} \cdot x_B \leq R_p ; \quad (9.3)$$

$$\sigma_{\min}^- = \sigma_D = \frac{M_x}{I_x} \cdot y_D + \frac{M_y}{I_y} \cdot x_D \leq R_c ,$$

де R_p, R_c – відповідно, розрахункові опори матеріалу при розтягуванні та стисканні.

Для визначення переміщень також використовується принцип незалежної дії сил, тобто переміщення обчислюються в кожній з головних площин інерції. Диференціальні рівняння прогинів у вертикальній і горизонтальній площинах записуються у вигляді:

$$EI_x \frac{d^2 y}{dz^2} = M_x(z);$$

$$EI_y \frac{d^2 x}{dz^2} = M_y(z).$$

Користуючись цими диференціальними рівняннями, безпосереднім їх інтегруванням або методом початкових параметрів можна обчислити прогини в характерних перерізах бруса. Переміщення можуть бути визначені й енергетичними методами Мора або Верещагіна. Величина повного прогину f визначиться як геометрична сума прогинів x і y :

$$f = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

9.1 Розрахунок на міцність при косому згинанні

Для двохопорної балки потрібно:

1) визначити небезпечний переріз за довжиною балки;

2) виходячи з умови міцності визначити розміри поперечного перерізу, прийнявши

$$R_p = R_c = 200 \text{ МПа};$$

3) побудувати епюри розподілу нормальних напружень за поперечним перерізом.

Розрахункові схеми та вихідні дані для виконання індивідуального завдання самостійної роботи наведені в п. 9.2, табл. 9.1.

Необхідно виконати розрахунки для заданої схеми навантаження балки (рис. 9.3) з поперечним перерізом, зображеним на рис. 9.4. При розрахунках приймається:

- зовнішній згинальний момент – $M = 12,2 \text{ кН} \cdot \text{м}$;

- зовнішня зосереджена сила – $F = 20 \text{ кН}$;

- зовнішнє розподілене навантаження – $q = 10 \text{ кН/м}$;

- кут нахилу сили – $\alpha = 60^\circ$.

Власна вага матеріалу стержня не враховується.

Задана розрахункова схема балки розкладається на схеми навантаження окремо в вертикальній, окремо в горизонтальній площинах. З малюнка 9.3 випливає, що:

1) зосереджена сила F діє в площині, перпендикулярній осі балки і може бути розкладена на складові у вертикальній і горизонтальній площинах

$$F_y = F \cdot \cos \alpha = 20 \cdot \cos 60^\circ = 10 \text{ кН}; \quad F_x = F \cdot \sin \alpha = 20 \cdot \sin 60^\circ = 17,32 \text{ кН};$$

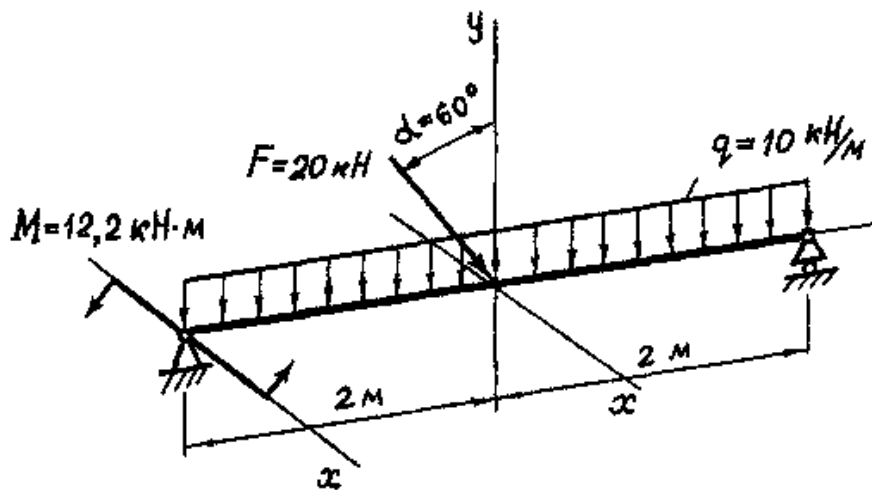


Рисунок 9.3 – Розрахункова схема балки

- 2) зовнішнє розподілене навантаження q діє в вертикальній площині;
- 3) зовнішній згинальний момент M діє в горизонтальній площині.

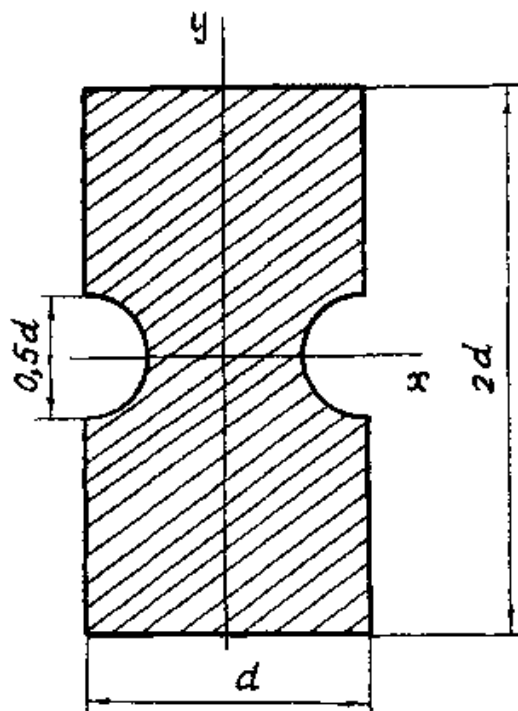


Рисунок 9.4 – Геометрична схема перерізу

Методом перерізів у вертикальній і горизонтальній площинах

визначаються внутрішні силові фактори на ділянках балки. При побудові епюр в горизонтальній площині вісь x прямує вгору або вниз, відповідно повертається на 90° і навантаження, а бічні волокна з одного боку перерізу стають нижніми, з іншого – верхніми. Епюри $Q_y(z)$, $M_x(z)$, $Q_x(z)$, $M_y(z)$ для розглянутої балки наведені на рис. 9.5.

Зі спільного аналізу епюр M_x і M_y визначається небезпечний переріз. Для розглянутої балки небезпечний переріз знаходиться в середині прольоту. Однак розташування небезпечного перерізу не завжди очевидно. Тоді необхідно розглядати кілька перерізів, перевіряючи кожний на максимальний згинальний момент за формулою:

$$M_{\text{из}} = \sqrt{M_x^2 + M_y^2}.$$

Визначається положення площини дії повного згинального моменту.

З розгляду епюри M_x випливає, що розтягнутими є нижні волокна, тобто розташовані на стороні DE, а стиснутими є верхні волокна – на стороні BC; епюра M_y показує, що розтягнуті волокна – на стороні CD, а стиснуті – на стороні BE (рис. 9.6, а).

Додатними вважатимемо згинальні моменти, що викликають напруження розтягання в першій чверті обраної системи координат, тому:

$$M_x = -30 \text{ кН}\cdot\text{м}; \quad M_y = 11,22 \text{ кН}\cdot\text{м}.$$

Тоді

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{M_y}{M_x} = \frac{11,22}{-30} = -0,374; \quad \alpha = -20,51^\circ.$$

На рис. 9.6, а показаний слід дії площині повного згинального моменту.

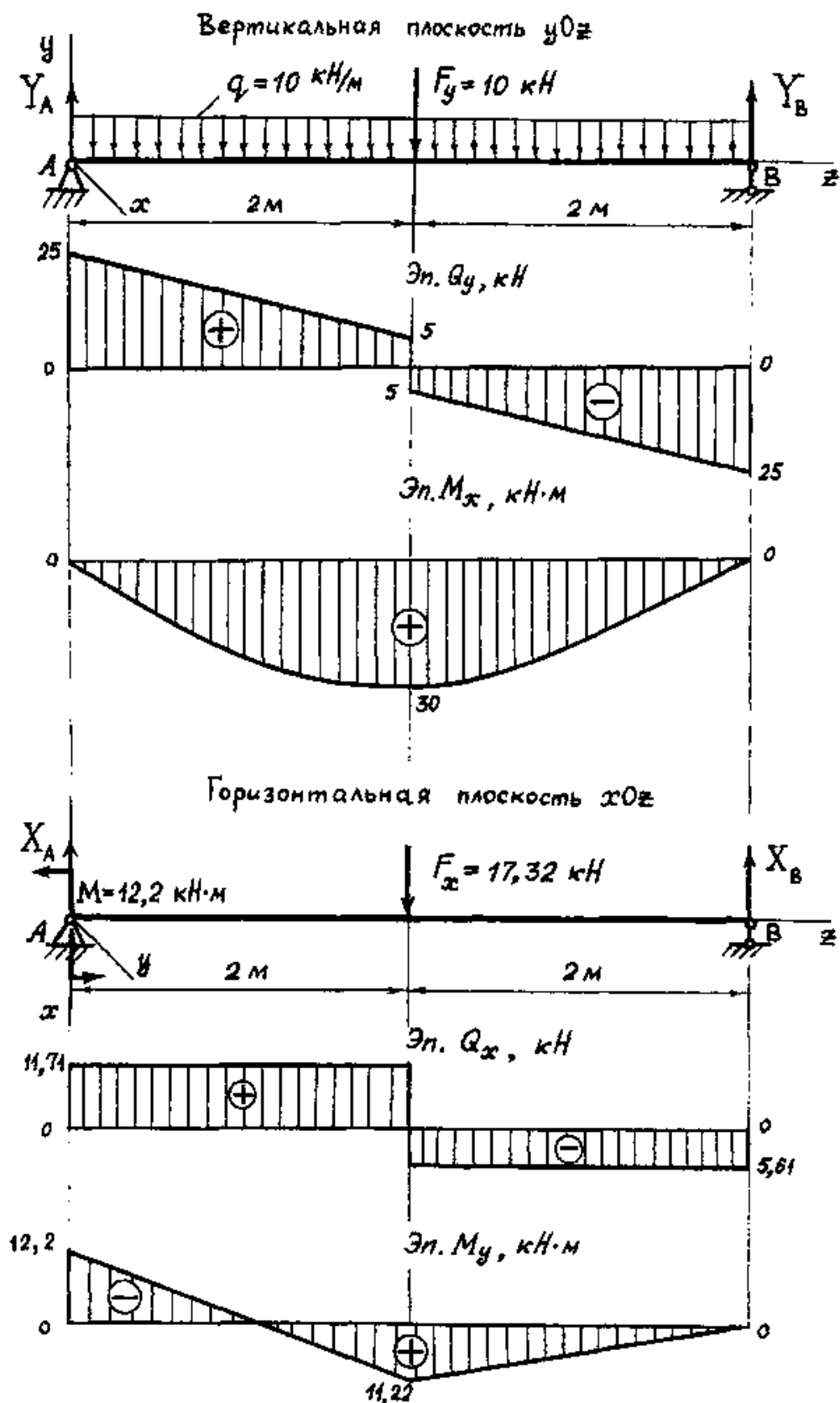


Рисунок 9.5 – Розрахунок внутрішніх зусиль бруса при косому згинанні у вертикальній і горизонтальній площинах

Визначається кут нахилу нейтральної лінії до осі x (кутовий коефіцієнт цієї прямої) за формулою:

$$K_{i.в.} = \operatorname{tg}\varphi = -I_x / I_y \cdot \operatorname{tg}\alpha.$$

Знаходяться осеві моменти інерції I_x та I_y (рис. 9.6, б):

$$I_x = \frac{d \cdot (2d)^3}{12} - 2I_{x_1} = \frac{2}{3}d^4 - 2 \frac{\pi d^4}{128} = 0,618d^4;$$

$$I_y = \frac{2d \cdot d^3}{12} - 2I_{y_1} = \frac{1}{6}d^4 - 2 \left[0,00686(0,5d)^4 + 0,5 \frac{\pi(0,5d)^2}{4} \cdot (0,5d - 0,212 \cdot 0,5d)^2 \right] = 0,141d^4$$

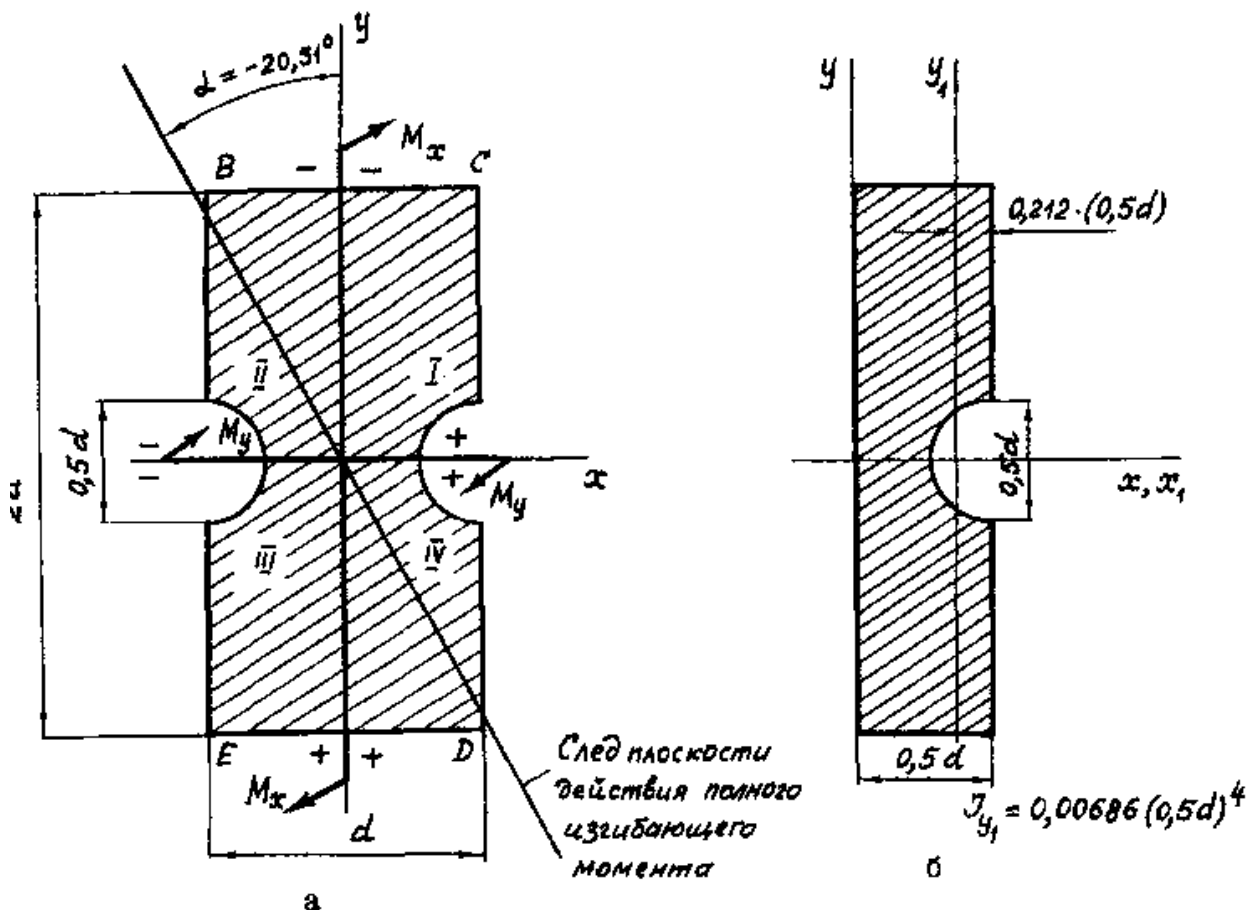


Рисунок 9.6 – Визначення сумарного згинального моменту (а) і геометричних характеристик перерізу (б)

Тоді

$$K_{\text{н.л.}} = \operatorname{tg}\varphi = -\frac{0,618d^4}{0,141d^4} \cdot (-0,374) = 1,637; \quad \varphi = 58,58^\circ.$$

Додатне значення кута відкладається на рис. 9.7 проти годинникової стрілки.

Напруження на нейтральній лінії дорівнюють нулю, з однієї сторони від неї волокна розтягнуті, з другої – стиснуті. Максимальні напруження виникають в найбільш віддалених від нейтральної лінії точках перетину В і D. Для цих точок умови міцності мають вигляд:

$$\sigma_{\max}^+ = \sigma_D = \frac{M_x}{I_x} \cdot y_D + \frac{M_y}{I_y} \cdot x_D \leq R_p;$$

$$\sigma_{\min}^- = \sigma_B = \frac{M_x}{I_x} \cdot y_B + \frac{M_y}{I_y} \cdot x_B \leq R_c.$$

Після підстановки значень I_x та I_y і координат точок В і D:

$$\frac{M_x}{0,618d^4} \cdot (-d) + \frac{M_y}{0,141d^4} \cdot 0,5d \leq R_p;$$

$$\frac{M_x}{0,618d^4} \cdot d + \frac{M_y}{0,141 \cdot d^4} \cdot (-0,5d) \leq R_c;$$

$$\sigma_{\max}^+ = \sigma_D = |\sigma_B|.$$

Враховуючи те, що $R_p = R_c$, характерний розмір поперечного перерізу можна визначати, використовуючи будь-яку умову міцності. Наприклад, з умови для точки D:

$$d = \sqrt[3]{\frac{1}{R_p} \left[\frac{M_x}{0,618d} \cdot (-1) + \frac{M_y}{0,141} \cdot 0,5 \right]} =$$

$$= \sqrt[3]{\frac{1}{200 \cdot 10^6} \left[\frac{-30 \cdot 10^3}{0,618} \cdot (-1) + \frac{11,22 \cdot 10^3}{0,141} \cdot 0,5 \right]} = 0,0762 \text{ м.}$$

Округляючи, приймається $d \approx 0,08$ м.

Тоді напруження в небезпечних точках перерізу дорівнюватимуть:

$$\sigma_D = \frac{-30 \cdot 10^3}{0,618 \cdot 0,08^4} \cdot (-0,08) + \frac{11,22 \cdot 10^3}{0,141 \cdot 0,08^4} \cdot 0,5 \cdot 0,08 = 172,52 \text{ МПа} < R_p;$$

$$\sigma_B = -\sigma_D = -172,52 \text{ МПа.}$$

Обчислене максимальне напруження менше розрахункового опору, тобто балка має деякий запас міцності. Будується еюра розподілу нормальних напружень для небезпечного перерізу балки (рис. 9.7).

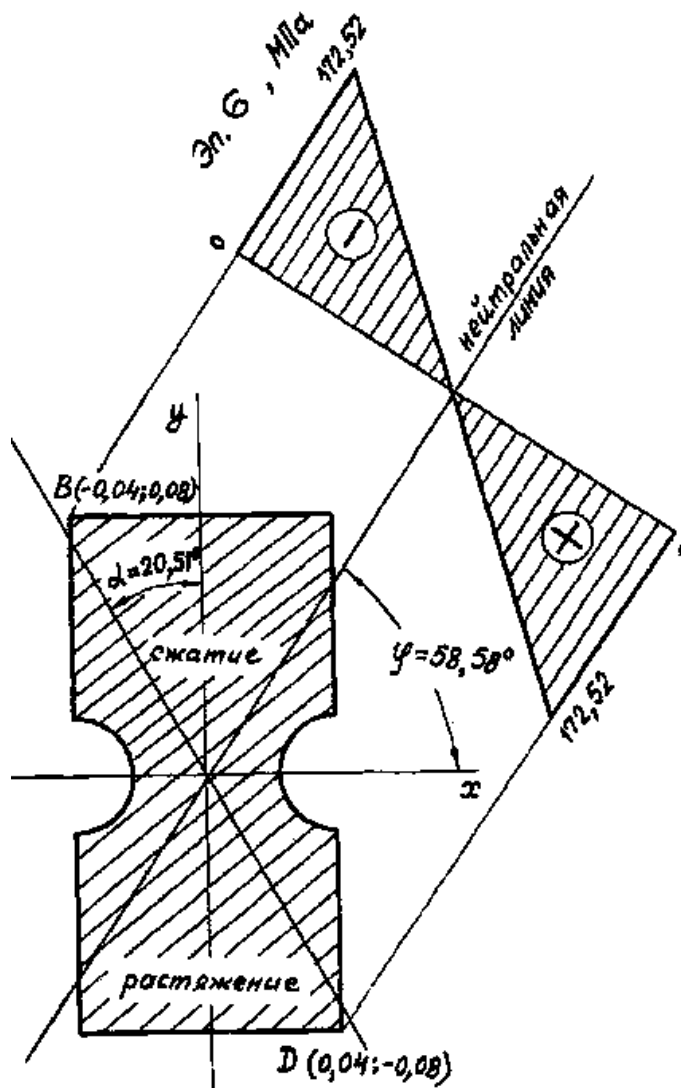
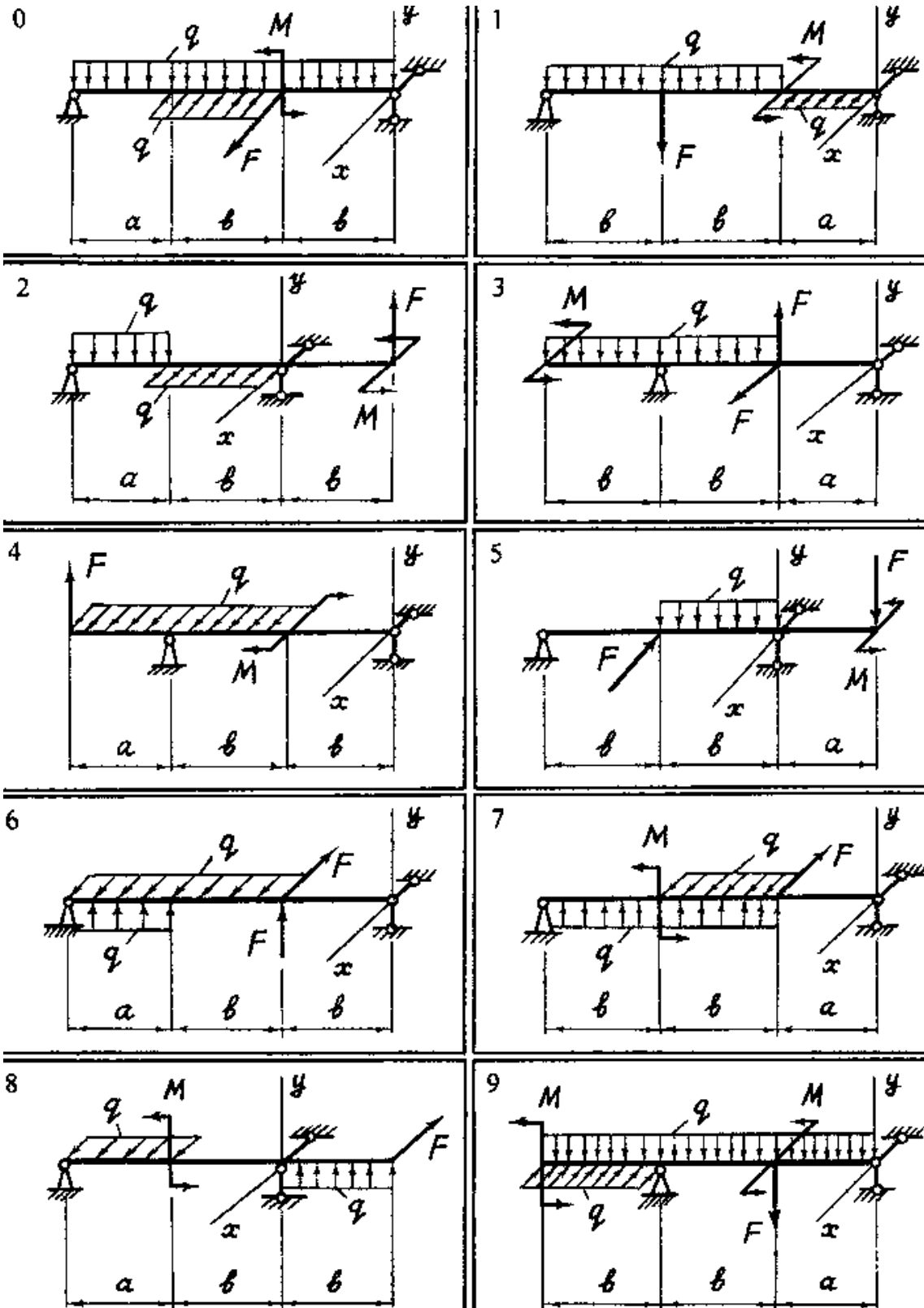


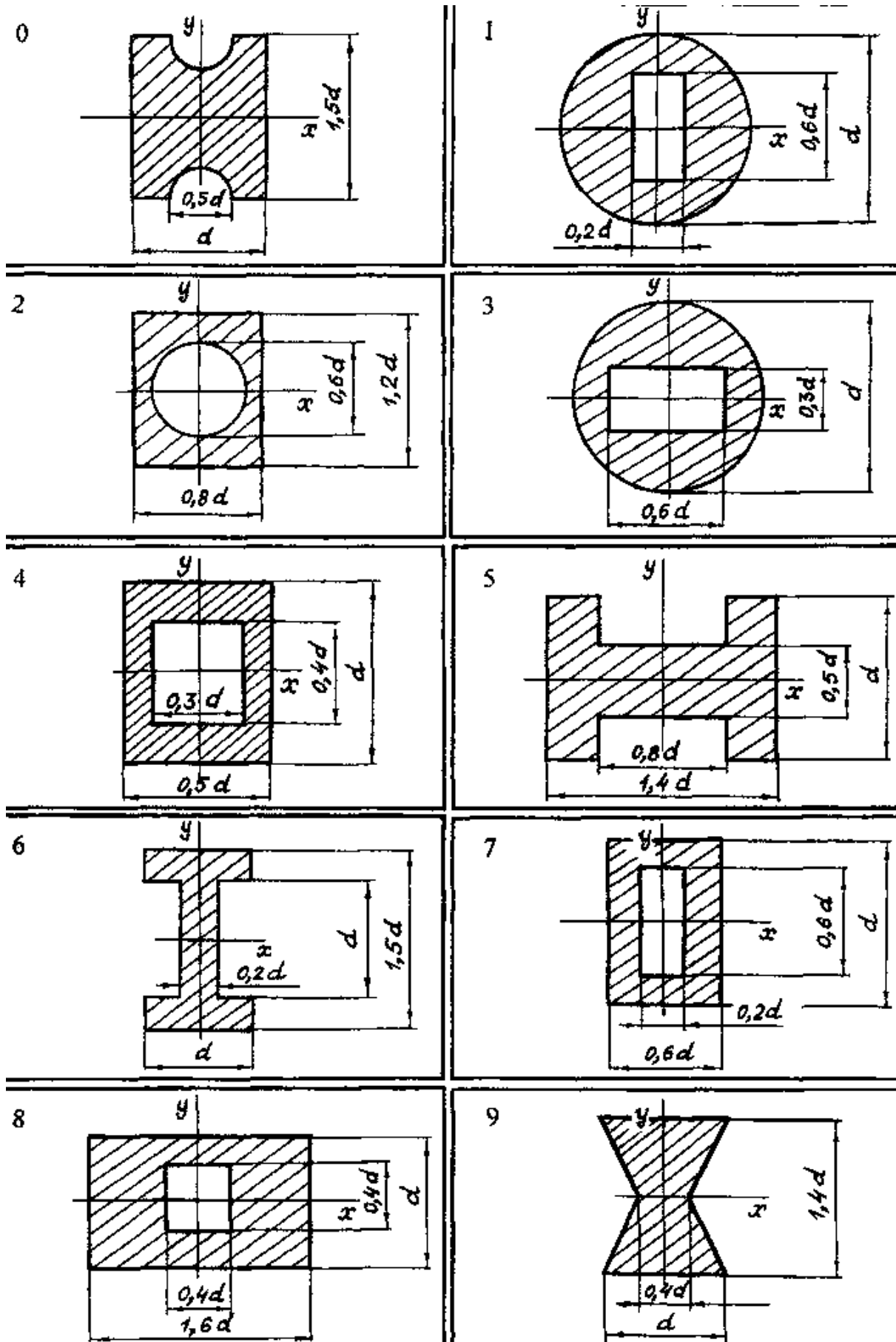
Рисунок 9.7 – Положення нейтральної лінії та еюра нормальних напружень

9.2 Завдання до самостійної роботи за темою 9

Розрахункові схеми балок:



Геометричні схеми поперечних перерізів балок:



Таблиця 9.1 – Вихідні дані до розрахунку балок на косе згинання

Цифри шифру						
Перша	Друга			Третя		
Номер схеми	F , кН	M , кН·м	q , кН/м	a , м	b , м	Номер перерізу
0	30	20	10	1,0	2,0	0
1	25	15	20	2,0	1,0	1
2	20	30	15	2,2	1,5	2
3	22	25	12	1,8	2,6	3
4	26	10	8	3,0	2,5	4
5	15	22	6	1,5	2,0	5
6	18	18	14	1,8	2,4	6
7	10	12	22	2,8	2,0	7
8	12	14	24	1,0	3,0	8
9	28	24	25	1,5	1,5	9

9.3 Контрольні запитання за темою 9

1. Який випадок згинання називається косим згинанням?
2. Чи можливий косий вигин при чистому згинанні?
3. Який порядок підбору перерізу при косому згинанні?
4. В яких точках поперечного перерізу виникають найбільші напруження при косому згинанні?
5. Як знаходиться положення площини дії повного згинального моменту?
6. Як знаходиться положення нейтральної лінії?
7. Чи може випробовувати косо згинання балка круглого, квадратного, прямокутного перетинів?

10 ЗГИНАННЯ З КРУЧЕННЯМ ВАЛІВ КРУГЛОГО ПОПЕРЕЧНОГО ПЕРЕРІЗУ

Згинання з крученням – випадок складної деформації, який часто зустрічається в розрахунковій практиці. У машинобудівних конструкціях характерним прикладом є вали різних машин. Сили, що діють на вали – тиск зубчастих коліс в редукторах, натяг ременів, власна вага валу та шківів і т.д. – викликають у поперечних перерізах валу такі внутрішні силові фактори:

- крутний момент $M_{кр}$;
- згинальний момент M_x ;
- поперечну силу Q_y у вертикальній площині;
- згинальний момент M_y ;
- поперечну силу Q_y в горизонтальній площині.

Таким чином, в будь-якому поперечному перерізі одночасно виникають нормальні напруження від згинання у двох взаємно перпендикулярних площинах, а також дотичні напруження від кручення та згинання. Для розрахунку валу в першу чергу необхідно визначити його небезпечні перерізи. Для цього будуються епюри згинальних моментів M_x , M_y і крутного моменту $M_{кр}$.

Навантаження F_i , що діють на вал, розкладаються на вертикальні F_{iy} і горизонтальні F_{ix} складові, після чого будуються епюри M_x , M_y . При вигині круглого валу в кожному його перерізі має місце пряме згинання під дією результуючого згинального моменту:

$$M_{из} = \sqrt{M_x^2 + M_y^2} .$$

Будуються епюри $M_{зг}$, $M_{кр}$ і визначається небезпечний переріз валу. У небезпечному перерізі необхідно визначити небезпечні точки.

Відомо, що при згинанні максимальні нормальні напруження виникають в крайніх, найбільш віддалених від нейтральної лінії волокнах:

$$\sigma_{\max} = M_{из} / W_x .$$

В цих же волокнах діють і максимальні дотичні напруження від кручення:

$$\tau_{\max} = \frac{M_{кр}}{W_{\rho}} = \frac{M_{кр}}{2W_x} .$$

Таким чином, найбільші напруження виникають у точках, найбільш віддалених від нейтральної лінії М і N (рис. 10.1), а виділений поблизу небезпечної точки М нескінченно малий елемент знаходиться в умовах плоского напруженого стану (рис. 10.2).

Тоді за третьою теорією міцності можна записати:

$$\sigma_1 - \sigma_3 \leq [\sigma]; \quad \sigma_{1,3} = \sigma_{\frac{\max}{\min}} = \frac{\sigma_{из}}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{\sigma_{из}^2 + 4\tau_{кр}^2};$$

$$\sigma_{1,3} = \frac{M_{из}}{2W_x} \pm \frac{1}{2} \sqrt{\frac{M_{из}^2}{W_x^2} + \frac{M_{кр}^2}{W_x^2}}; \quad \sigma_1 - \sigma_3 = \sqrt{M_{из}^2 + M_{кр}^2} / W_x \leq [\sigma],$$

Тут d – діаметр валу, W_x – осьовий момент опору:

$$W_x = \frac{I_x}{d/2} = \frac{\pi d^3}{32} \approx 0,1d^3;$$

Таким чином, діаметр валу, підібраний за третьою теорією міцності, обчислюється за формулою:

$$d = \sqrt[3]{\frac{W_x}{0,1}}; \quad W_x \geq \frac{\sqrt{M_{из}^2 + M_{кр}^2}}{[\sigma]} .$$

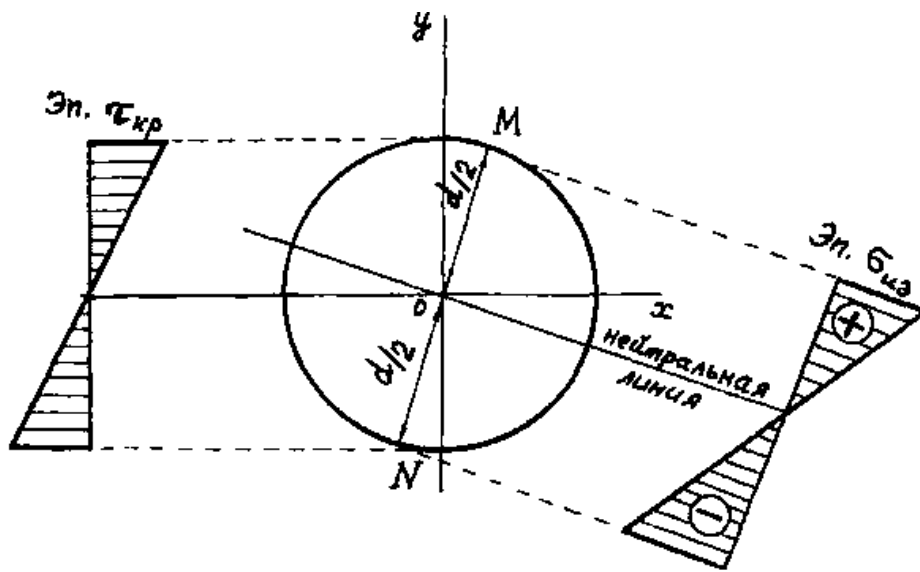


Рисунок 10.1 – Розподілення напружень за перерізом валу

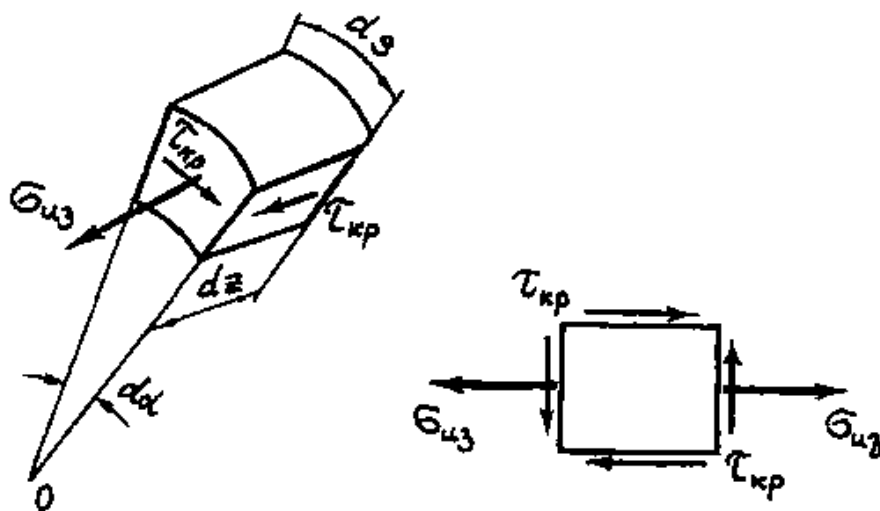


Рисунок 10.2 – Напружений стан елемента матеріалу валу при косому згинанні

10.1 Проектування валу при згинанні з крученням

На вал (рис. 10.3, а) круглого поперечного перерізу насаджені три шківів: один ведучий $D_1 = 0,95$ м, два інших $D_2 = 0,7$ м і $D_3 = 0,6$ м – ведені. Ведучий шків передає потужність $N = 30$ кВт при частоті обертання $n = 300$ об/хв. Гранично допустиме напруження (межу міцності) прийняти рівним $[\sigma] = 60$ МПа, а співвідношення між зусиллями (рис. 10.3, б) $T_i = 2 \cdot t_i$.

Потрібно підібрати діаметр валу за третьою теорією міцності.

Власна вага матеріалу валу не враховується.

Розрахункові схеми та вихідні дані для виконання індивідуального завдання самостійної роботи наведені в п. 10.2, табл. 10.1.

За потужністю та частотою обертання визначаються зовнішні крутні моменти, що діють на вал:

$$m_i = 9550 \frac{N_i}{n},$$

де m_i – зовнішній крутний момент, Н·м;

N_i – потужність, кВт;

n – частота обертання, об/хв;

$$m_1 = 9550 \frac{N}{n} = 9550 \frac{30}{300} = 955 \text{ Н·м};$$

$$m_2 = 9550 \frac{0,5N}{n} = 9550 \frac{0,5 \cdot 30}{300} = 477,5 \text{ Н·м};$$

$$m_3 = 9550 \frac{0,5N}{n} = 477,5 \text{ Н·м}.$$

Визначаються окружні зусилля на шківів за формулою:

$$m_i = (T_i - t_i) \frac{D_i}{2}; \quad T_i = 2t_i;$$

$$m_i = (2t_i - t_i) \frac{D_i}{2} = \frac{t_i D_i}{2}; \quad t_i = \frac{2m_i}{D_i}.$$

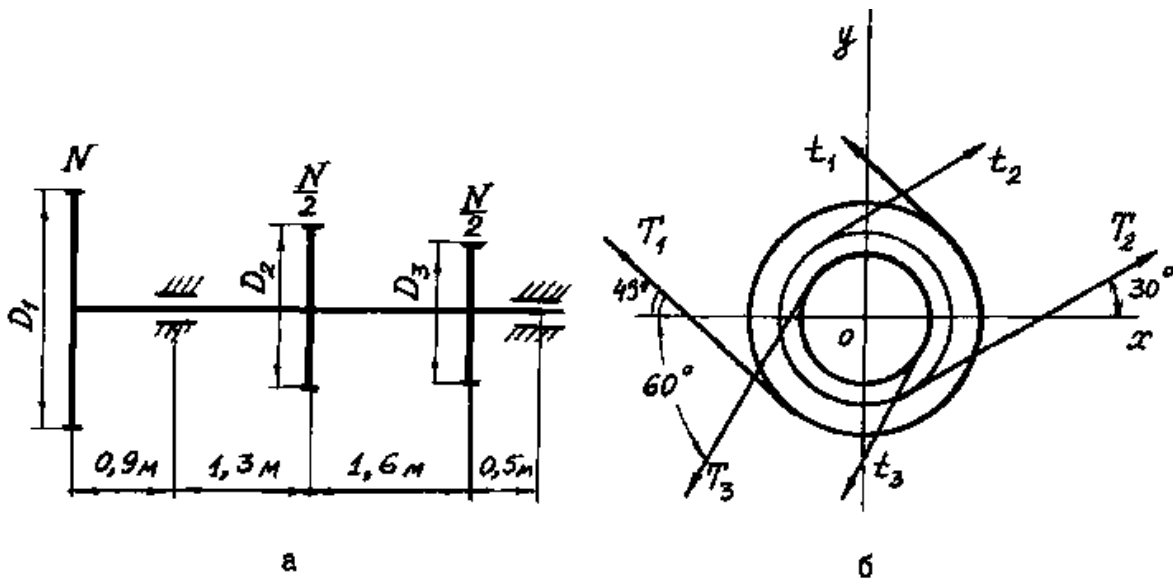


Рисунок 10.3 – Розрахункова схема валу (а) та схема зусиль (б)

Таким чином, можна одержати:

$$t_1 = \frac{2 \cdot 955}{0,95} = 2,01 \text{ кН}; \quad t_2 = \frac{2 \cdot 477,5}{0,7} = 1,36 \text{ кН}; \quad t_3 = \frac{2 \cdot 477,5}{0,6} = 1,59 \text{ кН}.$$

Визначається тиск на вал з боку кожного шківa, при цьому знайдені сили переносяться на вісь валу:

$$F_1 = T_1 + t_1 = 3t_1 = 3 \cdot 2,01 = 6,03 \text{ кН};$$

$$F_2 = 3t_2 = 3 \cdot 1,36 = 4,09 \text{ кН};$$

$$F_3 = 3t_3 = 3 \cdot 1,59 = 4,77 \text{ кН}.$$

Знайдені сили розкладаються на вертикальні F_{iy} і горизонтальні F_{ix} складові (рис. 10.4):

$$F_{1y} = F_1 \sin 45^\circ = 6,03 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 4,26 \text{ кН};$$

$$F_{1x} = F_1 \cos 45^\circ = 6,03 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 4,26 \text{ кН};$$

$$F_{2y} = F_2 \sin 30^\circ = 4,09 \cdot 0,5 = 2,05 \text{ кН};$$

$$F_{2x} = F_2 \cos 30^\circ = 4,09 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 3,54 \text{ кН};$$

$$F_{3y} = F_3 \sin 60^\circ = 4,77 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 4,13 \text{ кН};$$

$$F_{3x} = F_3 \cos 60^\circ = 4,77 \cdot 0,5 = 2,39 \text{ кН}.$$

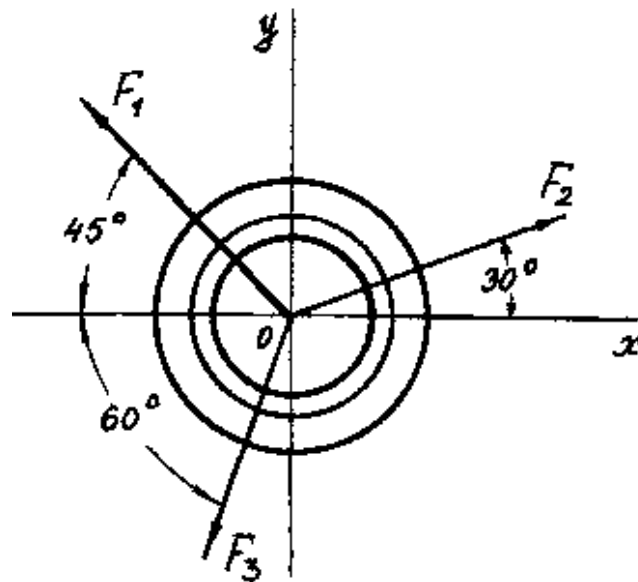


Рисунок 10.4 – Напрямки дії зусиль по відношенню до головних осей

Будуються епюра крутних моментів і епюри згинальних моментів окремо від вертикальних і горизонтальних навантажень.

Показується схема для розрахунку на кручення та методом перерізів будується епюра $M_{кр}$ (рис. 10.5, а, б).

Ділянка I ($0 \leq z \leq 2,2$ м):

$$M_{кр}^I = -m_1 = -0,96 \text{ кН}\cdot\text{м}.$$

Ділянка II ($2,2 \text{ м} \leq z \leq 3,8 \text{ м}$):

$$M_{\text{кр}}^{\text{II}} = -m_1 + m_2 = -0,96 + 0,48 = -0,48 \text{ кН}\cdot\text{м}.$$

Ділянка III ($3,8 \text{ м} \leq z \leq 4,3 \text{ м}$):

$$M_{\text{кр}}^{\text{III}} = -m_1 + m_2 + m_3 = -0,96 + 0,48 + 0,48 = 0.$$

Показується розрахункова схема балки при згинанні у вертикальній площині, визначаються реакції в опорах В і Е (рис. 10.5, в):

$$\Sigma M_{i(B)} = 0; \quad F_{1y} \cdot 0,9 - F_{2y} \cdot 1,3 + F_{3y}(1,3 + 1,6) + Y_E(1,3 + 1,6 + 0,5) = 0;$$

$$Y_E = \frac{1}{3,4}(1,3 \cdot 2,05 - 0,9 \cdot 4,26 - 2,9 \cdot 4,13) = -3,87 \text{ кН};$$

$$\Sigma M_{i(E)} = 0; \quad F_{1y} \cdot 4,3 - Y_B \cdot 3,4 + F_{2y} \cdot 2,1 - F_{3y} \cdot 0,5 = 0;$$

$$Y_B = \frac{1}{3,4}(4,3 \cdot 4,26 + 2,1 \cdot 2,05 - 4,13 \cdot 0,5) = 6,05 \text{ кН}.$$

Проектуючи всі сили на вертикальну вісь, виконується перевірка:

$$\Sigma F_{iy} = 0; \quad F_{1y} + F_{2y} - Y_B - F_{3y} - Y_E = 0;$$

$$4,26 + 2,05 - 6,05 - 4,13 - (-3,87) = 0.$$

Визначаються згинальні моменти на ділянках, і будується еюра $M_x(z)$ (рис. 10.5, г):

Ділянка I ($0 \leq z \leq 0,9 \text{ м}$)

$$M_x^I(z) = F_{1y} \cdot z; \quad M_x^I(0) = 0, \quad M_x^I(0,9) = 4,26 \cdot 0,9 = 3,83 \text{ кН}\cdot\text{м}.$$

Ділянка II ($0,9 \text{ м} \leq z \leq 2,2 \text{ м}$)

$$M_x^{\text{II}}(z) = F_{1y} \cdot z - Y_B(z - 0,9);$$

$$M_x^{\text{II}}(0,9) = 3,83 \cdot \text{кН} \cdot \text{м}; \quad M_x^{\text{II}}(2,2) = 4,26 \cdot 2,2 - 6,05 \cdot (2,2 - 0,9) = 1,52 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

Ділянка III ($0 \leq z \leq 0,5 \text{ м}$)

$$M_x^{\text{III}}(z) = -Y_E \cdot z; \quad M_x^{\text{III}}(0,5) = -(-3,87) \cdot 0,5 = 1,94 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

Ділянка IV ($0,5 \text{ м} \leq z \leq 2,1 \text{ м}$)

$$M_x^{\text{IV}}(z) = -Y_E \cdot z - F_{3y}(z - 0,5); \quad M_x^{\text{IV}}(0,5) = 1,94;$$

$$M_x^{\text{IV}}(2,1) = -(-3,87) \cdot 2,1 - 4,13 \cdot (2,1 - 0,5) = 1,52 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

Показується розрахункова схема балки в горизонтальній площині, визначаються реакції в опорах (рис. 10.5, д):

$$\sum M_{i(B)} = 0; \quad F_{1x} \cdot 0,9 + F_{2x} \cdot 1,3 + X_E \cdot 3,4 - F_{3x} \cdot 2,9 = 0;$$

$$X_E = \frac{1}{3,4} (2,9 \cdot 2,39 - 0,9 \cdot 4,26 - 1,3 \cdot 3,54) = -0,45 \text{ кН};$$

$$\sum M_{i(E)} = 0; \quad F_{1x} \cdot 4,3 + F_{3x} \cdot 0,5 - X_B \cdot 3,4 - F_{2x} \cdot 2,1 = 0;$$

$$X_B = \frac{1}{3,4} (4,3 \cdot 4,26 + 0,5 \cdot 2,39 - 2,1 \cdot 3,54) = 3,55 \text{ кН}.$$

Здійснюється перевірка:

$$\sum F_{ix} = 0; \quad -F_{1x} - F_{3x} + X_B + F_{2x} + X_E = 0$$

$$-4,26 - 2,39 + 3,55 + 3,54 - 0,45 = 0.$$

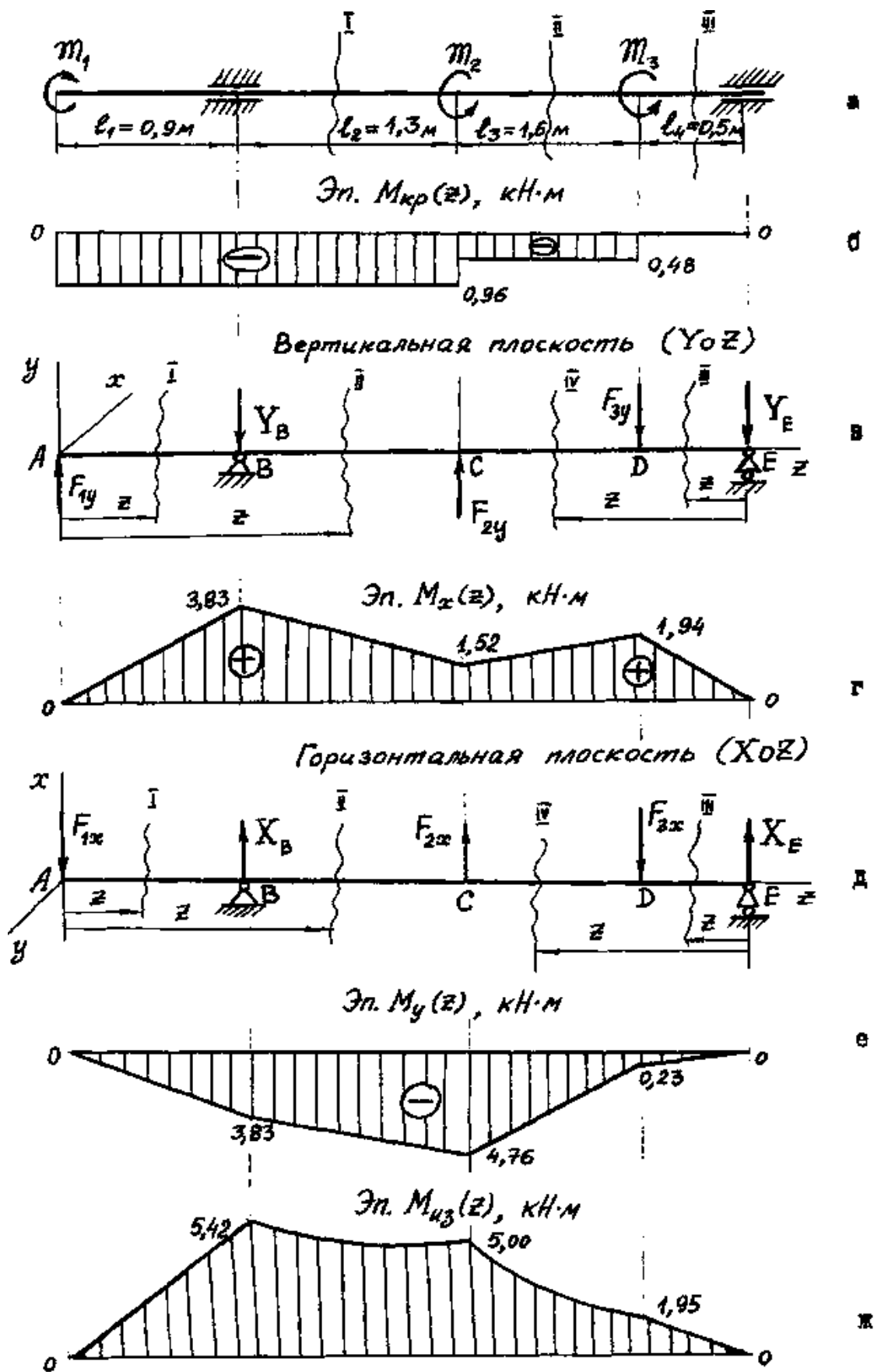


Рисунок 10.5 – Розрахунок валу

Визначаються згинальні моменти в горизонтальній площині:

Ділянка I ($0 \leq z \leq 0,9$ м)

$$M_y^I(z) = -F_{1x} \cdot z;$$

$$M_y^I(0) = 0, \quad M_y^I(0,9) = -4,26 \cdot 0,9 = -3,83 \text{ кН}\cdot\text{м}.$$

Ділянка II ($0,9 \text{ м} \leq z \leq 2,2$ м)

$$M_y^{II}(z) = -F_{1x} \cdot z + X_B(z - 0,9); \quad M_y^{II}(0,9) = -3,83 \cdot \text{кН}\cdot\text{м};$$

$$M_y^{II}(2,2) = -4,26 \cdot 2,2 + 3,55 \cdot (2,2 - 0,9) = -4,76 \text{ кН}\cdot\text{м}.$$

Ділянка III ($0 \leq z \leq 0,5$ м)

$$M_y^{III}(z) = X_E \cdot z;$$

$$M_y^{III}(0) = 0, \quad M_y^{III}(0,5) = -0,45 \cdot 0,5 = -0,23 \text{ кН}\cdot\text{м}.$$

Ділянка IV ($0,5 \text{ м} \leq z \leq 2,1$ м)

$$M_y^{IV}(z) = X_E z - F_{3x}(z - 0,5); \quad M_y^{IV}(0,5) = -0,23 \text{ кН}\cdot\text{м};$$

$$M_y^{IV}(2,1) = -0,45 \cdot 2,1 - 2,39 \cdot 1,6 = -4,76 \text{ кН}\cdot\text{м}.$$

За отриманими результатами будується епюра $M_y(z)$ (рис. 10.5, е).

За знайденим значенням в характерних перетинах обчислюються результуючі згинальні моменти M_{3z} за формулою:

$$\dot{I}_{3z} = \sqrt{\dot{I}_{\bar{o}}^2 + \dot{I}_{\bar{o}'}^2}.$$

Переріз А, Е: $M_{32} = 0$.

Переріз В: $M_{32} = 5,42 \text{ кН}\cdot\text{м}$.

Переріз С: $M_{32} = 5,00 \text{ кН}\cdot\text{м}$.

Переріз D: $M_{32} = 1,95 \text{ кН}\cdot\text{м}$.

За отриманими результатами будується епюра $M_{32}(z)$, що має нелінійний характер (рис. 10.5, ж).

За третьою теорією міцності визначається діаметр валу. Небезпечним є переріз на опорі В, в якому $M_{кр} = -0,96 \text{ кН}\cdot\text{м}$, $M_{32} = 5,42 \text{ кН}\cdot\text{м}$ (рис. 1.18, б, ж). З умови міцності при згинанні з крутінням визначається осьовий момент опору:

$$W_x \geq \frac{\sqrt{\dot{I}_{\xi\xi}^2 + \dot{I}_{\eta\eta}^2}}{[\sigma]} = \frac{\sqrt{5,42^2 + 0,96^2}}{60 \cdot 10^3} = 9,18 \cdot 10^{-5} \text{ м}^3 = 91,8 \text{ см}^3,$$

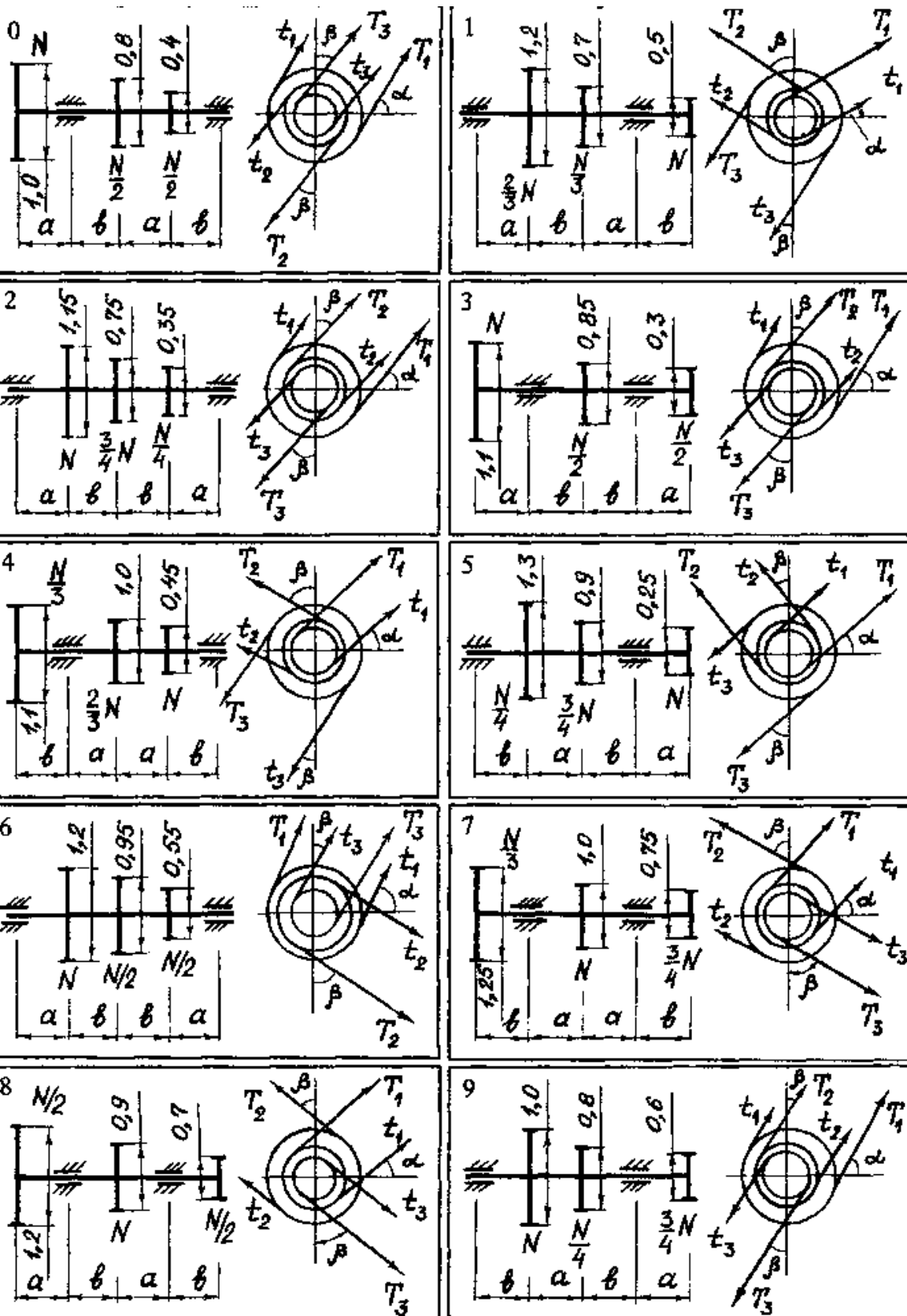
тоді діаметр валу:

$$d \geq \sqrt[3]{\frac{W_x}{0,1}} = \sqrt[3]{\frac{91,8}{0,1}} = 9,71 \text{ см}.$$

Округливши до найближчого стандартного діаметра, приймається:

$$d = 10 \text{ см}.$$

10.2 Завдання до самостійної роботи за темою 10



Таблиця 10.1 – Вихідні дані до розрахунку валів на складний опір

Номер шифру						
Перша	Друга			Третя		
Номер схеми	N , кВт	n , об/мин	α , град	a , м	b , м	β , град
0	20	900	0	1,0	2,0	30
1	10	500	30	1,5	1,5	45
2	30	800	45	2,0	3,0	60
3	40	700	60	0,5	1,0	0
4	50	600	0	0,5	0,75	30
5	60	400	30	1,2	2,2	45
6	70	200	45	0,8	1,4	60
7	80	300	60	1,8	1,2	0
8	90	1200	0	1,6	1,8	30
9	100	1000	30	2,0	1,0	45

10.3 Контрольні запитання за темою 10

1. Які напруження виникають в поперечному перерізі стержня при згинанні з крученням?
2. Як знаходяться небезпечні перерізи стержня при згинанні з крученням?
3. В яких точках круглого поперечного перерізу виникають найбільші напруження при згинанні з крученням?
4. Чому зазвичай не враховуються дотичні напруження від згинання при спільній дії згинання та кручення?

11 СТІЙКІСТЬ СТИСНУТИХ СТЕРЖНІВ

Пружна рівновага буде стійкою, якщо деформоване тіло при будь-якому малому відхиленні від стану рівноваги прагне повернутися до первісного стану і повертається до нього після видалення зовнішнього впливу, який порушив початкове рівноважний стан. Пружна рівновага нестійка, якщо деформоване тіло, будучи виведеним з нього будь-яким впливом, набуває прагнення продовжувати деформуватися в напрямку даного йому відхилення і після видалення впливу в вихідне стан не повертається. Між цими станами рівноваги існує перехідний стан, який називається критичним, при якому деформоване тіло може зберегти первісну форму, але може й втратити її від самого незначного впливу.

Стійкість або нестійкість форми рівноваги пружного тіла залежить від його розмірів, матеріалу, величин і напрямків сил. Наприклад, прямолінійна форма рівноваги центрально стиснутого стержня стійка при малих значеннях стискаючої сили (рис. 11.1, а) і нестійка, коли величина цієї сили перевищує певне значення (рис. 11.1, в). Найменше значення центрально прикладеної стискаючої сили F , при якому прямолінійна форма рівноваги стержня стає нестійкою, називається критичною силою і позначається $F_{кр}$. При дії цієї сили, відхиливши стержень в положення, показане на рис. 11.1, б пунктиром, стержень може не повернутися в первісне положення.

Втрата стійкості прямолінійної форми рівноваги центрально стиснутого стержня називається поздовжнім згинанням; це найбільш проста і в той же час одна з найбільш важливих інженерних задач, пов'язаних із проблемою стійкості.

Для забезпечення запасу стійкості необхідно, щоб задовольнялася умова:

$$F \leq [F] = \frac{F_{\text{ед}}}{n_y},$$

де F – діюча стискаюча сила;

$[F]$ – її гранично допустиме значення;

n_y – коефіцієнт запасу стійкості.

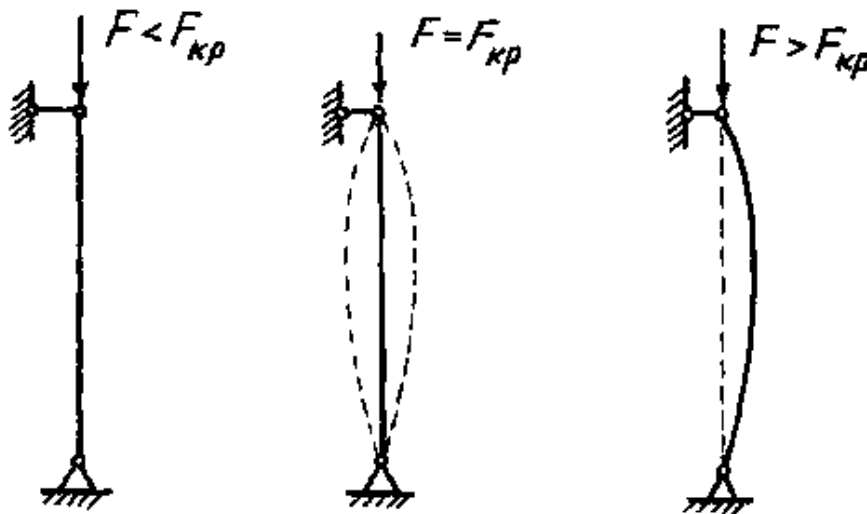


Рисунок 11.1 – Форми рівноваги

Задачу з визначення критичної сили вперше вирішив Л. Ейлер в 1744 р. У загальному вигляді, з урахуванням різних випадків закріплення кінців стержня, критичну силу можна описати так:

$$F_{\text{ед}} = \frac{\pi^2 EI_{\text{min}}}{(\mu l)^2},$$

де E – модуль поздовжньої пружності;

I_{min} – найменший з осьових момент інерції перерізу стержня;

μ – коефіцієнт приведеної довжини (умов закріплення стержня);

$\mu \cdot l$ – приведена довжина стержня.

Сила $F_{кр}$, визначена за цією формулою, називається також ейлеровою критичною силою, а коефіцієнт μ дозволяє будь-який випадок закріплення стержня звести до випадку стержня з шарнірно закріпленими кінцями, який прийнято називати основним. Для чотирьох випадків закріплення, які найбільш часто зустрічаються, значення μ представлені на рис. 11.2.

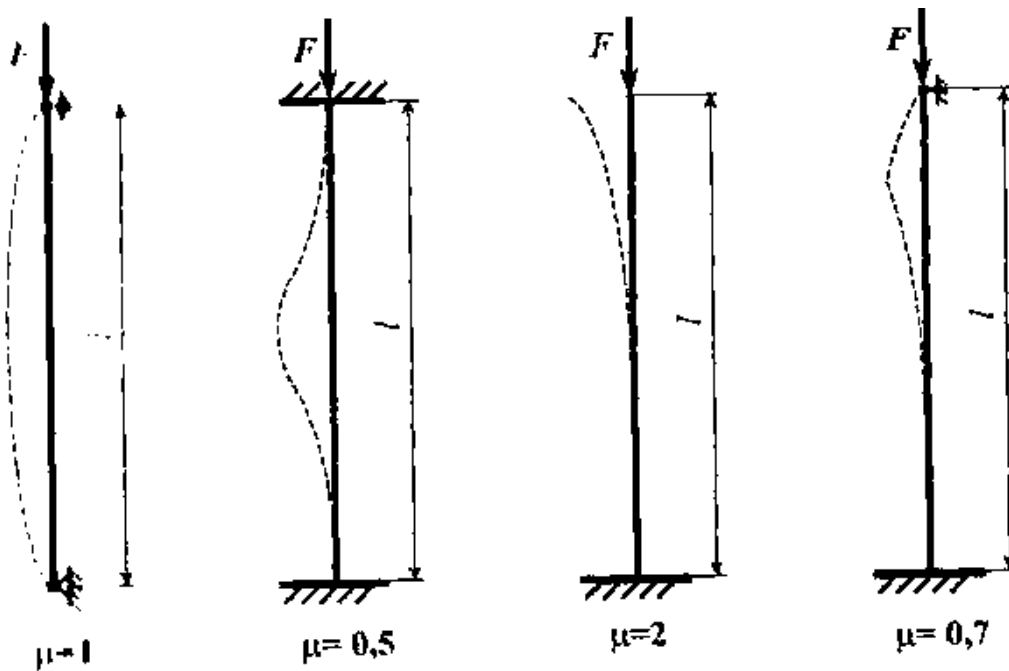


Рисунок 11.2 – Вплив умов закріплення кінців стержня

Критичне напруження в поперечному перерізі дорівнює:

$$\sigma_{\epsilon\delta} = \frac{F_{\epsilon\delta}}{A} = \frac{\pi^2 EI_{\min}}{(\mu l)^2 A} = \frac{\pi^2 E i_{\min}^2}{(\mu l)^2},$$

де $i_{\min}^2 = I_{\min} / A$ – квадрат мінімального радіуса інерції.

Ввівши безрозмірну величину, яка називається гнучкістю:

$$\lambda = \frac{\mu l}{i_{\min}},$$

можна отримати формулу:

$$\sigma_{\epsilon\delta} = \frac{\pi^2 E}{\lambda^2}.$$

Формула Ейлера отримана на основі припущення про те, що напруження в матеріалі стержня, викликані критичною силою, не перевищують межі пропорційності:

$$\sigma_{\epsilon\delta} = \frac{\pi^2 E}{\lambda^2} \leq \sigma_{i\delta},$$

звідки випливає вираження для граничної гнучкості стержня, при якій формула Ейлера ще може бути застосована:

$$\lambda_{i\delta\ddot{a}\ddot{a}} = \sqrt{\frac{\pi^2 E}{\sigma_{i\delta}}}.$$

Для сталі Ст3 при $E = 2,1 \cdot 10^5$ МПа, $\sigma_{m\ddot{a}} \approx 200$ МПа:

$$\lambda_{i\delta\ddot{a}\ddot{a}} = \sqrt{\frac{3,14^2 \cdot 2,1 \cdot 10^5}{200}} \approx 100,$$

тобто для всіх $\lambda \geq \lambda_{пред} = 100$ діє формула Ейлера.

Якщо $40 \leq \lambda \leq 100$, то критичне напруження для стержнів з маловуглецевої сталі розраховується за емпіричною формулою Ф. С. Ясинського

$$\sigma_{\epsilon\delta} = a - b\lambda,$$

де a і b – коефіцієнти властивостей матеріалу, які визначаються експериментально (для Ст3 $a = 310$ МПа, $b = 1,14$ МПа).

При гнучкості $0 \leq \lambda \leq 40$ напруження вважається приблизно постійним і таким, що дорівнює межі текучості. В цьому випадку стержень розраховується тільки на міцність:

$$\sigma_{\epsilon\delta} = \sigma_T = 240 \text{ МПа.}$$

На рис. 11.3 приведена діаграма, що зображує залежність критичного напруження від гнучкості стержня для сталі Ст3.

Знаючи величину критичного напруження для стержнів малої і середньої гнучкості, критичну силу можна обчислювати за формулою:

$$F_{\epsilon\delta} = \sigma_{\epsilon\delta} \cdot A.$$

Критичне напруження для центрально-стиснутого стержня представляє таку ж небезпеку, як межа текучості для пластичних матеріалів, або як межа міцності для крихких матеріалів. Тому при вирішенні питання про стійкість стержня не можна допускати виникнення в ньому критичного напруження. Напруження, що допускається на стійкість дорівнює:

$$[\sigma]_{\delta} = \frac{\sigma_{\epsilon\delta}}{n_{\delta}},$$

де n_y – коефіцієнт запасу на стійкість (завжди приймається більше основного коефіцієнта запасу на міцність при стисненні, тобто $n_y > n$).

Допустиме напруження $[\sigma]_y$ можна виразити через основне допустиме напруження на стиск $[\sigma]$:

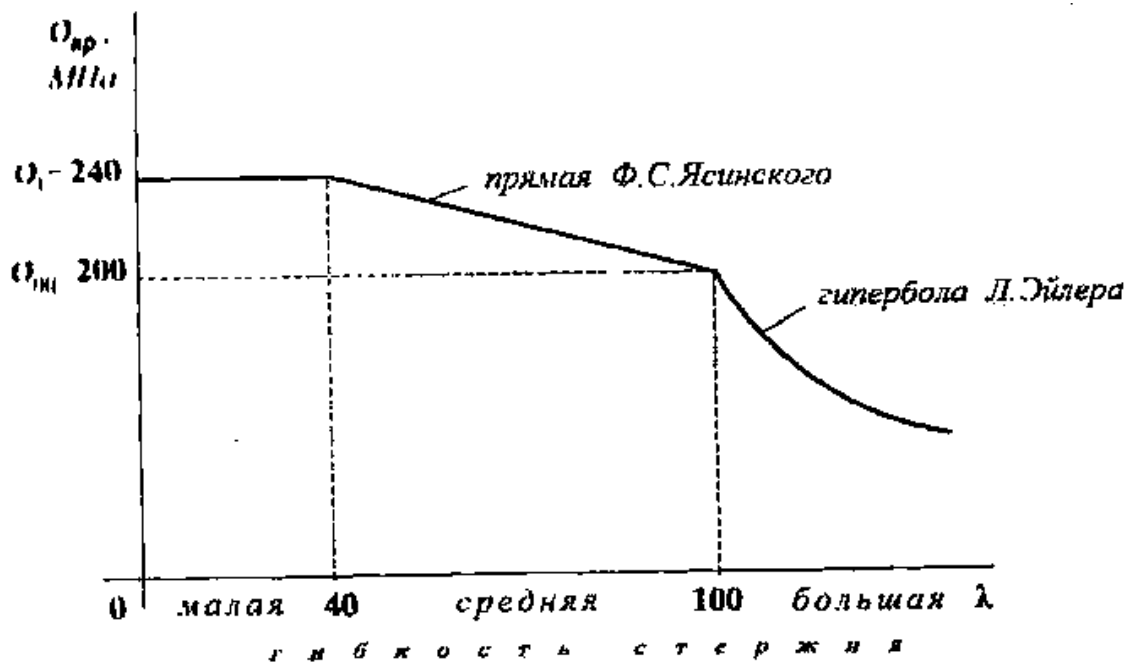


Рисунок 11.3 – Графік повних критичних напружень

$$\frac{[\sigma]_{\delta}}{\sigma} = \frac{\sigma_{\delta\delta}}{n_{\delta}} \cdot \frac{n_0}{\sigma_0}; \quad [\sigma]_{\delta} = \frac{\sigma_{\delta\delta}}{\sigma_0} \cdot \frac{n_0}{n_{\delta}} \cdot [\sigma];$$

де $\sigma_0 = \sigma_T$, $n_0 = n_T$ – для пластичних матеріалів;

$\sigma_0 = \sigma_a$, $n_0 = n_a$ – для крихких матеріалів.

Якщо позначити

$$\frac{\sigma_{\delta\delta}}{\sigma_0} \cdot \frac{n_0}{n_{\delta}} = \varphi \leq 1,$$

то отримаємо

$$[\sigma]_{\delta} = \varphi [\sigma].$$

Тут φ – коефіцієнт зменшення основного допустимого напруження при поздовжньому згині (його значення в залежності від матеріалу і

гнучкості стержня наведені в табл. 11.1).

Таблиця 11.1 – Залежність зміни коефіцієнта зменшення основного допустимого напруження φ від гнучкості λ

Гнучкість	Коефіцієнт φ для			
	сталей: Ст1, Ст2, Ст3 Ст4	сталі Ст5	Сталі підвищеної якості $\sigma_T \geq 320$ МПа	чавуну
0	1,00	1,00	1,00	1,00
10	0,99	0,98	0,97	0,97
20	0,96	0,95	0,95	0,91
30	0,94	0,92	0,91	0,81
40	0,92	0,89	0,87	0,69
50	0,89	0,86	0,83	0,57
60	0,86	0,82	0,79	0,44
70	0,81	0,76	0,72	0,34
80	0,75	0,70	0,65	0,26
90	0,69	0,62	0,55	0,20
100	0,60	0,51	0,43	0,16
110	0,52	0,43	0,35	–
120	0,45	0,37	0,30	–
130	0,40	0,33	0,26	–
140	0,36	0,29	0,23	–
150	0,32	0,26	0,21	–
160	0,29	0,24	0,19	–
170	0,26	0,21	0,17	–
180	0,23	0,19	0,15	–
190	0,21	0,17	0,14	–
200	0,19	0,16	0,13	–

Умова стійкості стиснутих стержнів має вигляд:

$$[\sigma] \leq [\sigma]_o; \quad \sigma = \frac{F}{A} \leq \varphi [\sigma].$$

Розглянемо два види розрахунку на стійкість стиснутих стержнів: перевірочний і проектувальний.

11.1 Визначення критичної стискаючої сили при поздовжньому згинанні

Для поздовжньо стисненого сталевого стержня при заданому поперечному перерізі і довжині необхідно визначити:

- 1) критичну силу і допустиме навантаження;
- 2) коефіцієнт запасу на стійкість.

У розрахунках прийняти: матеріал стержня – сталь Ст3 з допустимим напруженням $[\sigma] = 160$ МПа та модулем пружності $E = 2,1 \cdot 10^5$ МПа, відстань між профілями $a^* = 1$ см.

Розрахункові схеми та вихідні дані для виконання індивідуального завдання самостійної роботи наведені в п. 11.3, табл. 11.2.

Стержень, що розглядається, показаний на рис. 11.4, а, з поперечним перерізом, що складається з двох кутників № 16, для кожного з яких відповідно до сортаменту

$$I_x = I_y = 774,24 \text{ см}^4; \quad A = 31,43 \text{ см}^2; \quad z_0 = 4,3 \text{ см.}$$

Довжина стержня $l = 4$ м; $\mu = 2$.

Визначаються головні центральні моменти інерції (рис. 11.4, б). З огляду на, що відстань між осями x_c і x_1 дорівнює нулю, а також враховуючи симетрію, можна записати:

$$I_{x_c} = 2I_{x_1} = 2 \cdot 774,24 = 1548,5 \text{ см}^4.$$

Відстань між осями y_c і y_1 дорівнює:

$$a = z_0 + \frac{a^*}{2},$$

$$\lambda = \frac{\mu l}{i_{\min}} = \frac{2 \cdot 400}{4,963} = 161,19.$$

Визначається величина критичної сили. Оскільки виявилось, що даний стержень має велику гнучкість $\lambda > \lambda_{\text{гн}} = 100$, то критичну силу необхідно знаходити за формулою Ейлера:

$$F_{\text{ед}} = \frac{\pi^2 EI_{\min}}{(\mu l)^2} = \frac{3,14^2 \cdot 2,1 \cdot 10^5 \cdot 1548,5 \cdot 10^{-8}}{(2 \cdot 4)^2} = 0,5015 \text{ МН} = 501,5 \text{ кН}.$$

З табл. 11.1 визначається коефіцієнт зменшення основного допустимого напруження φ і знаходяться допустиме навантаження і коефіцієнт запасу стійкості.

При лінійної інтерполяції має місце:

$$\varphi = 0,29 - \frac{0,29 - 0,26}{10} \cdot 1,19 = 0,286.$$

$$[F] = A_{\text{нз}} \cdot \varphi [\sigma] = 2 \cdot 31,43 \cdot 10^{-4} \cdot 0,286 \cdot 160 \cdot 10^3 = 287,6 \text{ кН};$$

$$K_y = \frac{F_{\text{ед}}}{[F]} = \frac{501,5}{287,6} = 1,744.$$

11.2 Проектування стиснутого стержня при поздовжньому згинанні

Для поздовжнього стиснутого сталевго стержня при заданих формі поперечного перерізу і схемою навантаження необхідно підібрати з сортаменту розміри та номер прокатного профілю.

Зазор між профілями складеного перерізу прийняти рівним $a^* = 1$ см.

Розрахункові схеми та вихідні дані для виконання індивідуального завдання самостійної роботи наведені в п. 11.3, табл. 11.3.

У якості прикладу розглядається стержень, приведений на рис. 11.5, а. Довжина стержня $l = 3,4$ м, сила, що стискає $F = 220$ кН, матеріал – сталь Ст3, коефіцієнт приведення довжини $\mu = 1$.

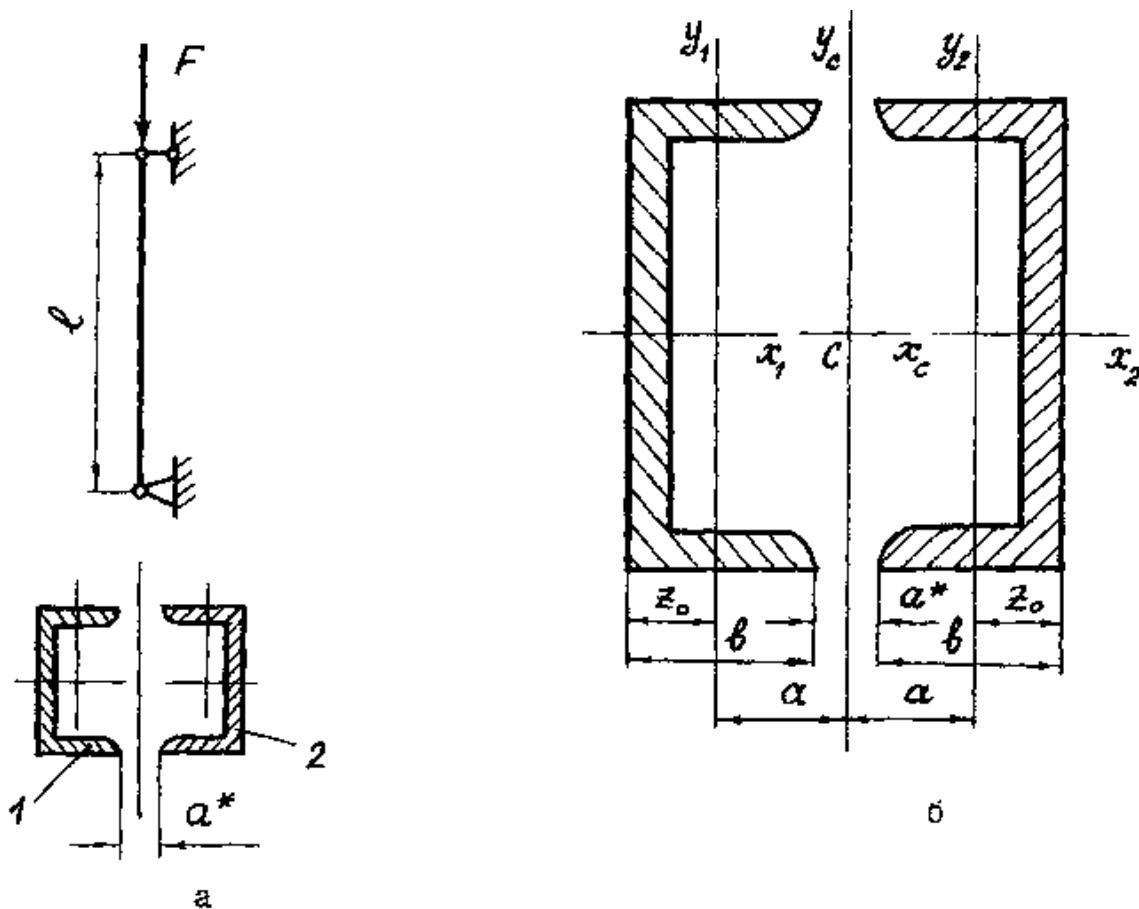


Рисунок 11.5 – Розрахункова та геометрична схеми стержня

Поперечний переріз стиснутого стержня визначається з умови забезпечення стійкості:

$$A^{TP} = \frac{F}{\varphi[\sigma]}.$$

Ця формула містить два невідомих – A і φ , тому рішення задачі виконується методом послідовних наближень. Зазвичай для отримання задовільного рішення необхідно прорахувати три-чотири наближення.

Перше наближення.

Приймається середнє значення φ , тобто $\varphi_1 = 0,5$.

Необхідна площа поперечного перерізу дорівнює:

$$A^{TP} = \frac{F}{\varphi_1[\sigma]} = \frac{220}{0,5 \cdot 160 \cdot 10^3} = 27,5 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2 = 27,5 \text{ см}^2,$$

тоді площа одного швелера:

$$A_{\varphi \hat{a}}^{TP} = A^{TP} / 2 = 27,5 / 2 = 13,75 \text{ см}^2.$$

За сортаментом приймається швелер № 14, у якого:

$$A_{\text{шв}} = 15,60 \text{ см}^2; \quad h = 14 \text{ см}; \quad b = 5,8 \text{ см};$$

$$I_x = 491 \text{ см}^4; \quad I_y = 45,4 \text{ см}^4; \quad z_0 = 1,67 \text{ см}.$$

Визначаються головні центральні моменти інерції, при цьому враховується, що осі x_c, x_1, x_2 збігаються, а між віссю u_c і осями y_1, y_2 відстань:

$$a = b - z_o + \frac{a^*}{2}.$$

$$I_{x_c} = 2I_{x_1} = 2 \cdot 491 = 982 \text{ см}^4;$$

$$I_{y_c} = 2[I_{y_1} + a^2 A] = 2[45,4 + (5,8 - 1,67 + 0,5)^2 \cdot 15,6] = 759,6 \text{ см}^4.$$

За розрахунком отримано:

$$I_{y_c} = I_{\min} = 759,6 \text{ см}^4.$$

Мінімальний радіус інерції дорівнює:

$$i_{\min} = \sqrt{\frac{I_{\min}}{2A_{\phi \hat{a}}}} = \sqrt{\frac{759,6}{2 \cdot 15,6}} = 4,934.$$

Гнучкість стрижня:

$$\lambda = \frac{\mu l}{i_{\min}} = \frac{1 \cdot 340}{4,934} = 68,91.$$

З таблиці 11.1 при лінійній інтерполяції має місце значення:

$$\varphi_1' = 0,86 - \frac{0,86 - 0,81}{10} \cdot 8,91 = 0,815 \gg \varphi_1 = 0,5.$$

Друге наближення. Приймається:

$$\varphi_2 = \frac{\varphi_1 + \varphi_1'}{2} = \frac{0,5 + 0,815}{2} = 0,658.$$

Тоді:

$$A^{TP} = \frac{F}{\varphi_2 [\sigma]} = \frac{220}{0,658 \cdot 160 \cdot 10^3} = 20,9 \cdot 10 \text{ м}^2 = 20,9 \text{ см}^2;$$

$$A_{\phi \hat{a}}^{TP} = A^{TP} / 2 = 20,9 / 2 = 10,45 \text{ см}^2.$$

З сортаменту вибирається швелер № 10, для якого:

$$A_{шв} = 10,90 \text{ см}^2; \quad h = 10 \text{ см}; \quad b = 4,6 \text{ см};$$

$$I_x = 174,0 \text{ см}^4; \quad I_y = 20,40 \text{ см}^4; \quad z_0 = 1,44 \text{ см}.$$

Геометричні характеристики складеного перерізу дорівнюють:

$$I_{x_c} = 2I_{x_1} = 2 \cdot 174 = 348 \text{ см}^4;$$

$$I_{y_c} = 2 \left[I_{y_1} + a^2 A \right] = 2 \left[20,4 + (4,6 - 1,44 + 0,5)^2 \cdot 10,9 \right] = 332,8 \text{ см}^4;$$

$$i_{\min} = \sqrt{\frac{I_{\min}}{2A_{\phi \hat{a}}}} = \sqrt{\frac{332,8}{2 \cdot 10,9}} = 3,907 \text{ см}.$$

Гнучкість стержня

$$\lambda = \frac{\mu l}{i_{\min}} = \frac{1 \cdot 340}{3,907} = 87,02.$$

Коефіцієнт зменшення основного допустимого напруження:

$$\varphi'_2 = 0,75 - \frac{0,75 - 0,69}{10} \cdot 7,02 = 0,708 \neq \varphi_2 = 0,658.$$

Розбіжність перевищує 5%.

Третє наближення. Проводяться аналогічні обчислення для

$$\varphi_3 = \frac{\varphi_2 + \varphi'_2}{2} = \frac{0,658 + 0,708}{2} = 0,683.$$

$$A^{TP} = \frac{220}{0,683 \cdot 160 \cdot 10^3} = 20,13 \text{ см}^2;$$

$$A_{\varphi \hat{a}}^{TP} = 20,13 / 2 = 10,065 \text{ см}^2.$$

Тоді за сортаментом знову приймається швелер № 10, для якого:

$$A_{шв} = 10,9 \text{ см}^2; \quad I_{\min} = I_{y_c} = 332,8 \text{ см}^4; \quad i_{\min} = 3,907 \text{ см}; \quad \lambda = 87,02.$$

$$\varphi'_3 = 0,708 \approx \varphi_3 = 0,683.$$

Напруження в стержні дорівнюватимуть:

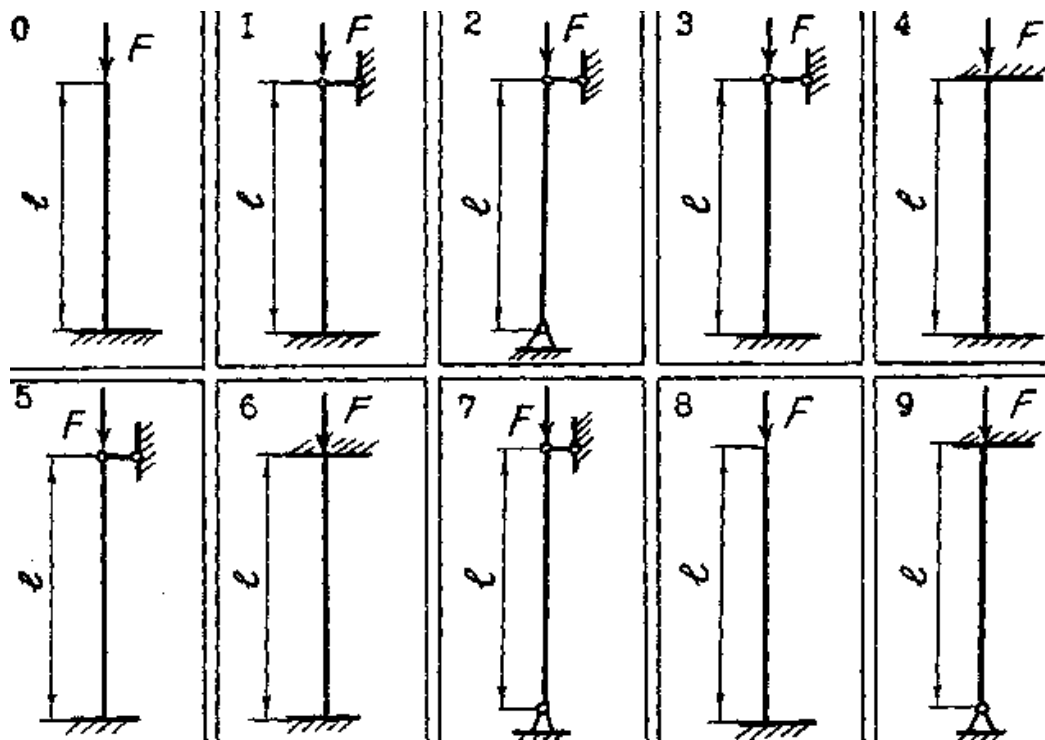
$$\sigma = \frac{F}{\varphi \cdot 2A_{\varphi \hat{a}}} = \frac{220 \cdot 10^{-3}}{0,708 \cdot 2 \cdot 10,9 \cdot 10^{-4}} = 142,54 \text{ МПа} < [\sigma].$$

Недонапруження при остаточно обраному швелері № 10 складе:

$$\frac{142,54 - 160}{160} \cdot 100\% = -10,9\%$$

11.3 Завдання до самостійної роботи за темою 11

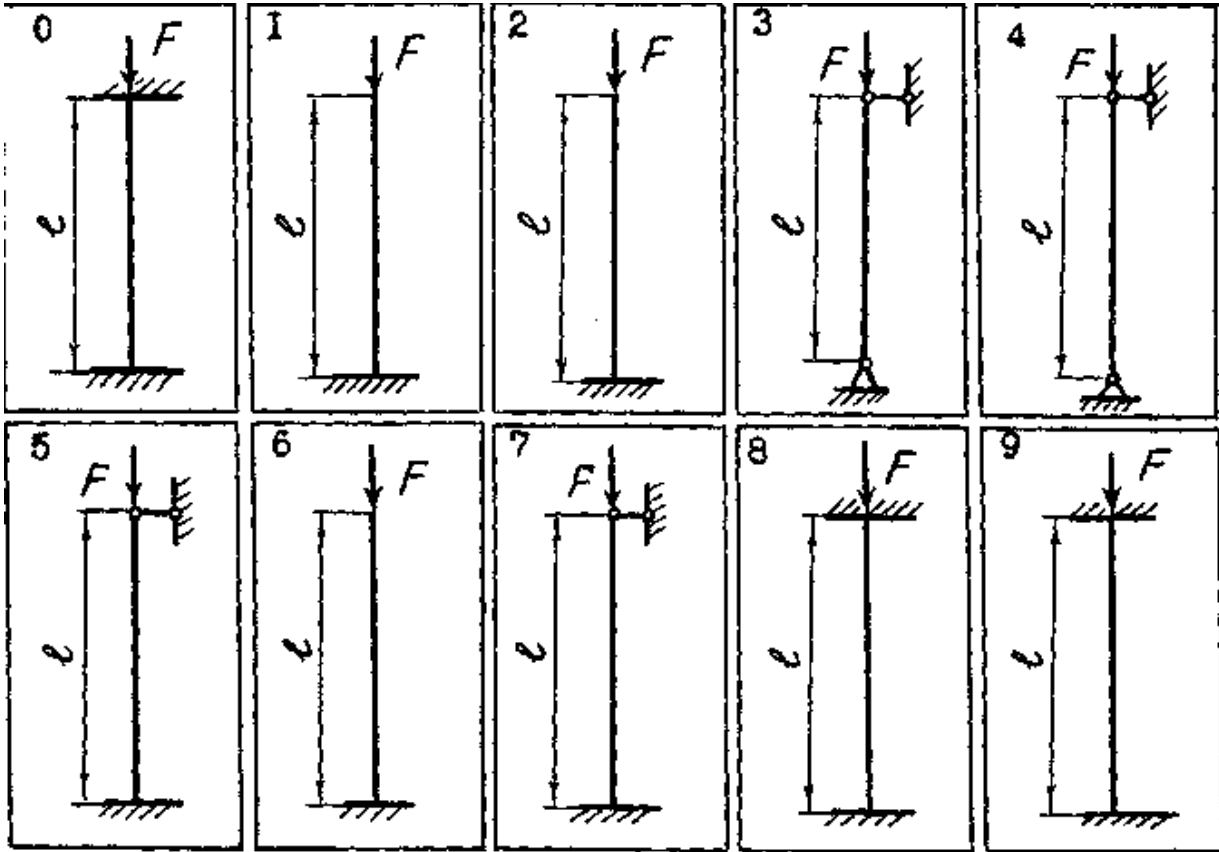
Завдання до визначення критичної сили (п. 11.1):



Таблиця 11.2 – Вихідні дані для визначення критичної сили (п. 11.1)

Перша Номер одиниці	Ц и ф р ы ш и ф р а	
	Вторая	Третья
	$l, \text{ м}$	Поперечное сечение стержня
0	1,5	№ 16
1	1,8	№ 10 (100×10)
2	1,6	№ 12,5 (125×16)
3	2,2	№ 16/10 (160×100×14)
4	3,0	№ 12,5/8 (125×80×10)
5	2,5	№ 25/16 (250×160×20)
6	1,7	№ 27
7	2,7	№ 12,5 (125×16)
8	1,4	№ 14/9 (140×90×10)
9	1,5	№ 20

Завдання до підбору площі перерізу (п. 11.1):



Таблиця 11.3 – Вихідні дані для підбору площі перерізу (п. 11.2)

Порядковий номер стовпа	Порядок $l, \text{ м}$	Цифри шифра	
		$R, \text{ кН}$	Третя Вид поперечного сечення
0	5,0	200	
1	3,8	220	
2	3,0	260	
3	4,2	280	
4	3,5	400	
5	2,8	350	
6	3,8	420	
7	4,0	320	
8	4,5	340	
9	3,0	380	

11.4 Контрольні запитання за темою 11

1. Сталий, нестійкий і критичний стан стержня.
2. Яка сила називається критичною?
3. До чого зводиться розрахунок стержнів на стійкість?
4. За якою формулою знаходиться величина критичної сили?
5. Як зміниться величина критичної сили для стійки круглого перетину при зменшенні діаметра в два рази?
6. Гнучкість стержня. Межі застосовності формули Ейлера.
7. Як враховується вплив способу закріплення кінців стержня?
8. Чому дорівнює коефіцієнт приведення довжини для різних випадків закріплення кінців?
9. Визначення критичної напруги для стержнів великої, середньої і малої гнучкості. Повний графік критичних напружень.
10. Як проводиться підбір перерізу стержня за допомогою коефіцієнта φ ?

ЗАПИТАННЯ ДО ПІДСУМКОВОГО КОНТРОЛЮ ЗНАНЬ

1. Що вивчає опір матеріалів? Головні гіпотези опору матеріалів.
2. Що таке міцність? Яка мета розрахунку на міцність?
3. Що таке жорсткість? Яка мета розрахунку на жорсткість?
4. Що таке стійкість стержнів? В чому полягають розрахунки на стійкість?
5. Що таке розрахункова схема? Для чого вона потрібна? Загальні принципи формування розрахункових схем.
6. Види зовнішніх навантажень, їх моделювання при формуванні розрахункових схем.
7. Внутрішні силові фактори, суть методу їх визначення. Прості види деформації матеріалів.
8. Напруження в точці, їх зв'язок із внутрішніми силовими факторами.
9. Види розрахунків опору матеріалів. Запас міцності, визначення коефіцієнта запасу міцності для різних матеріалів.
10. Види і властивості матеріалів. Випробування зразків різних матеріалів на міцність.
11. Основні механічні характеристики матеріалу, їх визначення та фізичний зміст.
12. Діаграми розтягання (стискання) зразків різних матеріалів, характерні точки та ділянки діаграм.
13. Осьове розтягання (стискання) стержня. Порядок розрахунку.
14. Закон Гука при осьовому розтяганні (стисканні), абсолютне і відносне подовження (укорочення) стержня.
15. Статично невизначувані задачі, ступінь статичної невизначеності системи, послідовність розрахунку таких задач.
16. Статичні моменти площі та моменти інерції плоских перерізів, їх властивості.

17. Які осі є центральними? Які осі є головними центральними осями інерції?

18. Зв'язок між полярним і осьовими моментами інерції. Як визначаються головні моменти інерції?

19. Що таке момент опору плоского перерізу? Що таке радіус інерції плоского перерізу?

20. Що таке напружений стан у точці? Види напруженого стану.

21. Закон парності дотичних напружень, властивість інваріантності нормальних напружень.

22. Як визначаються максимальні дотичні напруження і положення площадок зсуву? Як визначаються напруження в площадках, які повернуті на кут α по відношенню до відомих?

23. Головні площадки і головні напруження. Як визначаються головні площадки і величини головних напружень при плоскому напруженому стані?

24. Узагальнений закон Гука. Відносна і абсолютна зміна об'єму.

25. Теорії міцності, які використовуються в опорі матеріалів.

26. Який вид деформації називається крученням?

27. Як визначається крутячий момент у поперечному перерізі валу? Правило знаків для внутрішніх силових факторів при крученні.

28. Геометричні характеристики перерізу валу при крученні.

29. Які напруження виникають у поперечному перерізі валу при крученні? Як вони визначаються?

30. Умови міцності та жорсткості при крученні.

31. Як знаходяться величини абсолютного і відносного кутів закручування перерізу валу при крученні?

32. Яка деформація називається згинанням? Загальні відомості про плоске поперечне згинання як один з видів простої деформації.

33. Які внутрішні силові фактори діють при чистому плоскому поперечному згинанні?

34. Правило знаків для згинального моменту і поперечної сили при

чистому плоскому поперечному згинанні.

35. Правила контролю правильності побудови епюр поперечних сил і згинальних моментів при плоскому поперечному згинанні.

36. Як знаходиться максимальний згинальний момент при чистому згинанні?

37. Як змінюються нормальні та дотичні напруження по висоті балки при її згинанні?

38. Епюри нормальних і дотичних напружень для простих поперечних перерізів при згинанні.

39. Умови міцності за нормальними і дотичними напруженнями при згинанні.

40. Із чого складається повний розрахунок на міцність балки при плоскому поперечному згинанні?

41. Диференціальне рівняння зігнутої осі балки.

42. Універсальне рівняння зігнутої осі балки.

43. Які початкові параметри використовуються в універсальному рівнянні зігнутої осі балки?

44. Чому дорівнюють початкові параметри рівняння зігнутої осі балки: 1) у жорсткому защемленні; 2) на кінці консолі; 3) у шарнірно-нерухомій опорі; 4) у шарнірно-рухомій опорі?

45. Як визначаються початкові параметри рівняння зігнутої осі балки на кінці консолі?

46. Написати універсальне рівняння зігнутої осі балки для консолі під дією рівномірно розподіленого навантаження.

47. Написати універсальне рівняння зігнутої осі консольної балки, що навантажена зосередженою силою на кінці консолі.

48. Написати універсальне рівняння зігнутої осі консольної балки, що навантажена зосередженим моментом на кінці консолі.

49. Написати універсальне рівняння зігнутої осі двохопорної балки, що навантажена зосередженою силою посередині прольоту.

50. Написати універсальне рівняння зігнутої осі двохопорної балки, що навантажена зосередженим моментом посередині прольоту.

51. Написати універсальне рівняння зігнутої осі двохопорної балки, що навантажена рівномірно розподіленим навантаженням.

52. Що таке позацентрове розтягання (стискання)?

53. Як побудувати ядро перерізу?

54. Як побудувати нейтральну лінію перерізу при позацентровому розтяганні (стисканні)?

55. Яке положення займає нейтральна лінія, коли повздовжня сила прикладається на границі ядра перерізу?

56. Як знайти напруження у довільній точці поперечного перерізу при позацентровому розтяганні (стисканні)?

57. В яких точках перерізу при позацентровому розтяганні (стисканні) виникають екстремальні напруження?

58. Чому дорівнює напруження в центрі ваги поперечного перерізу при позацентровому розтяганні (стисканні)?

59. Порядок розрахунків на визначення переміщень балки за методом Мора.

60. Порядок розрахунків на визначення переміщень балки за методом Верещагіна.

61. Яке навантаження необхідно прикладати у перерізі балки для визначення прогину у цьому ж перерізі?

62. Яке навантаження необхідно прикладати у перерізі балки для визначення кута повороту в цьому ж перерізі?

63. Як визначити дійсне направлення переміщень (прогину і кута повороту) у перерізі балки?

64. Чим характеризується жорсткість балки при плоскому поперечному згинанні?

65. Які системи називаються статично невизначуваними?

66. Що таке ступінь статичної невизначеності системи?

67. Навести приклади статично невизначуваних систем.
68. Що таке нерозрізні балки і як визначається їх ступінь статичної невизначеності?
69. Що таке початкова, основна і еквівалентні схеми стержневих систем?
70. Особливість еквівалентної схеми для один раз статично невизначеної консольної балки.
71. В якому порядку виконується розрахунок нерозрізних балок?
72. Використання способу Верещагіна для розкриття статичної невизначеності багатопрольотних нерозрізних балок.
73. Загальне рівняння трьох моментів.
74. Рівняння трьох моментів для n раз статично невизначеної багатопрольотної нерозрізної балки.
75. За якими прийомами можна побудувати сумарну епюру згинальних моментів багатопрольотної нерозрізної балки?
76. Як виконується статична перевірка рішення нерозрізної балки?
77. Як виконується деформаційна (кінематична) перевірка остаточної епюри згинальних моментів при розрахунку нерозрізної балки?
78. Універсальне рівняння зігнутої осі для статично невизначуваних балок.
79. Визначення переміщень перерізів для статично невизначуваних балок за допомогою універсального рівняння зігнутої осі.
80. Що таке косо згинання?
81. Чи можливе косо згинання при чистому згинанні та чому?
82. Чи може виникати косо згинання у балці круглого, квадратного, прямокутного перерізів?
83. Як визначити положення площини дії повного згинального моменту і нейтральної лінії при косому згинанні?
84. Порядок підбору поперечного перерізу балки при косому згинанні.
85. В яких точках поперечного перерізу балки виникають найбільші

напруження при косому згинанні?

86. Які напруження виникають у поперечному перерізі валів при згинанні з крученням?

87. В яких точках перерізу валу, що працює в умовах згинання і кручення, виникають найбільші напруження?

88. Чому не враховується значення дотичних напружень у розрахунках валу, який працює в умовах сумісної дії згинання і кручення?

89. Визначення стійкого, нестійкого та критичного стану стержня.

90. Яка сила називається критичною при розрахунках стержнів на стійкість?

91. За якою формулою визначається величина критичної сили в розрахунках стержнів на стійкість?

92. Як зміниться величина критичної сили для стержня круглого перерізу в розрахунках на стійкість при зменшенні його діаметру у два рази?

93. Порядок розрахунку стержня на стійкість.

94. Як враховується спосіб закріплення кінців стержня при розрахунках на стійкість?

95. Чому дорівнює коефіцієнт зведеної довжини для різних випадків закріплення кінців стержня?

96. Гнучкість стержня. Межі застосування формули Ейлера в розрахунках стержнів на стійкість.

97. Визначення критичного напруження для стержнів великої, середньої та малої гнучкості в розрахунках стержнів на стійкість.

98. Графік критичних напружень при розрахунках стержнів на стійкість.

99. Як проводиться підбір перерізу стержня за допомогою коефіцієнта φ у розрахунках стержнів на стійкість?

100. Класифікація механічних коливань.

101. Вільні гармонічні коливання пружної системи з одним ступенем свободи.

102. Вимушені коливання пружної системи з одним ступенем свободи.

103. Розсіяння енергії при коливаннях.

104. Розрахунок на удар при осьовій дії навантаження.

105. Обертальні коливання валів.

106. Критична швидкість обертання валу.

107. Явище втоми матеріалів.

108. Діаграми втоми.

109. Поняття про малоциклову втому матеріалів.

110. Методи визначення межі витривалості.

ПЕРЕЛІК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

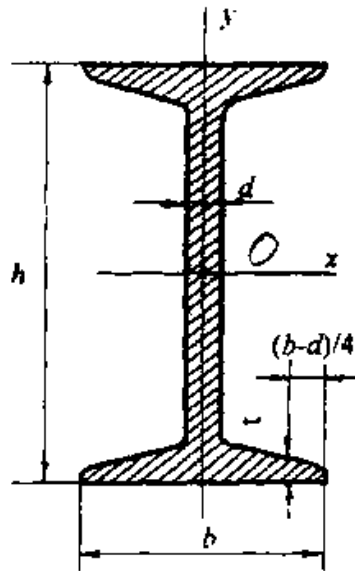
1. Піскунов В. Г. Опір матеріалів з основами теорії пружності й пластичності : [у 2-х ч., у 5-ти кн.] / Піскунов В. Г. – К.: Вища школа, 1995. – 1326 с.
2. Писаренко Г. С. Сопротивление материалов : [підручник для ВНЗ] / Писаренко Г. С. – К.: Вища школа, 1986. – 775 с.
3. Феодосьев В. Н. Сопротивление материалов : [підручник для ВНЗ] / Феодосьев В. Н. – М.: Наука, 1986. – 512 с.
4. Двутавры стальные горячекатаные. Сортамент : ГОСТ 8239-89. – [Чинний з 1990-07-01]. – М.: Держбуд СРСР, 1989. – 68 с. – (Державний стандарт СРСР).
5. Швелери сталеві гарячекатані. Сортамент : ДСТУ 3436-96. – [Чинний з 2009-02-01]. – К.: Держстандарт України, 2009. – 20 с. – (Державний стандарт України).
6. Кутники сталеві гарячекатані рівнополічні. Сортамент : ДСТУ 2251-93. – [Чинний з 1995-01-01]. – К.: Держстандарт України, 1994. – 40 с. – (Державний стандарт України).

РЕКОМЕНДОВАНА ЛІТЕРАТУРА

1. Терегулов И. Г. Сопротивление материалов и основы теории упругости и пластичности : [ученик для студентов ВУЗов] / Терегулов И. Г. – М.: Высшая школа, 1984. – 472 с.
2. Тимошенко С. П., Гудьер Дж. Теория упругости / С. П. Тимошенко, Дж. Гудьер. – М.: Наука, 1979. – 560 с.
3. Дарков А. В. Сопротивление материалов : [підручник для ВНЗ] / А. В. Дарков, Г. С. Шпиро. – М.: Высшая школа, 1975. – 654 с.
4. Уголки стальные горячекатаные неравнополочные. Сортамент : ГОСТ 8510-86. – [Чинний з 1987-07-01]. – М.: Держбуд СРСР, 1987. – 116 с. – (Державний стандарт СРСР).
5. Прокат листовой горячекатаный. Сортамент : ГОСТ 19903-74. – [Чинний з 1976-01-01]. – М.: Держбуд СРСР, 1975. – 47 с. – (Державний стандарт СРСР).

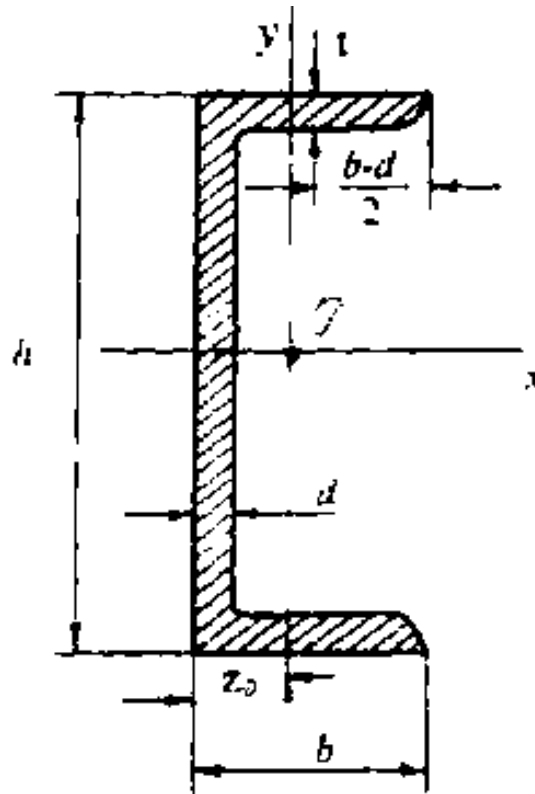
ОСНОВНИЙ СОРТАМЕНТ СТАЛЬНИХ ПРОКАТНИХ ПРОФІЛІВ

Сортамент прокатної сталі – двотаври (ГОСТ 8239-89)



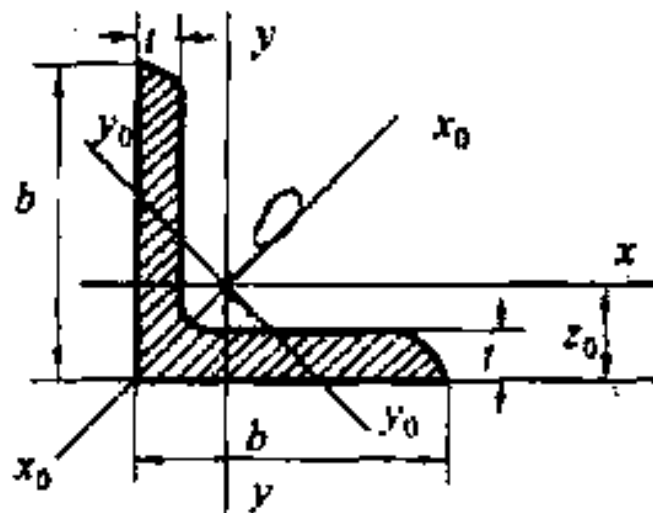
№ про-фі-лю	Маса 1 пог. м, кг	Розміри, мм				Пло-ща пе-ре-різу, см ²	Довідкові величини відносно осей						
		h	b	d	t		x - x			y - y			
							I _x , см ⁴	W _x , см ³	i _x , см	S _x , см ³	I _y , см ⁴	W _y , см ³	i _y , см
10	9,46	100	55	4,5	7,2	12,0	198,	39,7	4,06	23,0	17,9	6,49	1,22
12	11,50	120	64	4,8	7,3	14,7	350	58,4	4,88	33,7	27,9	8,72	1,38
14	13,70	140	73	4,9	7,5	17,4	572	81,7	5,73	46,8	41,9	11,50	1,55
16	15,90	160	81	5,0	7,8	20,2	873	109,0	6,57	62,3	58,6	14,50	1,70
18	18,40	180	90	5,1	8,1	23,4	1290	143,0	7,42	81,4	82,6	18,40	1,88
20	21,00	200	100	5,2	8,4	26,8	1840	184,0	8,28	104	115	23,10	2,07
22	24,0	220	110	5,4	8,7	30,6	2550	232,0	9,13	131,0	157	28,60	2,27
24	27,30	240	115	5,6	9,5	34,8	3460	289,0	9,97	163,0	198	34,50	2,37
27	31,50	270	125	6,0	9,8	40,2	5010	371,0	11,2	210,0	260	41,50	2,54
30	36,50	300	135	6,5	10,2	46,5	7080	472,0	12,3	268,0	337	49,90	2,69
33	42,20	330	140	7,0	11,2	53,8	9840	597,0	13,5	339,0	419	59,90	2,79
36	48,60	360	145	7,5	12,3	61,9	13380	743,0	14,7	423,0	516	71,10	2,89
40	57,00	400	155	8,3	13,0	72,6	19062	953,0	16,2	545,0	667	86,10	3,03
45	66,50	450	160	9,0	14,2	84,7	27696	1231	18,1	708,0	808	101,0	3,09
50	78,50	500	170	10,0	15,2	100	39727	1589	19,9	919,0	1043	123,0	3,23
55	92,60	550	180	11,0	16,5	118	55962	2035	21,8	1181	1356	151,0	3,39
60	108,0	600	190	12,0	17,8	138	76806	2560	23,6	1491	1725	182,0	3,54

Сортамент прокатної сталі – швелери (ДСТУ 3436-96)



№ про-фі-лю	Маса 1 пог м, кг	Розміри, мм				Пло-ща пере-різу, см ²	Довідкові величини відносно осей							
		h	b	d	t		x - x			y - y				z ₀ , см
							I _x , см ⁴	W _x , см ³	i _x , см	S _x , см ³	I _y , см ⁴	W _y , см ³	i _y , см	
5	4,84	50	32	4,4	7,0	6,16	22,8	9,1	1,92	5,59	5,61	2,75	0,95	1,16
6,5	5,90	65	36	4,4	7,2	7,51	48,6	15,0	2,54	9,00	8,70	3,68	1,08	1,24
8	7,05	80	40	4,5	7,4	8,98	89,4	22,4	3,16	23,30	12,8	4,75	1,19	1,31
10	8,59	100	46	4,5	7,6	10,90	174,0	34,8	3,99	20,40	20,4	6,46	1,37	1,44
12	10,40	120	52	4,8	7,8	13,30	304,0	50,6	4,78	29,60	31,2	8,52	1,53	1,54
14	12,30	140	58	4,9	8,1	15,60	491,0	70,2	5,60	40,80	45,4	11,00	1,70	1,67
16	14,20	160	64	5,0	8,4	18,10	747,0	93,4	6,42	54,10	63,3	13,80	1,87	1,80
16a	15,30	160	68	5,0	9,0	19,50	823,0	103	6,49	59,40	78,8	16,40	2,01	2,00
18	16,30	180	70	5,1	8,7	20,70	1090	121	7,24	69,80	86,0	17,00	2,04	1,94
18a	17,40	180	74	5,1	9,3	22,20	1190	132	7,32	76,10	105	20,00	2,18	2,13
20	18,40	200	76	5,2	9,0	23,40	1520	152	8,07	87,80	113	20,50	2,20	2,07
22	21,00	220	82	5,4	9,5	26,70	2110	192	8,89	110,0	151	25,10	2,37	2,21
24	24,00	240	90	5,6	10	30,60	2900	242	9,73	139,0	208	31,60	2,60	2,42
27	27,70	270	95	6,0	10,5	35,20	4160	308	10,9	178,0	262	37,30	2,73	2,47
30	31,80	300	100	6,5	11,0	40,50	5810	387	12,0	224,0	327	43,60	2,84	2,52
33	36,50	330	105	7,0	11,7	46,50	7980	484	13,1	281,0	410	51,80	2,97	2,59
36	41,90	360	110	7,5	12,6	53,40	10820	601	14,2	350,0	513	61,70	3,10	2,68
40	48,30	400	115	8,0	13,5	61,50	15220	761	15,7	440,0	642	73,40	3,23	2,75

Сортамент прокатної сталі – кутники рівнополичні (ДСТУ 2251-93)



Дополнительные величины для осей

Но- мер ку- тки	b	t	R	r	E, см ²	x-x						y ₀ -y ₀				I _{xy} , см ⁴	x ₀ , см	Мощ. I N, кВт	
						I _x , см ⁴		I _y , см ⁴		I _{xy} , см ⁴		W _x , см ³		W _y , см ³					I _{yx} , см ⁴
						W _x , см ³	I _x , см ⁴	I _{xy} , см ⁴	I _y , см ⁴	W _x , см ³	W _y , см ³	I _{yx} , см ⁴	I _{xy} , см ⁴	I _{yx} , см ⁴	I _{xy} , см ⁴				
2	20	3	3,5	1,2	1,13	0,40	0,28	0,59	0,63	0,75	0,17	0,20	0,39	0,23	0,60	0,89			
		4	3,5	1,2	1,46	0,50	0,37	0,58	0,78	0,73	0,22	0,24	0,38	0,28	0,64	1,15			
2,5	25	3	3,5	1,2	1,43	0,81	0,46	0,75	1,29	0,95	0,34	0,33	0,49	0,47	0,73	1,12			
		4	3,5	1,2	1,86	1,03	0,59	0,74	1,62	0,93	0,44	0,41	0,48	0,59	0,76	1,46			
2,8	28	3	4,0	1,3	1,62	1,16	0,58	0,85	1,84	1,07	0,48	0,42	0,55	0,68	0,80	1,27			
		4	4,0	1,3	2,27	1,84	0,87	0,90	2,92	1,13	0,77	0,61	0,58	1,08	0,89	1,78			
3	30	3	4,0	1,3	1,74	1,45	0,67	0,91	2,30	1,15	0,60	0,53	0,59	0,85	0,85	1,36			
		4	4,0	1,3	2,43	2,26	1,00	0,96	3,58	1,21	0,94	0,71	0,62	1,32	0,94	1,91			
3,2	32	3	4,5	1,5	1,86	1,77	0,77	0,97	2,80	1,23	0,74	0,59	0,63	1,03	0,89	1,46			
		4	4,5	1,5	2,43	2,26	1,00	0,96	3,58	1,21	0,94	0,71	0,62	1,32	0,94	1,91			
3,5	35	3	4,5	1,5	2,04	2,35	0,93	1,07	3,72	1,35	0,97	0,71	0,69	1,37	0,97	1,60			
		4	4,5	1,5	2,67	3,01	1,21	1,06	4,76	1,33	1,25	0,88	0,68	1,75	1,01	2,10			
4	40	3	5,0	1,7	2,35	3,55	1,22	1,23	5,63	1,55	1,47	0,95	0,79	2,08	1,09	1,85			
		4	5,0	1,7	3,08	4,58	1,60	1,22	7,26	1,53	1,90	1,19	0,78	2,68	1,13	2,42			
4,5	45	3	5,0	1,7	3,79	5,53	1,95	1,21	8,75	1,52	2,30	1,39	0,78	3,22	1,17	2,98			
		4	5,0	1,7	4,29	8,03	2,51	1,37	12,74	1,72	3,33	1,81	0,88	4,71	1,30	3,37			
5	50	3	5,5	1,8	2,96	7,11	1,94	1,55	11,27	1,95	2,95	1,57	1,00	4,16	1,33	2,32			
		4	5,5	1,8	3,89	9,21	2,54	1,54	14,63	1,94	3,80	1,95	0,99	5,42	1,38	3,05			
		5	5,5	1,8	4,80	11,20	3,13	1,53	17,77	1,92	4,63	2,30	0,98	6,57	1,42	3,77			
		6	5,5	1,8	5,69	13,07	3,69	1,52	20,72	1,91	5,43	2,63	0,98	7,65	1,46	4,47			

Додатком значення величин для всіх

Но- мер ку- тка	b	r	R	r	E, см ²	x-z			x ₀ -x ₀			y ₀ -y ₀			I _{xy} , см ⁴	I _{yz} , см ⁴	I _{xy} , см ⁴	x ₀ , см	Маса I M, кг		
						I _{xx} , см ⁴	W _{xx} , см ³	i _{xx} , см	I _{yy} , мм ² , см ⁴	I _{yy} , мм ² , см ⁴	W _{yy} , см ³	i _{yy} , см	I _{zz} , мм ² , см ⁴	I _{zz} , мм ² , см ⁴						W _{zz} , см ³	i _{zz} , см
5,6	56	4	6,0	2,0	4,38	13,10	3,21	1,73	20,79	2,18	5,41	2,52	1,11	7,69	1,52	3,44					
		5	6,0	2,0	5,41	15,97	3,96	1,72	25,36	2,16	6,59	2,97	1,10	9,41	1,57	4,25					
6,3	63	4	7,0	2,3	4,96	18,86	4,09	1,95	29,90	2,45	7,81	3,26	1,25	11,00	1,69	3,90					
		5	7,0	2,3	6,13	23,10	5,05	1,94	36,80	2,44	9,52	3,87	1,25	13,70	1,74	4,81					
		6	7,0	2,3	7,28	27,06	5,98	1,93	42,91	2,43	11,18	4,44	1,24	15,90	1,78	5,72					
7	70	4,5	8,0	2,7	6,20	29,04	5,67	2,16	46,03	2,72	12,04	4,53	1,39	17,00	1,88	4,87					
		5	8,0	2,7	6,86	31,94	6,27	2,16	50,67	2,72	13,22	4,92	1,39	18,70	1,90	5,38					
		6	8,0	2,7	8,15	37,58	7,43	2,15	59,64	2,71	15,52	5,66	1,38	22,10	1,94	6,39					
		7	8,0	2,7	9,42	42,98	8,57	2,14	68,19	2,69	17,77	6,31	1,37	25,20	1,99	7,39					
		8	8,0	2,7	10,67	48,16	9,68	2,12	76,35	2,68	19,97	6,99	1,37	28,20	2,02	8,37					
7,5	75	5	9,0	3,0	7,39	39,53	7,21	2,31	62,65	2,91	16,41	5,74	1,49	23,10	2,02	5,80					
		6	9,0	3,0	8,78	46,57	8,57	2,30	73,87	2,90	19,28	6,62	1,48	27,30	2,06	6,89					
		7	9,0	3,0	10,15	53,34	9,89	2,29	84,61	2,89	22,07	7,43	1,47	31,20	2,10	7,96					
		8	9,0	3,0	11,50	59,84	11,18	2,28	94,89	2,87	24,80	8,16	1,47	35,00	2,15	9,02					
		9	9,0	3,0	12,83	66,10	12,43	2,27	104,72	2,86	27,48	8,91	1,46	38,60	2,18	10,07					
8	80	5,5	9,0	3,0	8,63	52,68	9,03	2,47	83,56	3,11	21,80	7,10	1,59	30,90	2,17	6,78					
		6	9,0	3,0	9,38	56,97	9,80	2,47	90,40	3,11	23,54	7,60	1,58	33,40	2,19	7,36					
		7	9,0	3,0	10,85	65,31	11,32	2,45	103,60	3,09	26,97	8,55	1,58	38,30	2,23	8,51					
		8	9,0	3,0	12,30	73,36	12,80	2,44	116,39	3,08	30,32	9,44	1,57	43,00	2,27	9,65					
9	90	6	10,0	3,3	10,61	82,10	12,49	2,78	130,00	3,50	33,97	9,88	1,79	48,10	2,43	8,33					
		7	10,0	3,3	12,28	94,30	14,45	2,77	149,67	3,49	38,94	11,15	1,78	55,40	2,47	9,64					
		8	10,0	3,3	13,93	106,11	16,36	2,76	168,42	3,48	43,80	12,34	1,77	62,30	2,51	10,93					
		9	10,0	3,3	15,60	118,00	18,29	2,75	186,00	3,46	48,60	13,48	1,77	68,00	2,55	12,20					

Додаток 4
Значення коефіцієнтів для осей

Но- мер ку- тка	b	r	R	r	F, см ²	Додаток 4 Значення коефіцієнтів для осей										Маса I M, кг		
						x-x			y-y			z-z					I _{xy} , см ⁴	x ₀ , см
						I _x , см ⁴	I _y , см ⁴	I _{xy} , см ⁴	I _x , см ⁴	I _y , см ⁴	I _{xy} , см ⁴	I _x , см ⁴	I _y , см ⁴	I _{xy} , см ⁴	I _{xy} , см ⁴			
10	100	6,5	12,0	4,0	12,82	122,10	16,69	3,09	193,46	3,89	50,73	13,38	1,99	71,40	2,68	10,06		
		7	12,0	4,0	13,75	130,59	17,90	3,08	207,01	3,88	54,16	14,13	1,98	76,40	2,71	10,79		
		8	12,0	4,0	15,60	147,19	20,30	3,07	233,46	3,87	60,92	15,66	1,98	86,30	2,75	12,25		
		10	12,0	4,0	19,24	178,95	24,97	3,05	283,83	3,84	74,08	18,51	1,96	110,00	2,83	15,10		
		12	12,0	4,0	22,80	208,90	29,47	3,03	330,95	3,81	86,84	21,10	1,95	122,00	2,91	17,90		
		14	12,0	4,0	26,28	237,15	33,83	3,00	374,98	3,78	99,32	23,49	1,94	138,00	2,99	20,63		
		16	12,0	4,0	29,68	263,82	38,04	2,98	416,04	3,74	111,61	25,79	1,94	152,00	3,06	23,30		
11	110	7	12,0	4,0	15,15	175,61	21,83	3,40	278,54	4,29	72,68	17,36	2,19	106,00	2,96	11,89		
		8	12,0	4,0	17,20	198,17	24,77	3,39	314,51	4,28	81,83	19,29	2,18	116,00	3,00	13,50		
12,5	125	8	14,0	4,6	19,69	294,36	32,20	3,87	466,76	4,87	121,98	25,67	2,49	172,00	3,36	15,46		
		9	14,0	4,6	22,00	327,48	36,00	3,86	520,00	4,86	135,88	28,26	2,48	192,00	3,40	17,30		
		10	14,0	4,6	24,33	359,82	39,74	3,85	571,04	4,84	148,59	30,45	2,47	211,00	3,45	19,10		
		12	14,0	4,6	28,89	422,23	47,06	3,82	670,02	4,82	174,43	34,94	2,46	248,00	3,53	22,68		
		14	14,0	4,6	33,37	481,76	54,17	3,80	763,90	4,78	199,62	39,10	2,45	282,00	3,61	26,20		
		16	14,0	4,6	37,77	538,56	61,09	3,78	852,84	4,75	224,29	43,10	2,44	315,00	3,68	29,65		
14	140	9	14,0	4,6	24,72	465,72	45,55	4,34	739,42	5,47	192,03	35,92	2,79	274,00	3,76	19,41		
		10	14,0	4,6	27,33	512,29	50,32	4,33	813,62	5,46	210,96	39,05	2,78	301,00	3,82	21,45		
		12	14,0	4,6	32,49	602,49	59,66	4,31	956,98	5,43	248,01	44,97	2,76	354,00	3,90	25,50		
16	160	10	16,0	5,3	31,43	774,24	66,19	4,96	1229,10	6,25	319,33	52,52	3,19	455,00	4,30	24,67		
		11	16,0	5,3	34,42	844,21	72,44	4,95	1340,06	6,24	347,77	56,53	3,18	496,00	4,35	27,02		
		12	16,0	5,3	37,39	912,89	78,62	4,94	1450,00	6,23	375,78	60,53	3,17	537,00	4,39	29,35		
		14	16,0	5,3	43,57	1046,47	90,77	4,92	1662,13	6,20	430,81	68,15	3,16	615,00	4,47	34,20		
		16	16,0	5,3	49,07	1175,19	102,64	4,89	1865,73	6,17	484,64	75,92	3,14	690,00	4,55	38,52		
		18	16,0	5,3	54,79	1290,24	114,24	4,87	2061,03	6,13	537,46	82,08	3,13	771,00	4,63	43,01		
		20	16,0	5,3	60,40	1418,85	125,60	4,85	2248,26	6,10	589,43	90,02	3,12	830,00	4,70	47,41		

Но- мер ку- туры	Детальное задание водичин для осей										Масса 1 м, кг					
	b	r	R	r	F ₁ см ²	x-k			y-p-yo			I _{yo} см ⁴	x _{yo} см			
						I _{xo} см ⁴	W _{xo} см ³	i _{xo} см	I _{yo, min} см ⁴	W _{yo} см ³				i _{yo, min} см		
															I _{xo, max} см ⁴	i _{xo, max} см
18	180	11 12	16,0 16,0	5,3 5,3	38,80 42,19	1216,44 1316,62	92,47 100,41	5,60 5,59	1933,10 2092,78	7,06 7,04	499,78 540,45	72,86 78,15	3,59 3,58	716,00 776,00	4,85 4,89	30,47 33,12
20	200	12 13 14 16 20 25 30	18,0 18,0 18,0 18,0 18,0 18,0 18,0	6,0 6,0 6,0 6,0 6,0 6,0 6,0	47,10 50,85 54,60 61,98 76,54 94,29 111,54	1822,78 1960,77 2097,00 2362,57 2871,47 3466,21 4019,60	124,61 134,44 144,17 163,37 200,73 245,59 288,57	6,22 6,21 6,20 6,17 6,12 6,06 6,00	2896,16 3116,18 3333,00 3755,39 4860,42 5494,04 6351,05	7,84 7,83 7,81 7,78 7,72 7,63 7,55	749,40 805,35 861,00 969,74 1181,92 1438,38 1698,16	98,68 105,07 111,50 123,77 146,62 172,68 193,06	3,99 3,98 3,97 3,96 3,93 3,91 3,89	1073,00 1156,00 1236,00 1393,00 1689,00 2028,00 2332,00	5,37 5,42 5,46 5,54 5,70 5,89 6,07	36,97 39,92 42,80 48,65 60,08 74,02 87,56
22	220	14 16	21,0 21,0	7,0 7,0	60,38 68,58	2814,36 3175,44	175,18 198,71	6,83 6,80	4470,15 5045,37	8,60 8,58	1158,56 1305,52	138,62 153,34	4,38 4,36	1655,00 1869,00	5,91 6,02	47,40 53,83
25	250	16 18 20 22 25 28 30 35	24,0 24,0 24,0 24,0 24,0 24,0 24,0 24,0	8,0 8,0 8,0 8,0 8,0 8,0 8,0 8,0	78,40 87,72 96,96 106,12 119,71 133,12 141,96 163,71	4717,10 5247,24 5764,87 6270,32 7006,39 7716,86 8176,82 9281,05	258,43 288,82 318,76 348,26 391,72 434,25 462,11 530,11	7,76 7,73 7,71 7,69 7,65 7,61 7,59 7,53	7492,10 8336,69 9159,73 9961,30 11125,52 12243,84 12964,66 14682,73	9,78 9,75 9,72 9,69 9,64 9,59 9,56 9,47	1942,09 2157,78 2370,01 2579,04 2887,26 3189,89 3388,98 3879,37	203,45 223,39 242,52 260,52 287,14 311,98 327,82 366,13	4,98 4,96 4,94 4,93 4,91 4,90 4,89 4,87	2775,00 3089,00 3395,00 3691,00 4119,00 4527,00 4788,00 5401,68	6,75 6,83 6,91 7,00 7,11 7,23 7,31 7,53	61,55 68,86 76,11 83,31 93,97 104,50 111,44 128,51