

**МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ УКРАИНЫ
ЗАПОРОЖСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ**

**С.В. Курапов
М.В. Давидовский**

**РИСУНОК ПЛОСКОЙ ЧАСТИ
НЕПЛАНАРНОГО ГРАФА**

монография

Запорожье, 2020

УДК 519.17

ББК: Б174.2

К

Рецензенты:

Доктор физико-математических наук, профессор

В.А.Перепелица

Доктор физико-математических наук, профессор

А.К.Привалников.

Утверждено Ученым советом математического факультета ЗНУ (протокол № 2 от 30.10.2012 г.)

С.В. Курапов.

М.В. Давидовский.

К--- Рисунок плоской части непланарного графа. Запорожье: ЗНУ, 2020. -116 с.

ISBN -----

Визуализированный граф является мощным инструментом в задачах анализа и синтеза данных. При этом задача визуализации заключается не только в выводе вершин и ребер согласно представлению графа, но и в том, чтобы этот вывод был визуалью прост для пользователя. Процесс визуализации включает решение нескольких задач, одной из которых является задача построения топологического рисунка плоской части непланарного графа с минимальным количеством удаленных ребер. В работе рассматривается математическая модель описания топологического рисунка графа, основанная на методах теории вращения вершин с индукцией простых циклов удовлетворяющих критерию планарности Маклейна. Показано, что топологический рисунок графа непланарного графа может быть построен на основе выделенной плоской части графа. Топологическая модель рисунка графа позволяет свести переборную задачу выделения плоского графа к дискретной задаче оптимизации – поиску подмножества изометрических циклов графа удовлетворяющих нулевому значению функционала Маклейна. Для описания топологического риунка плоской части графа разработан метод сжимающихся отображений на основе методов линейной алгебры и алгебры структурных чисел. На их основе разработан вычислительный алгоритм с полиномиальной вычислительной сложностью.

Для научных работников, студентов и аспирантов, специализирующихся на применение вычислительных методов прикладной математики.

Редактор Мухин В.В.

Технический редактор Борю С.Ю.

Корректор Борю С.В.

Содержание

	Введение.....	4
Глава 1.	ВЫДЕЛЕНИЕ ПЛОСКОЙ ЧАСТИ НЕ ПЛАНАРНОГО ГРАФА	10
1.1.	Проверка подмножества изометрических циклов на линейную независимость	10
1.2.	Изометрические циклы и плоские конфигурации.....	12
1.3.	Модифицированный алгоритм Гаусса.....	14
1.4.	Построение плоских конфигураций с заданным ободом.....	21
1.5.	Дополнение плоских конфигураций.....	23
	Выводы.....	26
Глава 2.	МЕТОДЫ ВЫДЕЛЕНИЯ ПЛОСКОЙ ЧАСТИ ГРАФА.	28
2.1.	Выделение плоской части непланарного графа.....	28
2.2.	Метод наискорейшего спуска	29
2.3.	Функционал Понтрягина-Куратовского.....	38
2.4.	Фрагментарный алгоритм.....	44
2.5.	Выделение базиса и построение плоской части непланарного графа....	56
	Выводы.....	65
Глава 3.	МЕТОД СЖИМАЮЩИХСЯ ОКРЕСТНОСТЕЙ	67
3.1.	Структурное число графа и метод сжимающихся окрестностей.....	67
3.2.	Метод сжимающихся отображений.....	73
	Выводы.....	86
Глава 4.	ДОБАВЛЕНИЕ ПРОСТЫХ ЦИКЛОВ	87
4.1.	Основы векторной алгебры пересечений ребер графа	87
4.2.	Преобразование координат векторов при смене топологической координатно-базисной системы.....	97
4.3.	Введение дополнительных ребер.....	101
4.4.	Алгоритм сжимающихся отображений.....	108
	Выводы.....	109
	Заключение	110
	Литература	111

Введение

Графы используются повсеместно для моделирования широкого спектра различных объектов и их связей. Эти объекты могут быть частью материального мира, а могут представлять собой математическую абстракцию [34,40]. Для наглядного отображения графа требуется его визуализация на плоскость.

Визуализированный граф является мощным инструментом в задачах анализа и синтеза данных [2,3,14,41,53,54,56]. При этом задача визуализации заключается не только в выводе вершин и ребер согласно представлению графа, но и в том, чтобы этот вывод был визуально прост для пользователя.

Можно сформулировать несколько очевидных критериев, которые раскрывают понятие «визуальной простоты»: вершины не должны накладываться друг на друга, пересечение ребер должно быть сведено к минимуму (для планарных графов – отсутствие пересечений), суммарная длина ребер должна быть минимальной, число изломов ребер должно быть минимальным, визуализация должна отражать топологические свойства графа и его симметрию.

В данной работе будем рассматривать задачу построения топологического рисунка плоской части непланарного графа с минимальным числом удаленных ребер.

Математической моделью для построения топологического рисунка плоского графа является теория вращения вершин графа, созданная Г.Рингелем [46]. Теория вращений вершин характеризует относительное расположение вершин графа на плоскости и одновременно индуцирует (порождает) простые циклы графа. Поэтому данная модель может быть положена в основу задачи построения топологического рисунка плоской части непланарного графа [21,22].

В работе [8] показано, что задача выделения максимально плоской части непланарного графа является NP-полной. То есть ее можно решить путем полного перебора вариантов и не существует полиномиального алгоритма для ее разрешимости.

В англоязычной литературе встречаются два определения плоских частей непланарного графа. Первое определение: *наибольший планарный подграф непланарного графа* (maximum planar subgraph) – это планарный граф с наибольшим количеством ребер среди всех подграфов графа G . Второе определение: *максимальный планарный подграф непланарного графа* $G = (V, E)$ (maximal planar subgraph) – это планарный подграф $P = (V, E \setminus F)$ графа G , такой, что добавление любого ребра из F к P нарушает его планарность, то есть, $P \cup e$ непланарен для каждого $e \in F$.

Обычно рассматривается следующий способ построения максимально плоского подграфа [1,14,45]. Удаляют по отдельности каждое ребро из графа и проверяют после каждого удале-

ния оставшуюся часть графа на планарность. Если планарная часть не найдена, то удаляют всевозможное количество пар ребер и оставшуюся часть графа снова проверяют на планарность. Если решение не найдено, то продолжают удалять по три ребра всевозможными способами. Если снова решение не найдено, то продолжают процесс исключения ребер до получения решения, каждый раз увеличивая количество удаляемых ребер. Такой метод решения будем называть *методом последовательного исключения ребер*.

Алгоритм проверки графа на планарность давно известен - это полиномиальный алгоритм Хопкрофта-Тарьяна [52]. Алгоритм Хопкрофта-Тарьяна основан на выделении DFS-дерева графа, и по этому пути идут многие исследователи задачи визуализации плоской части графа [14,17,37,51].

Но для того чтобы сказать, что путем удаления ребер выделена плоская часть графа, нужно получить и описать планарный рисунок. Естественно предположить, что такой рисунок можно построить на основании выделенного дерева. Хорошо, если дерево можно представить в линейном виде, но как правило, такие деревья в графе трудно найти, а иногда и невозможно. Процесс затрудняется и неоднозначным построением рисунка самого дерева.

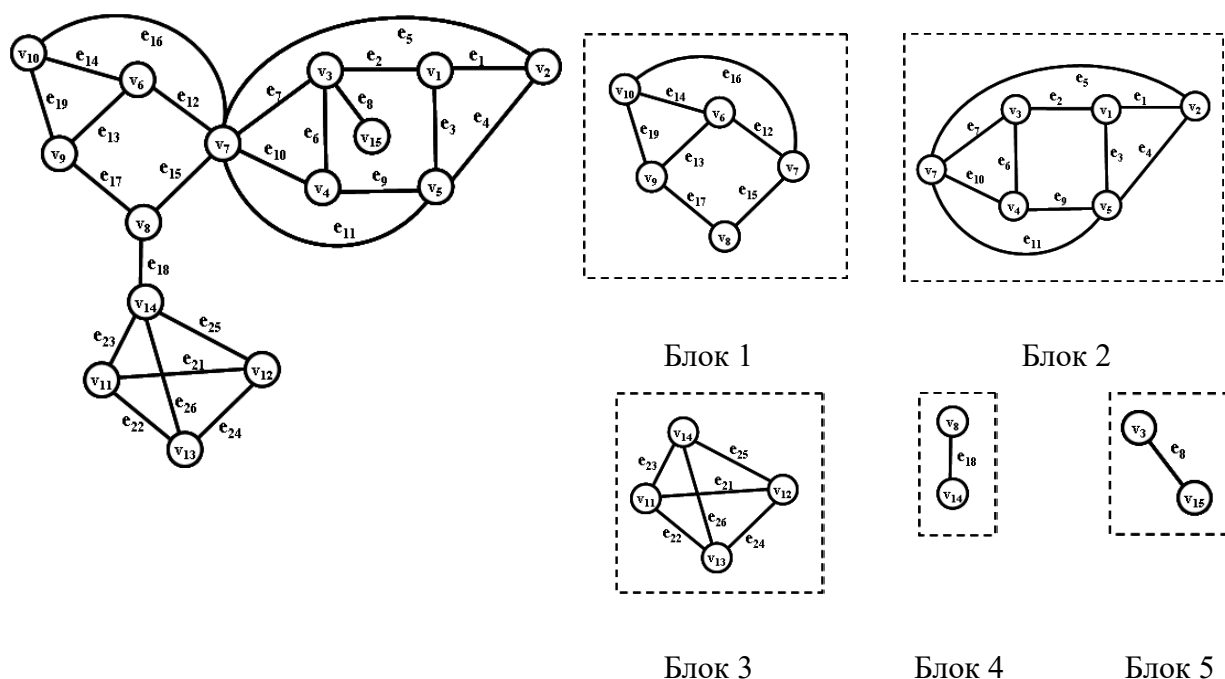


Рис. 1. Связный сепарабельный граф G и его блоки.

Для представления рисунка плоского графа, возможно применить критерия планарности Маклейна. Однако не ко всякому графу, можно применить критерий Маклейна [33] для проверки планарности или для выделения плоской части. Очевидно, что нельзя применить данный критерий к графу, имеющему хотя бы одну точку сочленения. Такой граф, является разделимым и называется *сепарабельным*. Он разбивается на блоки, каждый из которых пред-

ставляет собой максимальный неразделимый подграф. Граф, имеющий мосты также можно отнести к сепарабельным графам.

Если граф состоит из нескольких *компонент связности*, то его можно изучать "по частям", и это может упростить описание графа и облегчить решение многих задач. Однако и *связный граф* иногда можно представить как состоящий из частей, и такое *представление* также может быть полезным. После *компонент связности* простейшими частями такого рода являются блоки (называемые также компонентами *двусвязности*).

Граф G называется *неразделимым*, если он связный и не имеет точек сочленения. Такой граф называется *несепарабельным*.

С другой стороны, применение методов теории вращения вершин индуцирующих простые циклы, для описания топологического рисунка графа [21,46], требует видоизменения некоторого вида графов. К таким графам относятся графы с петлями, графы с кратным количеством ребер (мультиграфы), графы с «висячими» вершинами. Кроме того в некоторых видах графа, цепочка ребер состоящих из вершин с локальной степенью два, и должна быть заменена одним ребром (см. рис. 2).

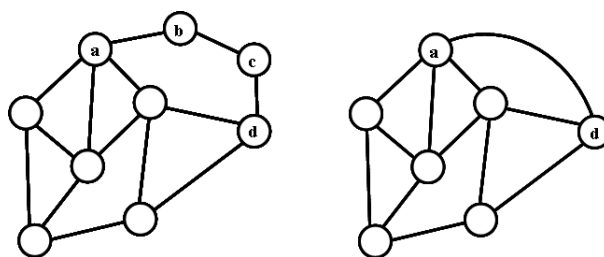


Рис. 2. Замена цепочки ребер одним ребром.

Таким образом, требуется, как то обозначить вид графов, к которым можно применять понятие топологического рисунка графа и критерий планарности Маклейна. С этой целью расширим понятие несепарабельного графа [4,12,27,48].

Определение 1. *Несепарабельным графом* G будем называть связный неориентированный граф без петель и кратных ребер, без мостов и точек сочленения, без вершин с локальной степенью меньшей или равной двум.

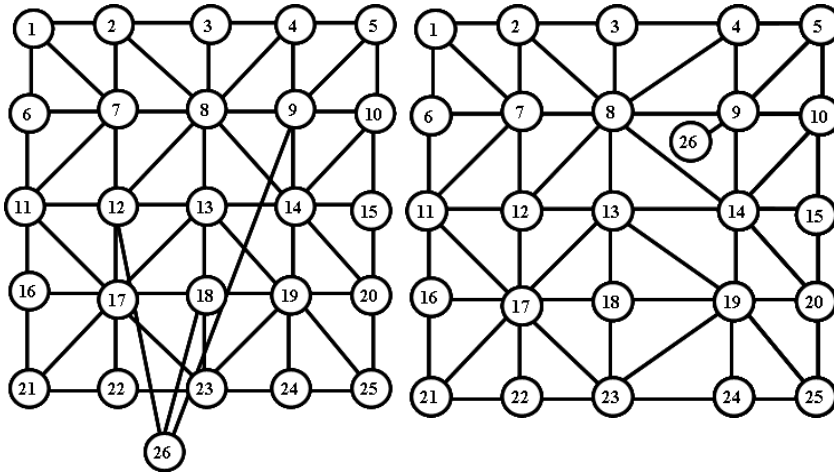


Рис 3. Граф G.

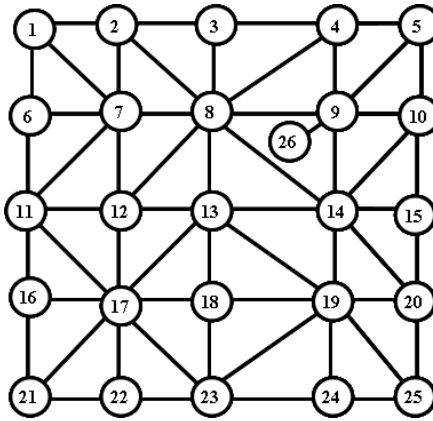


Рис. 4. Максимально плоский подграф.

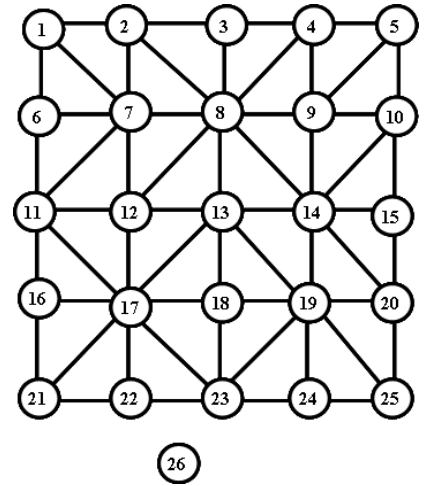


Рис. 5. Максимально плоский суграф.

В процессе последовательного удаления ребер из графа G (см. рис. 3) можно выделить максимальную, по количеству ребер, плоскую часть графа G' изоморфную как сепарабельному графу, так и несепарабельному графу (см. рис. 4 и рис. 5). И тогда, сепарабельные графы можно представить так кольцевое сложение несепарабельного суграфа \bar{G} и множество суграфов отдельных ребер G^R [47].

В этом случае, можно поставить задачу о выделении максимального плоского несепарабельного суграфа для заданного графа G. И если дополнить, выделенный максимально плоский несепарабельный суграф отдельными ребрами, то можно получить максимально плоский сепарабельный подграф G' (см. рис. 6).

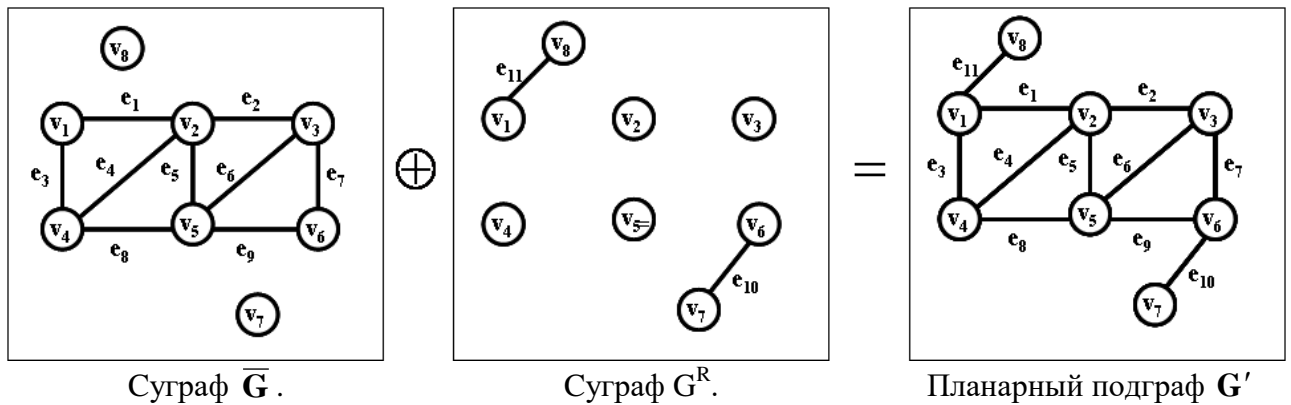


Рис. 6. Сложение суграфов

Таким образом, возникает иной подход, основанный на цикломатических свойствах графа для решения задачи выделения максимально плоского подграфа.

В таком методе, основную роль играют уже не ребра, а простые циклы. И тогда, задача о построении максимально плоского суграфа, может быть сведена к задаче дискретной оптимизации. При этом ищется приближенное решение, так как задача выделения максимально плоского суграфа остается NP-полной.

Определение 2. Максимально плоскую часть графа, образованную удалением минимального количества ребер из несепарабельного графа используя цикломатические свойства графа, будем называть *максимально плоским суграфом*.

Будем рассматривать приближенное решение задачи в общем виде, и выделим только основные этапы. Для решения данной задачи применим методы диакоптики [17,45], то есть разобьем решение на части связанные между собой.

Рассмотрим граф $G = (V, E)$ с пронумерованным множеством ребер $E = \{e_1, e_2, \dots, e_m\}$ и пронумерованным множеством вершин $V = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$, причем $\text{card}(V) = n$ и $\text{card}(E) = m$. Выделим несепарабельную часть графа.

Таким образом, диакоптика [57] позволяет применить математическую модель, основанную на цикломатических свойствах графа, и тем самым подключить для решения задачи теорему Маклейна. Тогда процесс решения можно представить в виде, состоящем из двух последовательных этапов:

- построение максимально плоского суграфа для несепарабельного суграфа;
- добавление к полученному решению единичных ребер до сепарабельного максимально плоского подграфа (пусть даже с нулевым количеством дополнительных ребер).

Здесь основную роль играют простые циклы графа. Следовательно, задача о построении максимально плоского суграфа может быть сведена к задаче комбинаторной оптимизации, то есть к поиску оптимального значения некоторого функционала.

Задача комбинаторной оптимизации для построения топологического рисунка максимально плоского суграфа выглядит следующим образом: *Найти на множестве простых циклов подмножество независимых циклов, описывающее плоский суграф и удовлетворяющее нулевому значению функционала Маклейна и уравнению Эйлера с максимальным числом ребер.*

Такая постановка позволяет свести перечислительную задачу к классу задач комбинаторной оптимизации и позволяет применить для её решения хорошо разработанный математический аппарат дискретной оптимизации. Параллельно с этим цикломатический подход позволяет строго и однозначно описывать топологический рисунок плоской части графа, так как полученная в результате решения независимая система циклов индуцирует (порождает) вращение вершин графа. Согласно теории вращений, вращение вершин создает топологический рисунок графа [21].

Множество суграфов в несепарабельном неориентированном графе можно рассматривать как линейное пространство над полем Z_2 . Операция суммы $G_1 \oplus G_2$ суграфов G_1 и G_2 определена как суграф, множество ребер которого является симметрической разностью множеств ребер суграфов G_1 и G_2 [12,47].

В качестве базисной системы векторов пространства суграфов выбираются суграфы с единственным ребром. Размерность пространства суграфов графа G , состоящего из n вершин и m рёбер, равна m . В пространстве суграфов можно выделить два подпространства, которые называются подпространством разрезов и подпространством циклов графа. Размерность подпространства разрезов равна $n - 1$, а элементы этого подпространства называются квалирезами. Размерность подпространства циклов равна $m - n + 1$, а элементы этого подпространства называются квазициклами [47].

В любом несепарабельном неориентированном графе можно выделить подмножество простых циклов – множество C_r изометрических циклов графа [23,27,56].

Будем искать приближённое решение задачи построения максимального планарного суграфа в виде подмножества изометрических циклов. Так как любой простой цикл есть объединение множества изометрических циклов. Очевидно, для построения плоской части графа, достаточно выделить максимальное множество изометрических циклов. И если необходимо, по законам диакоптики добавить недостающие простые циклы [29,30].

Данная работа рассчитана на прикладных математиков и может служить учебным пособием для дисциплин связанных с вычислительными методами теории графов. В работе приведены необходимые теоретические обоснования метода и подробное описание процессов вычислений. Для более углубленного понимания методов приведено необходимое количество решений примеров и задач.

Авторы выражают искреннюю благодарность сотрудникам математического факультета Запорожского национального университета к.т.н. Борю С.Ю., д.ф.-м.н. Козину И.В., к.ф.-м.н. Стеганцевой П.Г., к.ф.-м.н. Зиновееву И.В. за высказанные замечаний и ценные советы при обсуждении данной работы.

Глава 1. ВЫДЕЛЕНИЕ ПЛОСКИХ КОНФИГУРАЦИЙ НЕПЛАНАРНОГО ГРАФА

1.1. Проверка подмножества изометрических циклов на линейную независимость

В процессе решения задачи выделения плоской части для непланарного графа, могут появляться зависимые системы изометрических циклов. Для проверки условия независимости циклов можно применить метод Гаусса для вычисления ранга матрицы циклов. Известно, что ранг матрицы будет равен числу ненулевых строк в матрице после приведения её к ступенчатой форме при помощи элементарных преобразований над строками матрицы.

Применение метода Гаусса для определения ранга матрицы изометрических циклов имеет свои особенности.

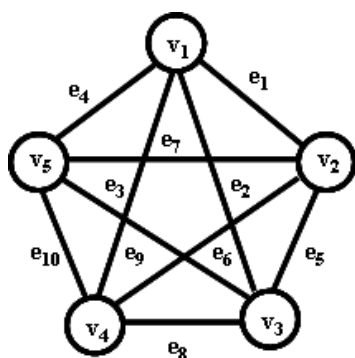


Рис. 1.1. Граф K_5 .

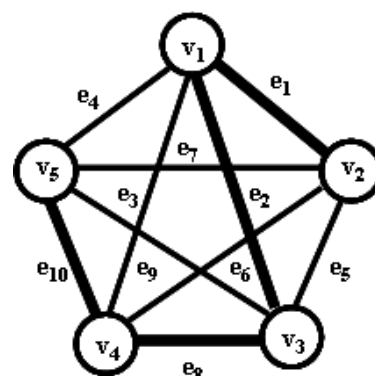


Рис. 1.2. Дерево графа K_5 .

В результате выделения дерева в графе G , множество ребер разбивается на подмножество ребер дерева и подмножество хорд [4,17,45]. Составим матрицу циклов графа. Разобьем матрицу циклов на две подматрицы - подматрицу хорд и подматрицу ветвей дерева. Если применить метод Гаусса для вычисления ранга матрицы и в качестве главного элемента в строке выбирать хорду, и путем линейной комбинации строк добиться ступенчатого вида единичной подматрицы хорд [7,18,19], то выбранная система изометрических циклов линейно независима. Если имеются нулевые строки, то система зависима. Но, в таком случае, легко определяются хорды, на главных диагоналях которых отсутствуют единицы. Тогда нулевые строки будут не только указывать циклы необходимые для удаления, но и определять хорды, по которым в дальнейшем пройдут независимые циклы. Из множества изометрических циклов можно вставить в нулевые строки изометрические циклы, проходящие по этим хордам, ранее удаленных при формировании подмножества и превратить зависимую систему в независимую. Сказанное рассмотрим на примере полного графа K_5 (см. рис. 1.1).

Пример 1.1. В качестве примера рассмотрим полный граф K_5 .

Выберем дерево в графе $T = \{e_1, e_2, e_8, e_{10}\}$ [6]. Тогда хорды образуют множество $H = \{e_3, e_4, e_5, e_6, e_7, e_9\}$ (см. рис. 1.2). Множество изометрических циклов имеет вид:

$$\begin{array}{llll} c_1 = \{e_1, e_2, e_5\}; & c_2 = \{e_1, e_3, e_6\}; & c_3 = \{e_1, e_4, e_7\}; & c_4 = \{e_2, e_3, e_8\}; \\ c_5 = \{e_2, e_4, e_9\}; & c_6 = \{e_3, e_4, e_{10}\}; & c_7 = \{e_5, e_6, e_8\}; & c_8 = \{e_5, e_7, e_9\}; \end{array}$$

$$c_9 = \{e_6, e_7, e_{10}\}; \quad c_{10} = \{e_8, e_9, e_{10}\}.$$

Выберем следующее подмножество изометрических циклов $\{c_1, c_2, c_3, c_4, c_7, c_{10}\}$ с мощностью равной цикломатическому числу графа $\nu(G) = m - n + 1$. Проверим, является ли данное подмножество циклов базисом подпространства циклов. Составим матрицу циклов и разобьем ее на две части, подматрицу ребер графа принадлежащие хордам и подматрицу ребер принадлежащих к ветвям дерева:

	e_3	e_4	e_5	e_6	e_7	e_9	e_1	e_2	e_8	e_{10}
c_1			1				1	1		
c_2	1			1			1			
c_3		1			1		1			
c_4	1							1	1	
c_7			1	1					1	
c_{10}						1			1	1

Последовательно преобразуем строки матрицы, приводя матрицу к диагональному виду, используя элементарные преобразования строк. Выбираем в качестве главного элемента строки только ребра принадлежащие хордам графа:

	e_3	e_4	e_5	e_6	e_7	e_9	e_1	e_2	e_8	e_{10}
c_1			1				1	1		
c_2	1							1	1	
c_3		1			1		1			
c_4				1			1	1	1	
c_7										
c_{10}						1			1	1

Результат окончательного преобразования для подматрицы хорд представим в ступенчатом виде:

	e_3	e_4	e_5	e_6	e_7	e_9	e_1	e_2	e_8	e_{10}
c_2	1							1	1	
c_3		1			1		1	1		
c_1			1				1	1		
c_4				1			1	1	1	
c_7										
c_{10}						1			1	1

Таким образом, выбранное множество изометрических циклов не является базисом подпространства циклов, так как имеются строки с нулевым количеством элементов.

В данном случае, базис может быть образован, если цикл c_7 заменить циклом c_8 или циклом c_9 с выбором хорды u_7 в качестве главного элемента строки.

Базис, состоящий из изометрических циклов $b_1 = \{c_1, c_2, c_3, c_4, c_9, c_{10}\}$:

	e_3	e_4	e_5	e_6	e_7	e_9	e_1	e_2	e_8	e_{10}
c_2	1							1	1	
c_3		1			1		1	1		
c_1			1				1	1		
c_4				1			1	1	1	
c_9				1	1					1
c_{10}						1			1	1

Или после окончательного приведения подматрицы хорд к ступенчатому виду:

	e_3	e_4	e_5	e_6	e_7	e_9	e_1	e_2	e_8	e_{10}
c_2	1							1	1	
c_3		1							1	1
c_1			1				1	1		
c_4				1			1	1	1	
c_9					1		1	1	1	1
c_{10}						1			1	1

После преобразования, строк с нулевым содержащим элементов в матрице циклов не имеется. Следовательно, система циклов независима.

1.2. Изометрические циклы и плоские конфигурации

Введем следующее определение.

Определение 1.1. Подграф, состоящий из подмножества изометрических циклов, совместно с ободом, для которых значение функционала Маклейна равно нулю и кольцевая сумма элементов есть пустое множество, будем называть *плоской конфигурацией*.

Пример 1.2. В качестве примера, рассмотрим следующий граф (см. рис. 1.3).

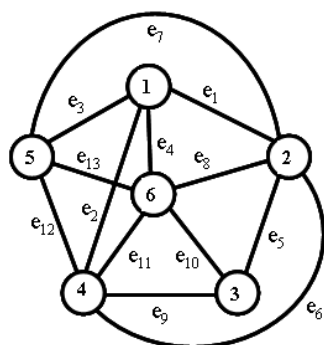


Рис. 1.3. Граф G.

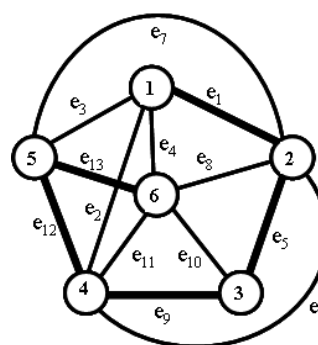


Рис. 1.4. Дерево графа G.

Множество изометрических циклов графа G:

	Циклы в ребрах	Циклы в вершинах
цикл 1:	$\{e_1, e_2, e_6\}$	$\{v_1, v_2, v_4\}$
цикл 2:	$\{e_1, e_3, e_7\}$	$\{v_1, v_2, v_5\}$
цикл 3:	$\{e_1, e_4, e_8\}$	$\{v_1, v_2, v_6\}$
цикл 4:	$\{e_2, e_3, e_{11}\}$	$\{v_1, v_4, v_5\}$
цикл 5:	$\{e_2, e_4, e_{12}\}$	$\{v_1, v_4, v_6\}$
цикл 6:	$\{e_3, e_4, e_{13}\}$	$\{v_1, v_5, v_6\}$
цикл 7:	$\{e_5, e_6, e_9\}$	$\{v_2, v_3, v_4\}$

ЦИКЛ 8:	$\{e_5, e_8, e_{10}\}$	$\{v_2, v_3, v_6\}$
ЦИКЛ 9:	$\{e_6, e_7, e_{11}\}$	$\{v_2, v_4, v_5\}$
ЦИКЛ 10:	$\{e_6, e_8, e_{12}\}$	$\{v_2, v_4, v_6\}$
ЦИКЛ 11:	$\{e_7, e_8, e_{13}\}$	$\{v_2, v_5, v_6\}$
ЦИКЛ 12:	$\{e_9, e_{10}, e_{12}\}$	$\{v_3, v_4, v_6\}$
ЦИКЛ 13:	$\{e_{11}, e_{12}, e_{13}\}$	$\{v_4, v_5, v_6\}$

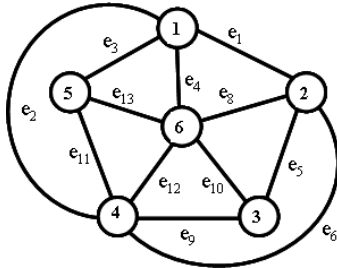


Рис. 1.5. Конфигурация k_1 .

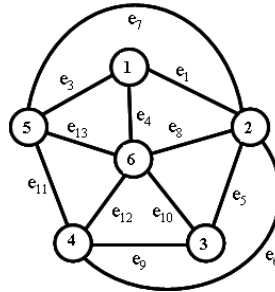


Рис. 1.6. Конфигурация k_2 .

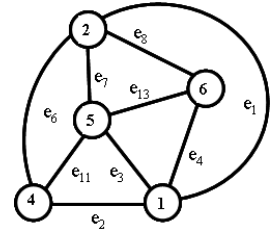


Рис. 1.7. Конфигурация k_4 .

Плоские конфигурации:

$$\begin{aligned}
 k_1 &= \{c_{13} \oplus c_{12} \oplus c_8 \oplus c_7 \oplus c_6 \oplus c_4 \oplus c_3 \oplus c_1\} = \emptyset; \\
 k_2 &= \{c_{13} \oplus c_{12} \oplus c_9 \oplus c_8 \oplus c_7 \oplus c_6 \oplus c_3 \oplus c_2\} = \emptyset; \\
 k_3 &= \{c_{13} \oplus c_{12} \oplus c_{11} \oplus c_8 \oplus c_7 \oplus c_4 \oplus c_2 \oplus c_1\} = \emptyset; \\
 k_4 &= \{c_{11} \oplus c_9 \oplus c_6 \oplus c_4 \oplus c_3 \oplus c_1\} = \emptyset; \\
 k_5 &= \{c_{12} \oplus c_8 \oplus c_7 \oplus c_5 \oplus c_3 \oplus c_1\} = \emptyset; \\
 k_6 &= \{c_{13} \oplus c_{10} \oplus c_6 \oplus c_4 \oplus c_3 \oplus c_1\} = \emptyset; \\
 k_7 &= \{c_{10} \oplus c_5 \oplus c_3 \oplus c_1\} = \emptyset; \\
 k_8 &= \{c_{13} \oplus c_6 \oplus c_5 \oplus c_4\} = \emptyset; \\
 k_9 &= \{c_{12} \oplus c_{10} \oplus c_8 \oplus c_7\} = \emptyset; \\
 k_{10} &= \{c_{11} \oplus c_6 \oplus c_3 \oplus c_2\} = \emptyset; \\
 k_{11} &= \{c_9 \oplus c_4 \oplus c_2 \oplus c_1\} = \emptyset.
 \end{aligned}$$

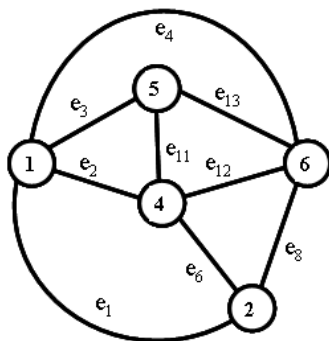


Рис. 1.8. Конфигурация k_6 .

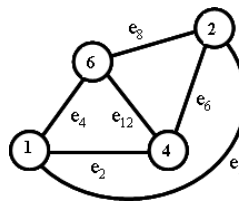


Рис. 1.9. Конфигурация k_7 .

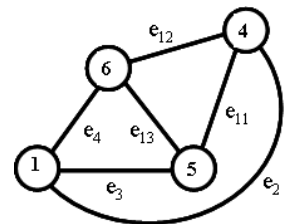


Рис. 1.10. Конфигурация k_8 .

Для выделения плоских конфигураций модифицируем метод Гаусса [7,18] для определения ранга матрицы. С этой целью выделим дерево графа, и определим хорды (см. рис. 1.4). В нашем примере, хорды - это следующие ребра графа $H = \{e_2, e_3, e_4, e_6, e_7, e_8, e_{10}, e_{11}\}$.

1.3. Модифицированный алгоритм Гаусса

Матрица изометрических циклов графа имеет вид:

	e ₁	e ₂	e ₃	e ₄	e ₅	e ₆	e ₇	e ₈	e ₉	e ₁₀	e ₁₁	e ₁₂	e ₁₃	номер цикла
c ₁	1	1				1								
c ₂	1		1				1							
c ₃	1			1				1						
c ₄		1	1								1			
c ₅		1		1								1		
c ₆			1	1									1	
c ₇					1	1			1					
c ₈					1			1		1				
c ₉						1	1				1			
c ₁₀						1		1				1		
c ₁₁							1	1					1	
c ₁₂									1	1		1		
c ₁₃											1	1	1	

Выбираем в первой строке главный элемент, в данном случае это ребро e₂ (это обязательно должна быть хорда). Строку, в которой выбирается главный элемент будем называть основной строкой. Находим в матрице циклы содержащие ребро e₂ и переставляем эти циклы в конец матрицы.

	e ₁	e ₂	e ₃	e ₄	e ₅	e ₆	e ₇	e ₈	e ₉	e ₁₀	e ₁₁	e ₁₂	e ₁₃	номер цикла
c ₁	1	1				1								
c ₂	1		1				1							
c ₃	1			1				1						
c ₄		1	1								1			
c ₅		1		1								1		
c ₆			1	1									1	
c ₇					1	1			1					
c ₈					1			1		1				
c ₉						1	1				1			
c ₁₀						1		1				1		
c ₁₁							1	1					1	
c ₁₂									1	1		1		
c ₁₃											1	1	1	

Будем называть *строки пересекающимися*, если они расположены, ниже основной строки и в них присутствует главный элемент. Объединяем пересекающиеся строки содержащие элемент e₂ с первой строкой и помещаем в конец матрицы циклов. Отмечаем пересекающиеся строки. В результате строим новую матрицу циклов.

	e ₁	e ₂	e ₃	e ₄	e ₅	e ₆	e ₇	e ₈	e ₉	e ₁₀	e ₁₁	e ₁₂	e ₁₃	номер цикла
c ₁	1	1				1								
c ₂	1		1				1							
c ₃	1			1				1						
c ₆			1	1									1	
c ₇					1	1			1					
c ₈					1			1		1				

c ₉					1	1				1			
c ₁₀					1		1				1		
c ₁₁						1	1					1	
c ₁₂								1	1		1		
c ₁₃										1	1	1	
c ₄	1		1		1					1		1	1
c ₅	1			1		1					1		1

Выбираем главный элемент во второй строке, это хорда e_3 . Находим в нижних строках матрицы циклов, циклы содержащие ребро e_3 и помещаем их в конец матрицы. Объединяем пересекающиеся строки с выбранной строкой с учетом кольцевой операции суммирования. Помечаем выделенные строки.

	e ₁	e ₂	e ₃	e ₄	e ₅	e ₆	e ₇	e ₈	e ₉	e ₁₀	e ₁₁	e ₁₂	e ₁₃	номер цикла
c ₁	1	1				1								
c ₂	1		1				1							
c ₃	1			1				1						
c ₇					1	1			1					
c ₈					1			1		1				
c ₉						1	1				1			
c ₁₀						1		1				1		
c ₁₁							1	1					1	
c ₁₂									1	1		1		
c ₁₃											1	1	1	
c ₄						1	1				1		1	1,2
c ₅	1			1		1						1		1
c ₆	1			1			1						1	2

Выбираем главный элемент в третьей строке, это хорда e_4 . Объединяем пересекающиеся строки и помечаем их.

	e ₁	e ₂	e ₃	e ₄	e ₅	e ₆	e ₇	e ₈	e ₉	e ₁₀	e ₁₁	e ₁₂	e ₁₃	номер цикла
c ₁	1	1				1								
c ₂	1		1				1							
c ₃	1			1				1						
c ₇					1	1			1					
c ₈					1			1		1				
c ₉						1	1				1			
c ₁₀						1		1				1		
c ₁₁							1	1					1	
c ₁₂									1	1		1		
c ₁₃											1	1	1	
c ₄						1	1				1		1	1,2
c ₅						1		1				1		1,3
c ₆							1	1					1	2,3

Выбираем главный элемент в четвертой строке, это хорда c_6 . Находим пересекающиеся строки, помещаем их в конец матрицы. Объединяем пересекающиеся строки.

	e_1	e_2	e_3	e_4	e_5	e_6	e_7	e_8	e_9	e_{10}	e_{11}	e_{12}	e_{13}	номер цикла
c_1	1	1				1								
c_2	1		1				1							
c_3	1			1				1						
c_7					1	1			1					
c_8					1			1		1				
c_9						1	1				1			
c_{10}						1		1				1		
c_{11}							1	1					1	
c_{12}									1	1		1		
c_{13}											1	1	1	
c_4					1		1		1		1			1,2,7
c_5					1			1	1			1		1,3,7
c_6							1	1					1	2,3
c_9					1		1		1			1		7
c_{10}					1			1	1			1		7

Выбираем главный элемент в пятой строке, это хорда e_8 . Находим пересекающиеся строки и помещаем их в конец матрицы. Объединяем с основной строкой.

	e_1	e_2	e_3	e_4	e_5	e_6	e_7	e_8	e_9	e_{10}	e_{11}	e_{12}	e_{13}	номер цикла
c_1	1	1				1								
c_2	1		1				1							
c_3	1			1				1						
c_7					1	1			1					
c_8					1			1		1				
c_{12}									1	1		1		
c_{13}											1	1	1	
c_4					1		1		1		1			1,2,7
c_5									1	1		1		1,3,7,8
c_6					1		1			1			1	2,3,8
c_9					1		1		1		1			7
c_{10}									1	1		1		7,8
c_{11}					1		1			1			1	8

Выбираем главный элемент в шестой строке, это хорда e_{10} . Находим пересекающиеся строки и помещаем их в конец матрицы. Объединяем с основной строкой.

	e_1	e_2	e_3	e_4	e_5	e_6	e_7	e_8	e_9	e_{10}	e_{11}	e_{12}	e_{13}	номер цикла
c_1	1	1				1								
c_2	1		1				1							
c_3	1			1				1						
c_7					1	1			1					
c_8					1			1		1				
c_{12}									1	1		1		
c_{13}											1	1	1	
c_4					1		1		1		1			1,2,7
c_5														1,3,7,8,12
c_6					1		1		1			1	1	2,3,8,12
c_9					1		1		1		1			7

c ₁₀														7,8,12
c ₁₁					1		1		1			1	1	8,12

Выбираем главный элемент в седьмой строке, это хорда e₁₁. Находим пересекающиеся строки и помещаем их в конец матрицы. Объединяем с основной строкой.

	e ₁	e ₂	e ₃	e ₄	e ₅	e ₆	e ₇	e ₈	e ₉	e ₁₀	e ₁₁	e ₁₂	e ₁₃	номер цикла
c ₁	1	1				1								
c ₂	1		1				1							
c ₃	1			1				1						
c ₇					1	1			1					
c ₈					1			1		1				
c ₁₂									1	1		1		
c ₁₃											1	1	1	
c ₅														1,3,7,8,12
c ₆					1		1		1			1	1	2,3,8,12
c ₉					1		1		1			1	1	7,13
c ₁₀														7,8,12
c ₁₁					1		1		1			1	1	8,12
c ₄					1		1		1			1	1	1,2,7,13

Выбираем главный элемент в следующей непустой строке, это хорда e₇. Находим пересекающиеся строки и помещаем их в конец матрицы. Объединяем с основной строкой.

	e ₁	e ₂	e ₃	e ₄	e ₅	e ₆	e ₇	e ₈	e ₉	e ₁₀	e ₁₁	e ₁₂	e ₁₃	номер цикла
c ₁	1	1				1								
c ₂	1		1				1							
c ₃	1			1				1						
c ₇					1	1			1					
c ₈					1			1		1				
c ₁₂									1	1		1		
c ₁₃											1	1	1	
c ₆					1		1		1			1	1	2,3,8,12
c ₉					1		1		1			1	1	7,13
c ₁₁					1		1		1			1	1	8,12
c ₄					1		1		1			1	1	1,2,7,13
c ₅														1,3,7,8,12
c ₁₀														7,8,12

Окончательно, имеем:

	e ₁	e ₂	e ₃	e ₄	e ₅	e ₆	e ₇	e ₈	e ₉	e ₁₀	e ₁₁	e ₁₂	e ₁₃	номер цикла
c ₁	1	1				1								
c ₂	1		1				1							
c ₃	1			1				1						
c ₇					1	1			1					
c ₈					1			1		1				
c ₁₂									1	1		1		
c ₁₃											1	1	1	
c ₆					1		1		1			1	1	2,3,8,12
c ₉														7,13,6
c ₁₁														8,12,6
c ₄														1,2,7,13,6

c ₅													1,3,7,8,12
c ₁₀													7,8,12

Строим матрицу взаимодействия циклов, заполняя ячейки соответствующими ранее определенными номерами циклов. Например, строка цикла c₅ заполняется номерами циклов 1,3,7,8,12.

	c ₁	c ₂	c ₃	c ₇	c ₈	c ₁₂	c ₁₃	c ₆	c ₉	c ₁₀	c ₁₁	c ₄	c ₅
c ₁													
c ₂													
c ₃													
c ₇													
c ₈													
c ₁₂													
c ₁₃													
c ₆		2	3		8	12							
c ₉				7			12	6					
c ₁₀				7	8	12							
c ₁₁					8	12		6					
c ₄	1	2		7			13	6					
c ₅	1		3	7	8	12							

Просматриваем строки до диагонального элемента. Если ячейки до диагонального элемента пусты, то в диагональ записывается номер цикла. Если элементы строк до диагонального элемента не пусты, то в диагональ записываются объединение номеров циклов с учетом кольцевого суммирования и номер самого цикла. Полученная запись распространяется на нижние строки, где записан данный цикл. Например, для строки с циклом c₆ до диагонали записаны номера циклов c₂,c₃,c₈,c₁₂ и добавляем номер цикла c₆. Диагональная запись имеет вид: 2,3,6,8,12. Помещаем данную запись в нижние строки матрицы вместо номера цикла c₆. В записи строки цикла c₁₁ номера циклов c₈ и c₁₂ повторяются дважды, поэтому они не включают в диагональную запись.

	c ₁	c ₂	c ₃	c ₇	c ₈	c ₁₂	c ₁₃	c ₆	c ₉	c ₁₀	c ₁₁	c ₄	c ₅
c ₁	1												
c ₂		2											
c ₃			3										
c ₇				7									
c ₈					8								
c ₁₂						12							
c ₁₃							13						
c ₆		2	3		8	12		2,3,6,8,12					
c ₉				7			13	2,3,6,8,12	2,3,6,7,8,9,12,13				
c ₁₀				7	8	12			7,8,10,12				
c ₁₁					8	12		2,3,6,8,12			2,3,6,11		
c ₄	1	2		7			13	2,3,6,8,12				1,3,4,6,7,8,12,13	
c ₅	1		3	7	8	12							1,3,5,7,8,12

Просматриваем диагонали последних строк (выделены зеленым цветом) для которых порядок больше чем $m-n+1$ и выписываем подмножества циклов определяющих плоские конфигурации.

$$k_1 = \{c_{13} \oplus c_{12} \oplus c_9 \oplus c_8 \oplus c_7 \oplus c_6 \oplus c_3 \oplus c_2\} = \emptyset;$$

$$k_2 = \{c_{12} \oplus c_{10} \oplus c_8 \oplus c_7\} = \emptyset;$$

$$k_3 = \{c_{11} \oplus c_6 \oplus c_3 \oplus c_2\} = \emptyset;$$

$$k_4 = \{c_{13} \oplus c_{12} \oplus c_8 \oplus c_7 \oplus c_6 \oplus c_4 \oplus c_3 \oplus c_1\} = \emptyset;$$

$$k_5 = \{c_{12} \oplus c_8 \oplus c_7 \oplus c_5 \oplus c_3 \oplus c_1\} = \emptyset.$$

Мы специально отправляли пересекающиеся строки в конец матрицы изометрических циклов с целью получения конфигураций с большей мощностью. Так как в общем случае, подмножество плоских конфигураций зависит от порядка расположения изометрических циклов. Например, располагая изометрические циклы в следующем порядке и в процессе расчета не переставляя строки, получим:

	Циклы в ребрах	Циклы в вершинах
цикл 1:	{e ₁ ,e ₂ ,e ₆ }	{v ₁ ,v ₂ ,v ₄ }
цикл 2:	{e ₁ ,e ₃ ,e ₇ }	{v ₁ ,v ₂ ,v ₅ }
цикл 3:	{e ₁ ,e ₄ ,e ₈ }	{v ₁ ,v ₂ ,v ₆ }
цикл 4:	{e ₂ ,e ₃ ,e ₁₁ }	{v ₁ ,v ₄ ,v ₅ }
цикл 5:	{e ₂ ,e ₄ ,e ₁₂ }	{v ₁ ,v ₄ ,v ₆ }
цикл 6:	{e ₃ ,e ₄ ,e ₁₃ }	{v ₁ ,v ₅ ,v ₆ }
цикл 7:	{e ₅ ,e ₆ ,e ₉ }	{v ₂ ,v ₃ ,v ₄ }
цикл 8:	{e ₅ ,e ₈ ,e ₁₀ }	{v ₂ ,v ₃ ,v ₆ }
цикл 9:	{e ₆ ,e ₇ ,e ₁₁ }	{v ₂ ,v ₄ ,v ₅ }
цикл 10:	{e ₆ ,e ₈ ,e ₁₂ }	{v ₂ ,v ₄ ,v ₆ }
цикл 11:	{e ₇ ,e ₈ ,e ₁₃ }	{v ₂ ,v ₅ ,v ₆ }
цикл 12:	{e ₉ ,e ₁₀ ,e ₁₂ }	{v ₃ ,v ₄ ,v ₆ }
цикл 13:	{e ₁₁ ,e ₁₂ ,e ₁₃ }	{v ₄ ,v ₅ ,v ₆ }

Строим матрицу взаимодействия циклов, заполняя ячейки соответствующими ранее определенными номерами циклов.

	c ₁	c ₂	c ₃	c ₄	c ₅	c ₆	c ₇	c ₈	c ₉	c ₁₀	c ₁₁	c ₁₂	c ₁₃
c ₁	1												
c ₂		2											
c ₃			3										
c ₄	1	2		4									
c ₅	1		3		5								
c ₆		2	3	4	5	6							
c ₇							7						
c ₈				4	5	6	7	8					
c ₉			4						9				
c ₁₀					5					10			
c ₁₁				4	5	6					11		
c ₁₂						6		8				12	
c ₁₃						6							13

Вычисляем диагональные элементы.

	c ₁	c ₂	c ₃	c ₄	c ₅	c ₆	c ₇	c ₈	c ₉	c ₁₀	c ₁₁	c ₁₂	c ₁₃
c ₁	1												
c ₂		2											
c ₃			3										

c ₄	1	2	1,2,4										
c ₅	1		3	1,3,5									
c ₆		2	3	1,2,4	1,3,5	4,5,6							
c ₇							7						
c ₈				1,2,4	2,3,4,5	4,5,6	7	1,3,4,6,7,8					
c ₉				1,2,4					1,2,4,9				
c ₁₀					1,3,5					1,3,5,10			
c ₁₁				1,2,4	1,3,5	4,5,6					2,3,6,11		
c ₁₂						4,5,6		1,3,4,6,7,8				1,3,5,7,8,12	
c ₁₃						4,5,6							4,5,6,13

Выделена следующая система зависимых циклов:

$$\begin{aligned} \{c_9 \oplus c_4 \oplus c_2 \oplus c_1\} &= \emptyset; \\ \{c_{10} \oplus c_5 \oplus c_3 \oplus c_1\} &= \emptyset; \\ \{c_{11} \oplus c_6 \oplus c_3 \oplus c_2\} &= \emptyset; \\ \{c_{13} \oplus c_6 \oplus c_5 \oplus c_4\} &= \emptyset; \\ \{c_{12} \oplus c_8 \oplus c_7 \oplus c_5 \oplus c_3 \oplus c_1\} &= \emptyset. \end{aligned}$$

Попутно образуются простые циклы:

$$\begin{aligned} \{c_1 \oplus c_2 \oplus c_4\} &= \{e_6, e_7, e_{11}\}; \\ \{c_1 \oplus c_3 \oplus c_5\} &= \{e_6, e_8, e_{12}\}; \\ \{c_4 \oplus c_5 \oplus c_6\} &= \{e_{11}, e_{12}, e_{13}\}; \\ \{c_1 \oplus c_3 \oplus c_4 \oplus c_6 \oplus c_7 \oplus c_8\} &= \{e_9, e_{10}, e_{11}, e_{12}\}. \end{aligned}$$

Расставим изометрические циклы в другой последовательности:

Множество хорд: $\{e_2, e_3, e_4, e_6, e_7, e_8, e_{10}, e_{13}\}$.

Новый номер	Старый номер		
цикл 1:	цикл 2:	{e ₁ , e ₃ , e ₇ }	{v ₁ , v ₂ , v ₅ }
цикл 2:	цикл 3:	{e ₁ , e ₄ , e ₈ }	{v ₁ , v ₂ , v ₆ }
цикл 3:	цикл 6:	{e ₃ , e ₄ , e ₁₃ }	{v ₁ , v ₅ , v ₆ }
цикл 4:	цикл 7:	{e ₅ , e ₆ , e ₉ }	{v ₂ , v ₃ , v ₄ }
цикл 5:	цикл 8:	{e ₅ , e ₈ , e ₁₀ }	{v ₂ , v ₃ , v ₆ }
цикл 6:	цикл 12:	{e ₉ , e ₁₀ , e ₁₂ }	{v ₃ , v ₄ , v ₆ }
цикл 7:	цикл 13:	{e ₁₁ , e ₁₂ , e ₁₃ }	{v ₄ , v ₅ , v ₆ }
цикл 8:	цикл 1:	{e ₁ , e ₂ , e ₆ }	{v ₁ , v ₂ , v ₄ }
цикл 9:	цикл 4:	{e ₂ , e ₃ , e ₁₁ }	{v ₁ , v ₄ , v ₅ }
цикл 10:	цикл 5:	{e ₂ , e ₄ , e ₁₂ }	{v ₁ , v ₄ , v ₆ }
цикл 11:	цикл 9:	{e ₆ , e ₇ , e ₁₁ }	{v ₂ , v ₄ , v ₅ }
цикл 12:	цикл 10:	{e ₆ , e ₈ , e ₁₂ }	{v ₂ , v ₄ , v ₆ }
цикл 13:	цикл 11:	{e ₇ , e ₈ , e ₁₃ }	{v ₂ , v ₅ , v ₆ }

Строим матрицу взаимодействия циклов, заполняя ячейки соответствующими ранее определенными номерами циклов.

	c ₁	c ₂	c ₃	c ₄	c ₅	c ₆	c ₇	c ₈	c ₉	c ₁₀	c ₁₁	c ₁₂	c ₁₃
c ₁													
c ₂													
c ₃	1	2											
c ₄													
c ₅													
c ₆													
c ₇													

c ₈			4									
c ₉	1		3		5	6	7	8				
c ₁₀		2			5	6		8				
c ₁₁			3	4	5	6	7					
c ₁₂				4	5	6						
c ₁₃			3									

Вычисляем диагональные элементы.

	c ₁	c ₂	c ₃	c ₄	c ₅	c ₆	c ₇	c ₈	c ₉	c ₁₀	c ₁₁	c ₁₂	c ₁₃
c ₁	1												
c ₂		2											
c ₃	1	2	1,2,3										
c ₄				4									
c ₅					5								
c ₆						6							
c ₇							7						
c ₈				4				4,8					
c ₉	1		1,2,3		5	6	7	4,8	2,3,4,5,6,7,8,9				
c ₁₀		2			5	6		4,8		2,4,5,6,8,10			
c ₁₁			1,2,3	4	5	6	7				1,2,3,4,5,6,7,11		
c ₁₂				4	5	6						4,5,6,12	
c ₁₃			1,2,3										1,2,3,13

Множество плоских конфигураций относительно первоначального расположения циклов имеет вид:

$$\begin{aligned} \{c_{13} \oplus c_{12} \oplus c_8 \oplus c_7 \oplus c_6 \oplus c_4 \oplus c_3 \oplus c_1\} &= \emptyset; \\ \{c_{12} \oplus c_8 \oplus c_7 \oplus c_5 \oplus c_3 \oplus c_1\} &= \emptyset; \\ \{c_{13} \oplus c_{12} \oplus c_9 \oplus c_8 \oplus c_7 \oplus c_6 \oplus c_3 \oplus c_2\} &= \emptyset; \\ \{c_{12} \oplus c_{10} \oplus c_8 \oplus c_7\} &= \emptyset; \\ \{c_{11} \oplus c_6 \oplus c_3 \oplus c_2\} &= \emptyset. \end{aligned}$$

Попутно образуются простые циклы:

$$\begin{aligned} \{c_2 \oplus c_3 \oplus c_6\} &= \{e_7, e_8, e_{13}\}; \\ \{c_1 \oplus c_7\} &= \{e_1, e_2, e_5, e_9\}. \end{aligned}$$

1.4. Построение плоских конфигураций с заданным ободом

Выделим в графа простой цикл и будем считать его ободом для совокупности изометрических циклов. Поместим его в качестве последнего элемента в матрице изометрических циклов. Например, для нашего графа G выбираем цикл состоящий из следующих ребер $\{e_1, e_2, e_5, c_{10}, c_{11}, c_{13}\}$. Применим метод Гаусса и определим состав изометрических циклов для заданного обода. Матрица циклов имеет вид:

цикл 1:	$\{e_1, e_2, e_6\};$	цикл 2:	$\{e_1, e_3, e_7\};$
цикл 3:	$\{e_1, e_4, e_8\};$	цикл 4:	$\{e_2, e_3, e_{11}\};$
цикл 5:	$\{e_2, e_4, e_{12}\};$	цикл 6:	$\{e_3, e_4, e_{13}\};$
цикл 7:	$\{e_5, e_6, e_9\};$	цикл 8:	$\{e_5, e_8, e_{10}\};$
цикл 9:	$\{e_6, e_7, e_{11}\};$	цикл 10:	$\{e_6, e_8, e_{12}\};$
цикл 11:	$\{e_7, e_8, e_{13}\};$	цикл 12:	$\{e_9, e_{10}, e_{12}\};$
цикл 13:	$\{e_{11}, e_{12}, e_{13}\};$		
цикл 14:	$\{e_1, e_2, e_5, e_{10}, e_{11}, e_{13}\}.$		

Строим матрицу взаимодействия циклов, заполняя ячейки соответствующими ранее определенными номерами циклов.

	c ₁	c ₂	c ₃	c ₄	c ₅	c ₆	c ₇	c ₈	c ₉	c ₁₀	c ₁₁	c ₁₂	c ₁₃	c ₁₄
c ₁														
c ₂														
c ₃														
c ₄	1													
c ₅	1		3	4										
c ₆			3		5									
c ₇				4										
c ₈					5		7							
c ₉		2		4										
c ₁₀				4	5									
c ₁₁		2			5	6								
c ₁₂								8						
c ₁₃						6	7							
c ₁₄	1			4		6	7	8						

Вычисляем диагональные элементы.

	c ₁	c ₂	c ₃	c ₄	c ₅	c ₆	c ₇	c ₈	c ₉	c ₁₀	c ₁₁	c ₁₂	c ₁₃	c ₁₄
c ₁	1													
c ₂		2												
c ₃			3											
c ₄	1			1,4										
c ₅	1		3	1,4	3,4,5									
c ₆			3		3,4,5	4,5,6								
c ₇				1,4			1,4,7							
c ₈					3,4,5		1,4,7	1,3,5,7,8						
c ₉		2		1,4					1,2,4,9					
c ₁₀				1,4	3,4,5					1,3,5,10				
c ₁₁		2			3,4,5	4,5,6					2,3,6,11			
c ₁₂								1,3,5,7,8				1,3,5,7,8,12		
c ₁₃						4,5,6	1,4,7						5,6,7,13	
c ₁₄	1			1,4		4,5,6	1,4,7	1,3,5,7,8						3,4,6,8,14

Откуда получаем (см. рис. 1.9):

$$\{c_{14} \oplus c_8 \oplus c_6 \oplus c_4 \oplus c_3\} = \emptyset.$$

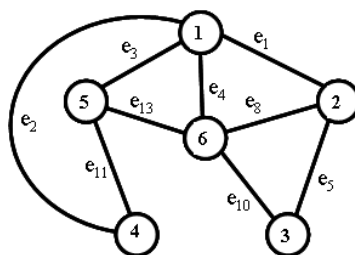


Рис. 1.9. Плоская конфигурация с заданным ободом.

Естественно, результат вычислений зависит от порядка расположения элементов в матрице циклов. Следует заметить, что одновременно можно располагать не один цикл, а не-

сколько простых циклов, считая каждый из них ободом графа, располагая их в конце матрицы циклов.

1.5. Дополнение плоских конфигураций

Плоские конфигурации можно дополнять ребрами и вершинами.

Например, плоскую конфигурацию $\{c_{13}, c_{10}, c_6, c_4, c_3, c_1\}$ можно дополнить включив вершину v_3 вместе с ребрами e_5, e_9, e_{10} и построить рисунок для максимально плоского суграфа.

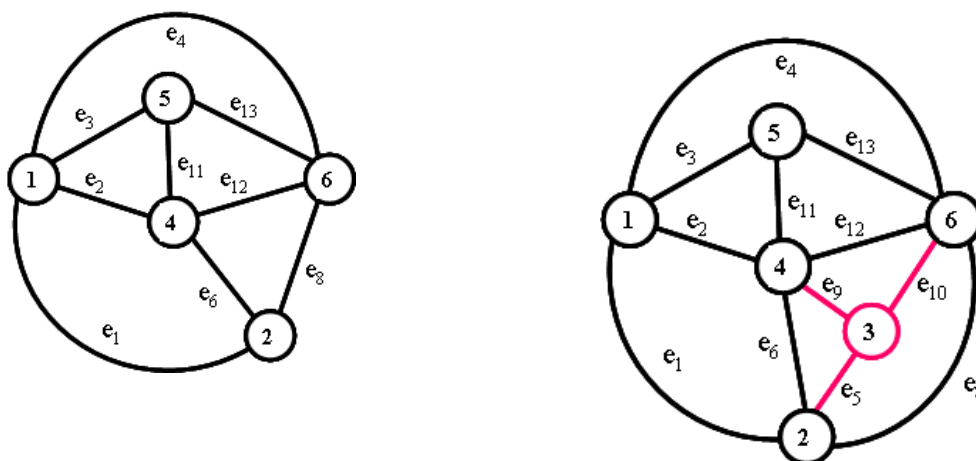


Рис. 1.10. Добавление вершины v_3 с ребрами в плоскую конфигурацию $\{c_{13}, c_{10}, c_6, c_4, c_3, c_1\}$.

Рисунок максимально плоского суграфа можно построить подключив к ободу $\{e_1, e_2, e_5, c_{10}, c_{11}, c_{13}\}$ ребра e_6, e_9, e_{12} .

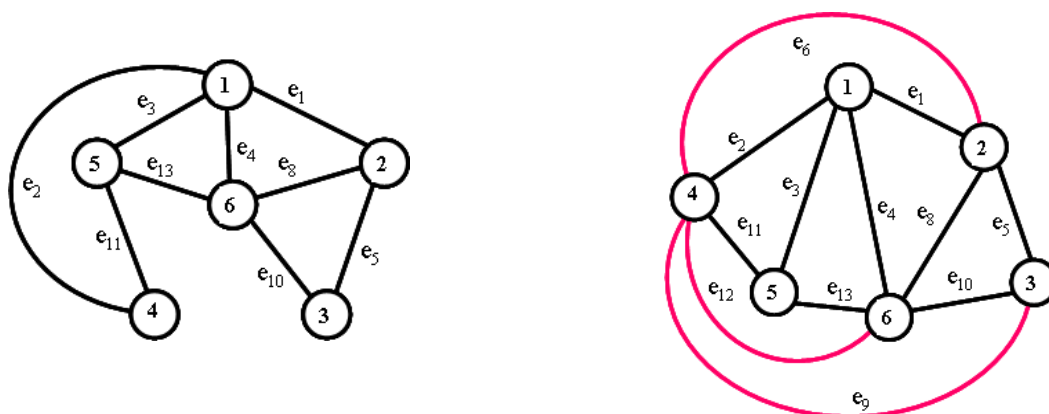


Рис. 1.11. Подключение к ободу $\{e_1, e_2, e_5, c_{10}, c_{11}, c_{13}\}$ ребер e_6, e_9, e_{12} .

Для некоторых графов, построения максимально плоского суграфа может быть определено нахождением максимальной плоской конфигурации.

Пример 1.2. Например, рассмотрим граф представленного на рис. 1.12. Множество изометрических циклов графа имеет вид:

	Множество изометрических циклов графа в виде ребер:	Множество изометрических циклов графа в виде вершин:
множество 1	$\{e_1, e_2, e_{10}, e_{12}\};$	$\{v_1, v_3, v_7, v_9\};$
множество 2	$\{e_1, e_3, e_{10}, e_{13}\};$	$\{v_1, v_3, v_7, v_{10}\};$
множество 3	$\{e_1, e_3, e_{15}, e_{16}\};$	$\{v_1, v_4, v_7, v_{10}\};$

МНОЖЕСТВО 4	$\{e_1, e_4, e_{15}, e_{17}\};$	$\{v_1, v_4, v_7, v_{11}\};$
МНОЖЕСТВО 5	$\{e_2, e_3, e_6, e_7\};$	$\{v_1, v_2, v_9, v_{10}\};$
МНОЖЕСТВО 6	$\{e_2, e_3, e_{12}, e_{13}\};$	$\{v_1, v_3, v_9, v_{10}\};$
МНОЖЕСТВО 7	$\{e_2, e_4, e_{21}, e_{22}\};$	$\{v_1, v_5, v_9, v_{11}\};$
МНОЖЕСТВО 8	$\{e_3, e_4, e_{16}, e_{17}\};$	$\{v_1, v_4, v_{10}, v_{11}\};$
МНОЖЕСТВО 9	$\{e_5, e_6, e_{11}, e_{12}\};$	$\{v_2, v_3, v_8, v_9\};$
МНОЖЕСТВО 10	$\{e_5, e_6, e_{20}, e_{21}\};$	$\{v_2, v_5, v_8, v_9\};$
МНОЖЕСТВО 11	$\{e_5, e_7, e_{11}, e_{13}\};$	$\{v_2, v_3, v_8, v_{10}\};$
МНОЖЕСТВО 12	$\{e_5, e_8, e_{20}, e_{23}\};$	$\{v_2, v_5, v_8, v_{12}\};$
МНОЖЕСТВО 13	$\{e_6, e_7, e_{12}, e_{13}\};$	$\{v_2, v_3, v_9, v_{10}\};$
МНОЖЕСТВО 14	$\{e_6, e_8, e_{21}, e_{23}\};$	$\{v_2, v_5, v_9, v_{12}\};$
МНОЖЕСТВО 15	$\{e_7, e_8, e_{16}, e_{18}\};$	$\{v_2, v_4, v_{10}, v_{12}\};$
МНОЖЕСТВО 16	$\{e_9, e_{10}, e_{14}, e_{15}\};$	$\{v_3, v_4, v_6, v_7\};$
МНОЖЕСТВО 17	$\{e_9, e_{11}, e_{19}, e_{20}\};$	$\{v_3, v_5, v_6, v_8\};$
МНОЖЕСТВО 18	$\{e_9, e_{12}, e_{19}, e_{21}\};$	$\{v_3, v_5, v_6, v_9\};$
МНОЖЕСТВО 19	$\{e_9, e_{13}, e_{14}, e_{16}\};$	$\{v_3, v_4, v_6, v_{10}\};$
МНОЖЕСТВО 20	$\{e_{10}, e_{13}, e_{15}, e_{16}\};$	$\{v_3, v_4, v_7, v_{10}\};$
МНОЖЕСТВО 21	$\{e_{11}, e_{12}, e_{20}, e_{21}\};$	$\{v_3, v_5, v_8, v_9\};$
МНОЖЕСТВО 22	$\{e_{14}, e_{17}, e_{19}, e_{22}\};$	$\{v_4, v_5, v_6, v_{11}\};$
МНОЖЕСТВО 23	$\{e_{14}, e_{18}, e_{19}, e_{23}\};$	$\{v_4, v_5, v_6, v_{12}\};$
МНОЖЕСТВО 24	$\{e_{17}, e_{18}, e_{22}, e_{23}\};$	$\{v_4, v_5, v_{11}, v_{12}\};$

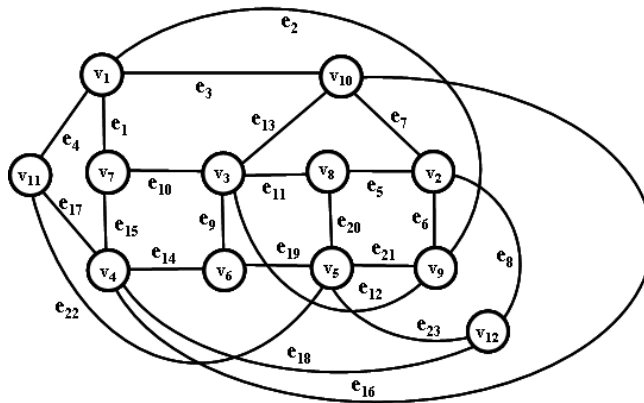


Рис. 1.12. . Граф G.

Здесь плоская конфигурация порождает рисунок максимально плоского суграфа с удаленными ребрами $\{e_2, e_{12}, e_{22}\}$.

$$\{c_2 \oplus c_4 \oplus c_8 \oplus c_{10} \oplus c_{11} \oplus c_{14} \oplus c_{15} \oplus c_{16} \oplus c_{17} \oplus c_{23}\} = \emptyset.$$

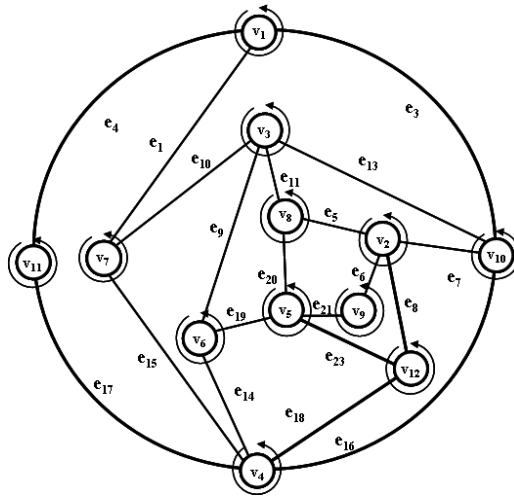


Рис. 1.13. Максимально плоский суграф непланарного графа.

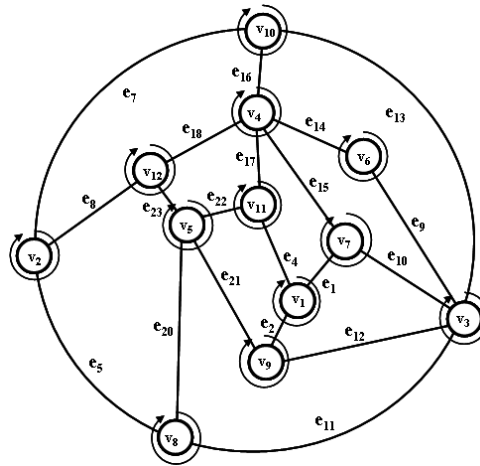


Рис. 1.14. Рисунок плоской части графа G.

Другая конфигурация характеризует топологический рисунок близкий к максимально плоскому суграфу:

$$\{c_1 \oplus c_4 \oplus c_7 \oplus c_{11} \oplus c_{12} \oplus c_{15} \oplus c_{16} \oplus c_{19} \oplus c_{21} \oplus c_{24}\} = \emptyset.$$

Здесь плоская конфигурация порождает топологический рисунок близкий к максимально плоскому суграфу с удаленными ребрами $\{e_3, e_6, e_{19}\}$.

Диаграмма топологического рисунка графа имеет вид:

v ₁ :	v ₇	v ₉	v ₁₁		
v ₂ :	v ₁₁	v ₁₂	v ₈		
v ₃ :	v ₁	v ₇	v ₆	v ₁₀	v ₈
v ₄ :	v ₆	v ₇	v ₁₁	v ₁₂	v ₁₀
v ₅ :	v ₉	v ₈	v ₁₂	v ₁₁	
v ₆ :	v ₃	v ₄			
v ₇ :	v ₁	v ₄	v ₃		
v ₈ :	v ₂	v ₅	v ₃		
v ₉ :	v ₁	v ₃	v ₅		
v ₁₀ :	v ₂	v ₃	v ₄		
v ₁₁ :	v ₁	v ₅	v ₄		

$v_{12}: v_2 v_4 v_5$

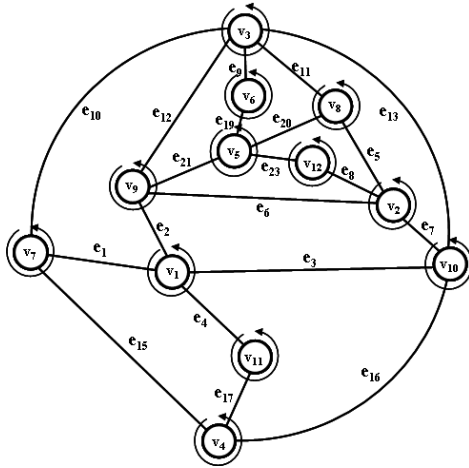


Рис. 1.15. Рисунок с удаленными ребрами e_{14}, e_{18}, e_{22}

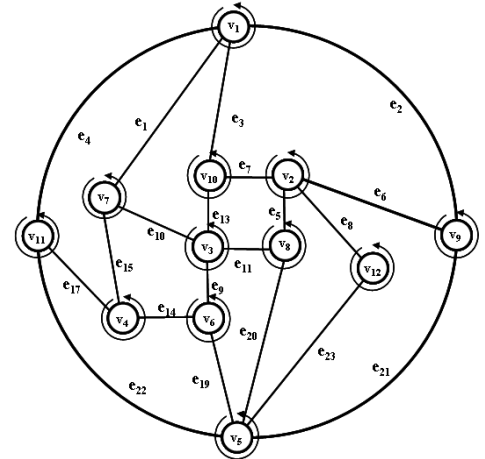


Рис. 1.16. Рисунок с удаленными ребрами e_{12}, e_{16}, e_{18} .

Различные плоские конфигурации представляют топологические рисунки графов близких к максимально плоскому суграфу.

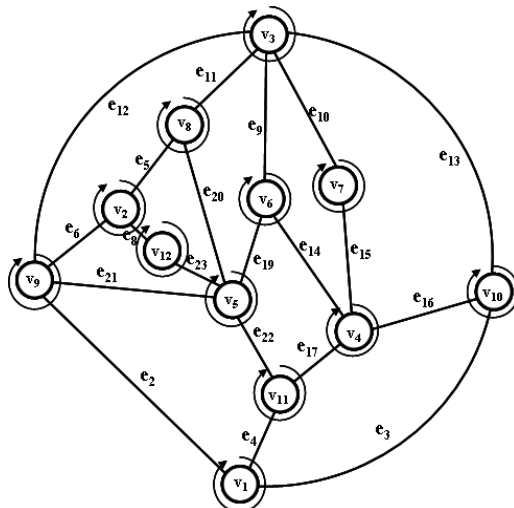


Рис. 1.17. Рисунок с удаленными ребрами e_1, e_7, e_{18} .

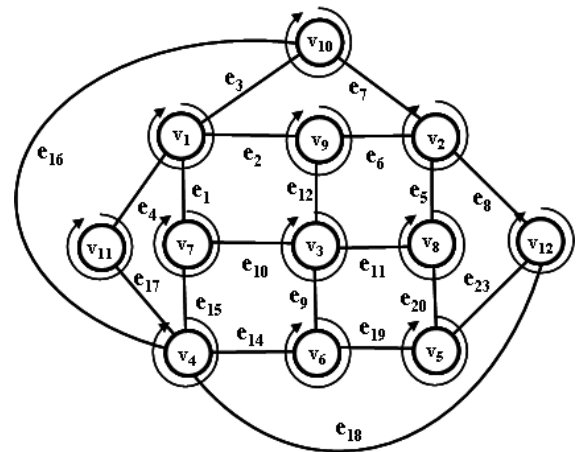


Рис. 1.18. Рисунок с удаленными ребрами e_{13}, e_{21}, e_{22} .

Для рассмотренных топологических рисунков произведено удаление только трех ребер, что и составляет рисунок графа близкого к максимально плоскому суграфу.

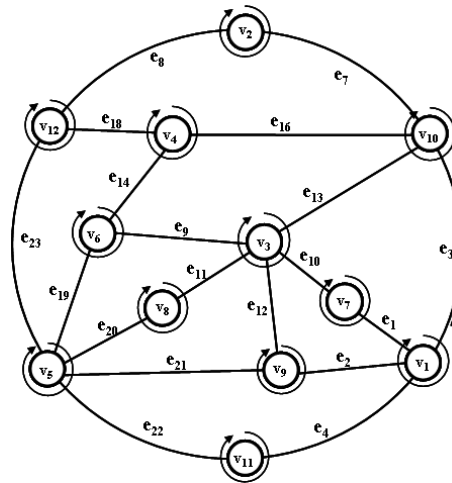


Рис. 1.19. Рисунок с удаленными ребрами e_5, e_6, e_{15}, e_{17} .

На рис. 1.19. представлены топологический рисунок графа с четырьмя удаленными ребрами.

Алгоритм выделения множества плоских конфигураций представляет собой модернизированный метод Гасса с поиском главных элементов характеризующих хорды графа. Вычислительная сложность алгоритма составляет величину равную $O(n^3)$.

Выводы

На основании рассмотренного можно сделать следующие выводы:

- понятие плоской конфигурации определяет систему элементов состоящую из изометрических циклов графа, кольцевая сумма которой есть пустое множество;
- множество плоских конфигураций графа можно найти используя модифицированный алгоритм Гаусса для определения ранга матрицы;
- представлен модифицированный алгоритм Гаусса;
- состав и структура множества плоских конфигураций определяется порядком расположения элементов в матрице изометрических циклов графа и выбора дерева графа;
- возможно существование плоской конфигурации определяющей топологический рисунок близкий к максимально плоскому суграфу.

Глава 2. МЕТОДЫ ВЫДЕЛЕНИЯ ПЛОСКОЙ ЧАСТИ ГРАФА

2.1. Выделение плоской части непланарного графа

Построение алгоритма решения задачи выделения плоской части графа с минимальным количеством удаленных ребер и построение его топологического рисунка, требует предварительного рассмотрения некоторых способов решения и их описание. Очевидно, что метод должен предполагать последовательное удаление циклов из заданного множества циклов до получения подмножества циклов с нулевым значением функционала Маклейна. При этом предполагается удаление минимального количества ребер и вершин. Естественно, что множество исходных циклов должно состоять из изометрических циклов, так как любой простой цикл в графе суть линейная комбинация независимых изометрических циклов графа.

В работах показано [5,50], что структурное число W , полученное как произведение однострочных структурных чисел, характеризующих простые циклы, проходящие по хордам графа на выделенном дереве, определяет все множество базисов, состоящих из простых циклов, и его построение не зависит от выбора дерева графа.

Так как любой столбец структурного числа W характеризует систему независимых циклов, то соответствующему столбцу можно поставить в соответствие значение функционала Маклейна. Однако, ввиду того, что величина функционала Маклейна является интегральной характеристикой множества (подмножества) циклов, не удается для каждого цикла графа поставить в соответствие число γ_i так, чтобы сумма всех γ_i ($i = 1, 2, \dots, \gamma(G)$) определяла какое-то числовое значение. Однако можно поставить подмножеству изометрических циклов в соответствие значение функционала Маклейна.

Напомним, что алгебраической обратной производной структурного числа называется структурное число $\delta W / \delta \alpha$, равное:

$$\frac{\delta W}{\delta \alpha} = W \mid \text{столбцы, содержащие элемент } \alpha, \text{ опущены.} \quad (2.1)$$

Воспользовавшись способом записи структурного числа в виде семейства множеств, можно записать обратную производную как:

$$\frac{\delta W}{\delta \alpha} = \{w_i \mid \alpha \notin w_i, w_i \in W\} \quad (2.2)$$

Алгебраическая обратная производная структурного числа W эквивалентна рассмотрению множеств базисов, не содержащих базисы с номером α .

Таким образом, множество базисов, состоящих из простых циклов (или суграфов) можно записывать и хранить в компактном виде как результат произведения однострочных структурных чисел, состоящих из номеров суграфов (циклов), включающих хорды графа (т.е. в виде структурного числа W).

Таким образом, из множества изометрических циклов можно удалять циклы с использованием операции взятия алгебраической обратной производной структурного числа графа.

Рассмотрим задачу построения топологического рисунка планарного графа как задачу дискретной оптимизации. Будем рассматривать метод дискретной оптимизации - метод наискорейшего спуска

2.2. Метод наискорейшего спуска

В нашем случае метод наискорейшего спуска выглядит следующим образом. Задано дискретное пространство C_{\square} ; целевая функция в виде функционала Маклейна $F(c)$, $c \in C_{\tau}$. Требуется найти c' : $F(c') = \min F(c)$, $c \in C_{\tau}$, $\text{card } p = m-n+1$, в задаче глобальной оптимизации или $F(c') = \min F(c)$, $\text{card } p = m-n+1, \in Q \subset C_{\tau}$, в задаче локальной оптимизации. Где p – количество циклов в выделенном подмножестве.

Метод наискорейшего спуска является локально оптимальным и реализует некоторую стратегию частичного перебора. Он заключается в следующем [9,11,15,32,35,39].

Задается некоторое число равное значению функционала Маклейна, определенное для всего множества изометрических циклов C_{τ} . Затем путем последовательного исключения каждого цикла, определяем значение функционала Маклейна для каждого случая. Определяем цикл c_1 максимально изменяющий значение функционала Маклейна. Для подмножества изометрических циклов без выбранного цикла (обозначим его $Q_1 \in C_{\tau} \setminus \{c_1\}$), будем иметь значение функционала $F(Q_1)$ Вновь путем последовательного исключения каждого цикла, определяем значение функционала Маклейна для каждого случая. Определяем цикл c_2 максимально изменяющий значение функционала Маклейна. Для подмножества изометрических циклов без выбранных двух циклов (обозначим его $Q_2 \in C_{\tau} \setminus \{c_1, c_2\}$), будем иметь значение функционала $F(Q_2)$ и т.д. Поиск решения заканчивается, когда количество оставшихся изометрических циклов в подмножестве равно цикломатическому числу графа.

В результате формируется последовательность локальных минимумов $F(C_{\tau}) > F(Q_1) > F(Q_2) > \dots > F(Q_{p-m+n-1})$. Выделенное подмножество изометрических циклов $Q_{p-m+n-1}$ является решением задачи выделения базиса изометрических циклов. Если значение функционала Маклейна для выделенного подмножества изометрических циклов равно нулю, то граф планарен.

Рассмотрим вопрос подробнее. Пусть имеется некоторое множество изометрических циклов C_{τ} мощностью $\text{card}(C_{\tau}) = p$ и, определенным образом, связанное с ним семейство его подмножеств $Q(C_{\tau})$. Будем считать, что множество C_{τ} упорядоченно.

Составим характеристический двоичный вектор \mathbf{Z} состоящий из нулей и единиц. $z_i = 1$ означает, что элемент (цикл) с номером i выбирается в качестве элемента подмножества, а $z_i = 0$ означает, что элемент с номером i не входит в подмножество. Любое подмножество $\mathbf{Z} \in C_\tau$ однозначно задается своим характеристическим вектором.

Каждому характеристическому вектору имеющего не менее $\nu(G) = m-n+1$ единиц можно поставить в соответствии значение функционала Маклейна. И тогда по условию задачи, необходимо найти характеристический вектор размерностью $\nu(G) = m-n+1$ единиц (базис подпространства циклов графа) с нулевым значением функционала Маклейна. Если граф планарен, то такой двоичный характеристический вектор существует.

Пример 2.1. Для графа, представленного на рис. 2.1, множество C_\square изометрических циклов имеет вид:

- $c_1 = \{e_1, e_3, e_5\};$
- $c_2 = \{e_2, e_3, e_4\};$
- $c_3 = \{e_4, e_8, e_9\};$
- $c_4 = \{e_5, e_6, e_{12}\};$
- $c_5 = \{e_5, e_8, e_{13}\};$
- $c_6 = \{e_6, e_7, e_{11}\};$
- $c_7 = \{e_7, e_8, e_{10}\};$
- $c_8 = \{e_1, e_2, e_9, e_{13}\};$
- $c_9 = \{e_{10}, e_{11}, e_{12}, e_{13}\}.$

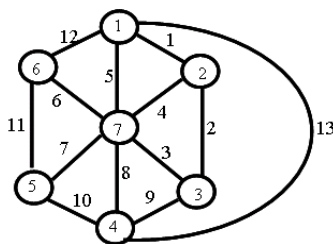


Рис. 2.1. Граф G.

И тогда можно записать точки характерного векторного подпространства циклов в виде двоичных векторов, где:

$q_0 = \{c_1, c_2, c_3, c_4, c_5, c_6, c_7, c_8, c_9\} \rightarrow z_0 = (1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1)$ – описывает подмножество состоящее из всех изометрических циклов графа;

$q_1 = \{c_2, c_3, c_4, c_5, c_6, c_7, c_8, c_9\} \rightarrow z_1 = (0, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1)$ – описывает подмножество состоящее из всех изометрических циклов графа за исключением цикла c_1 ;

.....

$q_9 = \{c_1, c_2, c_3, c_4, c_5, c_6, c_7, c_8, c_9\} \rightarrow z_9 = (1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 0)$ – описывает подмножество состоящее из всех изометрических циклов графа за исключением цикла c_9 ;

$q_{10} = \{c_3, c_4, c_5, c_6, c_7, c_8, c_9\} \rightarrow z_{10} = (0, 0, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1)$ – описывает подмножество состоящее из всех изометрических циклов графа за исключением циклов c_1 и c_2 ;

.....
 $q_{45} = \{c_1, c_2, c_3, c_4, c_5, c_6, c_7\} \rightarrow z_{45} = (1, 1, 1, 1, 1, 1, 0, 0)$ – описывает подмножество состоящее из всех изометрических циклов графа за исключением циклов c_8 и c_9 . И так далее.

С другой стороны, все множество базисов состоящих из изометрических циклов, можно рассматривать как структурное число W . И тогда наличие операции взятия обратной производной структурного числа позволяет пошагово записать процесс перехода от подмножеств, имеющих характерные вектора, состоящие из g единиц (то есть мощностью g), к подмножествам, имеющим характерные вектора, состоящие из $g-1$ единиц (то есть мощностью $g-1$). То есть, имеется возможность построить алгоритм последовательного исключения циклов из множества изометрических циклов до получения базиса с минимальным значением функционала Маклейна. Причем направление изменения значения функционала Маклейна, по аналогии с методами оптимизации непрерывных функций, задает операция взятия обратной производной структурного числа W .

Свяжем метод наискорейшего спуска с методами алгебры структурных чисел для определения поставленной цели. Все множество базисов изометрических циклов W можно получить как произведение однострочных структурных чисел [5], характеризующих подмножество изометрических циклов с ребром, принадлежащим хорде графа для выбранного дерева. Таким образом:

$$W = q_1 \times q_2 \times \dots \times q_{n-m+1}. \quad (2.3)$$

Требуется из множества наборов базисов (элементов структурного числа состоящих из изометрических циклов) $W = \{w_1, w_2, \dots, w_p\}$ найти элемент w_k с определенным значением функционала Маклейна.

$$F(C_b) = F \frac{\delta W^h}{\delta \alpha_1 \delta \alpha_2 \dots \delta \alpha_h} \rightarrow const, \quad (2.4)$$

здесь $h = \text{card}(C_\tau) - (m-n+1)$ – количество удаленных циклов, α_i – удаляемый цикл, $F(Q_i)$ – значение функционала Маклейна для подмножества циклов $Q_i \subset C_\tau$.

И тогда подмножество, состоящее из определенного набора двоичных векторов, можно описывать структурным числом. Например:

W – структурное число описывающее все базисы состоящие из всех изометрических циклов графа;

$\frac{\delta W}{\delta c_1}$ – структурное число описывающее подмножество базисов, состоящее из всех изометрических циклов графа, за исключением базисов содержащих цикл c_1 . А также описывает все подмножества изометрических циклов с количеством элементов не менее цикломатического числа и без присутствия цикла c_1 . Например,

$\{c_2, c_3, c_4, c_5, c_6, c_7, c_8, c_9\}, \{c_2, c_3, c_5, c_6, c_7, c_8, c_9\}, \{c_3, c_4, c_5, c_6, c_7, c_8, c_9\}, \{c_2, c_3, c_4, c_5, c_6, c_8, c_9\}, \dots$ и т.д.

$\frac{\delta^2 W}{\delta c_5 \delta c_9}$ - структурное число описывающее подмножество базисов, состоящее из всех

изометрических циклов графа, за исключением базисов содержащих циклы c_5 и c_9 .

При применении градиентных методов, в случае решения оптимизационных задач для непрерывных функций, замечено, что они сходятся к минимуму с высокой скоростью (со скоростью геометрической прогрессии) для гладких выпуклых функций. У таких функций наибольшее M и наименьшее m (собственные значения матрицы вторых производных - матрицы Гессе $H(z)$) мало отличаются друг от друга, т. е. матрица $H(z)$ хорошо обусловлена.

В нашем случае, целевая функция и множество циклов выпуклы, и для каждого подмножества Z , состоящего из изометрических циклов с мощностью большей цикломатического числа, можно составить матрицу со свойствами адекватными матрице Гесса:

$$H(Z) = \begin{pmatrix} \emptyset & \frac{\delta^2 Z}{\delta \alpha_1 \delta \alpha_2} & \dots & \frac{\delta^2 Z}{\delta \alpha_1 \delta \alpha_t} \\ \frac{\delta^2 Z}{\delta \alpha_2 \delta \alpha_1} & \emptyset & \dots & \frac{\delta^2 Z}{\delta \alpha_2 \delta \alpha_t} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\delta^2 Z}{\delta \alpha_t \delta \alpha_1} & \frac{\delta^2 Z}{\delta \alpha_t \delta \alpha_2} & \dots & \emptyset \end{pmatrix}. \quad (2.5)$$

где t - количество изометрических циклов в данном подмножестве.

Множество изометрических циклов графа будем обозначать как C_τ . Базис линейного подпространства циклов состоящего из изометрических циклов мощностью равной цикломатическому числу графа $\nu(G) = m - n + 1$ будем обозначать, как c_b . В свою очередь, $c_b \in C_\tau$.

С множеством изометрических циклов в графе связан ряд инвариантов графа [1,4,9,11-14]. Одним из таких инвариантов является мощность множества изометрических циклов C_τ . Другим инвариантом может служить вектор количества изометрических циклов, упорядоченный по возрастанию их длин [26,30,36]. Следующим инвариантом, по аналогии с вектором локальных степеней, является вектор количества изометрических циклов проходящих по ребрам графа. Будем называть его *вектором циклов по ребрам*:

$$P_e = (a_1, a_2, \dots, a_m), \quad (2.6)$$

где a_i - количество изометрических циклов графа, проходящих по ребру $e_i, i = (1, 2, \dots, m)$.

Инвариантом является также вектор количества изометрических циклов проходящих по вершинам графа. Будем называть его *вектором циклов по вершинам*:

$$P_v = (b_1, b_2, \dots, b_n), \quad (2.7)$$

где b_j - количество изометрических циклов графа, проходящих по вершине $v_j, j = (1, 2, \dots, n)$.

Теперь можно описать алгоритм выделения базиса планарного графа, состоящего из изометрических циклов методом наискорейшего спуска.

Шаг 1. [Взятие обратной производной].

К каждому элементу подмножества изометрических циклов применяем операцию взятия обратной производной. В результате получим подмножества состоящие из оставшихся элементов. Идем на шаг 2.

Шаг 2. [Выделение подмножества с минимальным значением функционала Маклейна].

Среди полученного выделяем подмножество изометрических циклов, имеющее минимальное значение функционала Маклейна. Если таких подмножеств несколько, то среди них выбираем то, у которого в строке имеется минимальный элемент матрицы $H(Z)$. Идем на шаг 3.

Шаг 3. [Определение количества элементов].

Если количество элементов в подмножестве больше цикломатического числа, то идем на шаг 1. Если количество элементов равно цикломатическому числу графа, то конец работы алгоритма. При значении функционала Маклейна равного нулю - граф планарен. В противном случае - непланарен.

Сказанное поясним на следующем примере выделения плоской части планарного графа.

Пример 8.2. Определить является ли граф G представленный на рис. 2.2 планарным, и если он планарен построить плоский рисунок для графа G .

$$|V|=11; |E|=20; \nu(G)=10.$$

Множество изометрических циклов графа C_τ :

$$\begin{aligned} c_1 &= \{e_1, e_3, e_5, e_{11}\}; c_2 = \{e_1, e_4, e_6, e_{16}\}; c_3 = \{e_2, e_3, e_7, e_9\}; c_4 = \{e_2, e_3, e_8, e_{13}\}; \\ c_5 &= \{e_2, e_4, e_8, e_{14}\}; c_6 = \{e_3, e_4, e_{13}, e_{14}\}; c_7 = \{e_5, e_6, e_{12}, e_{14}, e_{16}\}; \\ c_8 &= \{e_5, e_6, e_{12}, e_{15}, e_{19}\}; c_9 = \{e_7, e_8, e_{10}\}; c_{10} = \{e_9, e_{10}, e_{13}\}; c_{11} = \{e_{11}, e_{12}, e_{13}\}; \\ c_{12} &= \{e_1, e_2, e_5, e_8, e_{12}\}; c_{13} = \{e_1, e_4, e_5, e_{12}, e_{14}\}; c_{14} = \{e_{14}, e_{15}, e_{16}, e_{19}\}; \\ c_{15} &= \{e_{14}, e_{15}, e_{17}, e_{20}\}; c_{16} = \{e_{16}, e_{17}, e_{18}\}; c_{17} = \{e_{18}, e_{19}, e_{20}\}. \end{aligned}$$

Функционал Маклейна для множества изометрических циклов равен: $F(G_\tau) = 92$;

$$\begin{aligned} F\left(\frac{\delta W}{\delta c_1}\right) &= 78; F\left(\frac{\delta W}{\delta c_2}\right) = 78; F\left(\frac{\delta W}{\delta c_3}\right) = 84; F\left(\frac{\delta W}{\delta c_4}\right) = 76; F\left(\frac{\delta W}{\delta c_5}\right) = 72; \\ F\left(\frac{\delta W}{\delta c_6}\right) &= 72; F\left(\frac{\delta W}{\delta c_7}\right) = 66; F\left(\frac{\delta W}{\delta c_8}\right) = 74; F\left(\frac{\delta W}{\delta c_9}\right) = 88; F\left(\frac{\delta W}{\delta c_{10}}\right) = 88; \\ F\left(\frac{\delta W}{\delta c_{11}}\right) &= 82; F\left(\frac{\delta W}{\delta c_{12}}\right) = 68; F\left(\frac{\delta W}{\delta c_{13}}\right) = 64; F\left(\frac{\delta W}{\delta c_{14}}\right) = 76; F\left(\frac{\delta W}{\delta c_{15}}\right) = 82; \\ F\left(\frac{\delta W}{\delta c_{16}}\right) &= 88; F\left(\frac{\delta W}{\delta c_{17}}\right) = 90. \end{aligned}$$

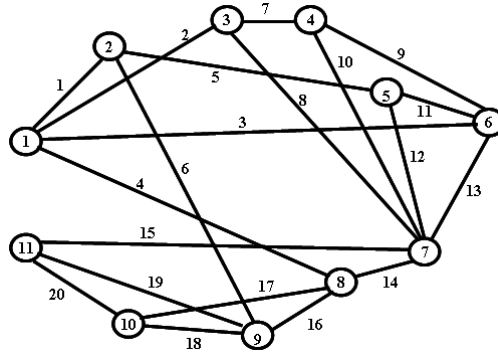


Рис. 2.2. Граф G.

Максимальное изменение значения функционала Маклейна получается после удаления цикла s_{13} . Удаляем цикл s_{13} . Продолжая процесс, получим:

$$\begin{aligned}
 &F\left(\frac{\delta^2 W}{\delta c_{13} \delta c_1}\right) = 54; \quad F\left(\frac{\delta^2 W}{\delta c_{13} \delta c_2}\right) = 54; \quad F\left(\frac{\delta^2 W}{\delta c_{13} \delta c_3}\right) = 56; \quad F\left(\frac{\delta^2 W}{\delta c_{13} \delta c_4}\right) = 48; \\
 &F\left(\frac{\delta^2 W}{\delta c_{13} \delta c_5}\right) = 48; \quad F\left(\frac{\delta^2 W}{\delta c_{13} \delta c_6}\right) = 48; \quad F\left(\frac{\delta^2 W}{\delta c_{13} \delta c_7}\right) = 44; \quad F\left(\frac{\delta^2 W}{\delta c_{13} \delta c_8}\right) = 50; \\
 &F\left(\frac{\delta^2 W}{\delta c_{13} \delta c_9}\right) = 60; \quad F\left(\frac{\delta^2 W}{\delta c_{13} \delta c_{10}}\right) = 60; \quad F\left(\frac{\delta^2 W}{\delta c_{13} \delta c_{11}}\right) = 56; \quad F\left(\frac{\delta^2 W}{\delta c_{13} \delta c_{12}}\right) = 46; \\
 &F\left(\frac{\delta^2 W}{\delta c_{13} \delta c_{14}}\right) = 50; \quad F\left(\frac{\delta^2 W}{\delta c_{13} \delta c_{15}}\right) = 56; \quad F\left(\frac{\delta^2 W}{\delta c_{13} \delta c_{16}}\right) = 60; \quad F\left(\frac{\delta^2 W}{\delta c_{13} \delta c_{17}}\right) = 62.
 \end{aligned}$$

Максимальное изменение значения функционала Маклейна получается после удаления цикла s_7 . Удаляем s_7 . Продолжая процесс, получим:

$$\begin{aligned}
 &F\left(\frac{\delta^3 W}{\delta c_{13} \delta c_7 \delta c_1}\right) = 36; \quad F\left(\frac{\delta^3 W}{\delta c_{13} \delta c_7 \delta c_2}\right) = 38; \quad F\left(\frac{\delta^3 W}{\delta c_{13} \delta c_7 \delta c_3}\right) = 36; \\
 &F\left(\frac{\delta^3 W}{\delta c_{13} \delta c_7 \delta c_4}\right) = 28; \quad F\left(\frac{\delta^3 W}{\delta c_{13} \delta c_7 \delta c_5}\right) = 30; \quad F\left(\frac{\delta^3 W}{\delta c_{13} \delta c_7 \delta c_6}\right) = 30; \\
 &F\left(\frac{\delta^3 W}{\delta c_{13} \delta c_7 \delta c_8}\right) = 36; \quad F\left(\frac{\delta^3 W}{\delta c_{13} \delta c_7 \delta c_9}\right) = 40; \quad F\left(\frac{\delta^3 W}{\delta c_{13} \delta c_7 \delta c_{10}}\right) = 40; \\
 &F\left(\frac{\delta^3 W}{\delta c_{13} \delta c_7 \delta c_{11}}\right) = 38; \quad F\left(\frac{\delta^3 W}{\delta c_{13} \delta c_7 \delta c_{12}}\right) = 30; \quad F\left(\frac{\delta^3 W}{\delta c_{13} \delta c_7 \delta c_{14}}\right) = 34; \\
 &F\left(\frac{\delta^3 W}{\delta c_{13} \delta c_7 \delta c_{15}}\right) = 38; \quad F\left(\frac{\delta^3 W}{\delta c_{13} \delta c_7 \delta c_{16}}\right) = 42; \quad F\left(\frac{\delta^3 W}{\delta c_{13} \delta c_7 \delta c_{17}}\right) = 42.
 \end{aligned}$$

Максимальное изменение значения функционала Маклейна получается после удаления цикла s_4 . Удаляем s_4 . Продолжая процесс, получим:

$$\begin{aligned}
& F\left(\frac{\delta^4 W}{\delta c_{13} \delta c_7 \delta c_4 \delta c_1}\right) = 22; \quad F\left(\frac{\delta^4 W}{\delta c_{13} \delta c_7 \delta c_4 \delta c_2}\right) = 22; \quad F\left(\frac{\delta^4 W}{\delta c_{13} \delta c_7 \delta c_4 \delta c_3}\right) = 24; \\
& F\left(\frac{\delta^4 W}{\delta c_{13} \delta c_7 \delta c_4 \delta c_5}\right) = 18; \quad F\left(\frac{\delta^4 W}{\delta c_{13} \delta c_7 \delta c_4 \delta c_6}\right) = 18; \quad F\left(\frac{\delta^4 W}{\delta c_{13} \delta c_7 \delta c_4 \delta c_8}\right) = 20; \\
& F\left(\frac{\delta^4 W}{\delta c_{13} \delta c_7 \delta c_4 \delta c_9}\right) = 26; \quad F\left(\frac{\delta^4 W}{\delta c_{13} \delta c_7 \delta c_4 \delta c_{10}}\right) = 26; \quad F\left(\frac{\delta^4 W}{\delta c_{13} \delta c_7 \delta c_4 \delta c_{11}}\right) = 24; \\
& F\left(\frac{\delta^4 W}{\delta c_{13} \delta c_7 \delta c_4 \delta c_{12}}\right) = 18; \quad F\left(\frac{\delta^4 W}{\delta c_{13} \delta c_7 \delta c_4 \delta c_{14}}\right) = 18; \quad F\left(\frac{\delta^4 W}{\delta c_{13} \delta c_7 \delta c_4 \delta c_{15}}\right) = 22; \\
& F\left(\frac{\delta^4 W}{\delta c_{13} \delta c_7 \delta c_4 \delta c_{16}}\right) = 26; \quad F\left(\frac{\delta^4 W}{\delta c_{13} \delta c_7 \delta c_4 \delta c_{17}}\right) = 26.
\end{aligned}$$

Максимальное изменение значения функционала Маклейна получается после удаления циклов c_5, c_6, c_{12} и c_{14} . Здесь проявляется неоднозначность выбора.

Рассмотрим вариант их парного удаления, используя матрицу Гесса:

$$\begin{aligned}
& F\left(\frac{\delta^5 W}{\delta c_{13} \delta c_7 \delta c_4 \delta c_5 \delta c_6}\right) = 12; \quad F\left(\frac{\delta^5 W}{\delta c_{13} \delta c_7 \delta c_4 \delta c_5 \delta c_{12}}\right) = 12; \\
& F\left(\frac{\delta^5 W}{\delta c_{13} \delta c_7 \delta c_4 \delta c_5 \delta c_{14}}\right) = 10; \quad F\left(\frac{\delta^5 W}{\delta c_{13} \delta c_7 \delta c_4 \delta c_6 \delta c_{12}}\right) = 8; \\
& F\left(\frac{\delta^5 W}{\delta c_{13} \delta c_7 \delta c_4 \delta c_6 \delta c_{14}}\right) = 10; \quad F\left(\frac{\delta^5 W}{\delta c_{13} \delta c_7 \delta c_4 \delta c_{12} \delta c_{14}}\right) = 8.
\end{aligned}$$

Рассмотрим пересечение циклов:

$$\begin{aligned}
& c_5 \cap c_6 = \{e_2, e_4, e_8, e_{14}\} \cap \{e_3, e_4, e_{13}, e_{14}\} = \{e_4, e_{14}\}; \\
& c_5 \cap c_{12} = \{e_2, e_4, e_8, e_{14}\} \cap \{e_1, e_2, e_5, e_8, e_{12}\} = \{e_2, e_8\}; \\
& c_5 \cap c_{14} = \{e_2, e_4, e_8, e_{14}\} \cap \{e_{14}, e_{15}, e_{16}, e_{19}\} = \{e_{14}\}; \\
& c_6 \cap c_{12} = \{e_3, e_4, e_{13}, e_{14}\} \cap \{e_1, e_2, e_5, e_8, e_{12}\} = \emptyset; \\
& c_6 \cap c_{14} = \{e_2, e_4, e_8, e_{14}\} \cap \{e_{14}, e_{15}, e_{16}, e_{19}\} = \{e_{14}\}; \\
& c_{12} \cap c_{14} = \{e_1, e_2, e_5, e_8, e_{12}\} \cap \{e_{14}, e_{15}, e_{16}, e_{19}\} = \emptyset.
\end{aligned}$$

Здесь перспективно выбрать удаление одного цикла c_{12} (как участвующего и в пересечении $c_6 \cap c_{12}$ и в пересечении $c_{12} \cap c_{14}$).

Удаляем c_{12} . Продолжаем процесс:

$$\begin{aligned}
& F\left(\frac{\delta^5 W}{\delta c_{13} \delta c_7 \delta c_4 \delta c_{12} \delta c_1}\right) = 12; \quad F\left(\frac{\delta^5 W}{\delta c_{13} \delta c_7 \delta c_4 \delta c_{12} \delta c_2}\right) = 14; \\
& F\left(\frac{\delta^5 W}{\delta c_{13} \delta c_7 \delta c_4 \delta c_{12} \delta c_3}\right) = 14; \quad F\left(\frac{\delta^5 W}{\delta c_{13} \delta c_7 \delta c_4 \delta c_{12} \delta c_5}\right) = 10; \\
& F\left(\frac{\delta^5 W}{\delta c_{13} \delta c_7 \delta c_4 \delta c_{12} \delta c_6}\right) = 10; \quad F\left(\frac{\delta^5 W}{\delta c_{13} \delta c_7 \delta c_4 \delta c_{12} \delta c_8}\right) = 14; \quad F\left(\frac{\delta^5 W}{\delta c_{13} \delta c_7 \delta c_4 \delta c_{12} \delta c_9}\right) = 16;
\end{aligned}$$

$$F\left(\frac{\delta^5 W}{\delta c_{13} \delta c_7 \delta c_4 \delta c_{12} \delta c_{10}}\right) = 16; F\left(\frac{\delta^5 W}{\delta c_{13} \delta c_7 \delta c_4 \delta c_{12} \delta c_{11}}\right) = 14; F\left(\frac{\delta^5 W}{\delta c_{13} \delta c_7 \delta c_4 \delta c_{14} \delta c_{14}}\right) = 8;$$

$$F\left(\frac{\delta^5 W}{\delta c_{13} \delta c_7 \delta c_4 \delta c_{12} \delta c_{15}}\right) = 16; F\left(\frac{\delta^5 W}{\delta c_{13} \delta c_7 \delta c_4 \delta c_{12} \delta c_{16}}\right) = 18; F\left(\frac{\delta^5 W}{\delta c_{13} \delta c_7 \delta c_4 \delta c_{12} \delta c_{17}}\right) = 18.$$

Максимальное изменение значения функционала Маклейна получается после удаления цикла c_{14} . Удаляем c_{14} . Продолжаем процесс:

$$F\left(\frac{\delta^6 W}{\delta c_{13} \delta c_7 \delta c_4 \delta c_{12} \delta c_{14} \delta c_1}\right) = 6; F\left(\frac{\delta^6 W}{\delta c_{13} \delta c_7 \delta c_4 \delta c_{12} \delta c_{14} \delta c_2}\right) = 6;$$

$$F\left(\frac{\delta^6 W}{\delta c_{13} \delta c_7 \delta c_4 \delta c_{12} \delta c_{14} \delta c_3}\right) = 6; F\left(\frac{\delta^6 W}{\delta c_{13} \delta c_7 \delta c_4 \delta c_{12} \delta c_{14} \delta c_5}\right) = 4;$$

$$F\left(\frac{\delta^6 W}{\delta c_{13} \delta c_7 \delta c_4 \delta c_{12} \delta c_{14} \delta c_6}\right) = 0; F\left(\frac{\delta^6 W}{\delta c_{13} \delta c_7 \delta c_4 \delta c_{12} \delta c_{14} \delta c_8}\right) = 8;$$

$$F\left(\frac{\delta^6 W}{\delta c_{13} \delta c_{17} \delta c_4 \delta c_{12} \delta c_{14} \delta c_9}\right) = 8; F\left(\frac{\delta^6 W}{\delta c_{13} \delta c_7 \delta c_4 \delta c_{12} \delta c_{14} \delta c_{10}}\right) = 6;$$

$$F\left(\frac{\delta^6 W}{\delta c_{13} \delta c_7 \delta c_4 \delta c_{12} \delta c_{14} \delta c_{11}}\right) = 6; F\left(\frac{\delta^6 W}{\delta c_{13} \delta c_7 \delta c_4 \delta c_{12} \delta c_{14} \delta c_{15}}\right) = 6;$$

$$F\left(\frac{\delta^6 W}{\delta c_{13} \delta c_7 \delta c_4 \delta c_{12} \delta c_{14} \delta c_{16}}\right) = 8; F\left(\frac{\delta^6 W}{\delta c_{13} \delta c_7 \delta c_4 \delta c_{12} \delta c_{14} \delta c_{17}}\right) = 8.$$

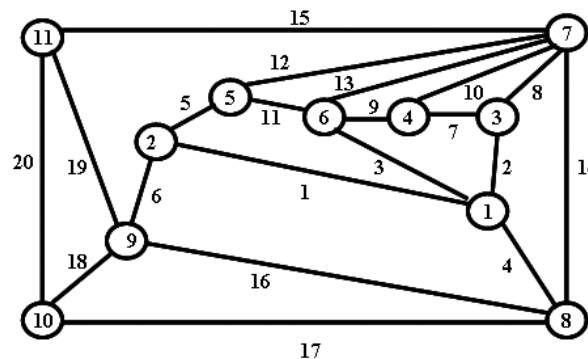


Рис. 2.3. Рисунок планарного графа G.

Максимальное изменение значения функционала Маклейна получается после удаления цикла c_6 . Удаляем c_6 .

В качестве обода выбран цикл c_{15} . После удаления изометрических циклов $c_{13}, c_7, c_4, c_{12}, c_{14}, c_6, c_{15}$ цикломатическое число графа $\square(G) = 17 - 7 = 10$ и функционал Маклейна имеет нулевое значение, следовательно граф **G** планарный (см. рис. 2.3).

На рис. 2.4 представлен график изменения значения целевой функции Маклейна при пошаговом удалении циклов. Показано, что в случае удаления цикла c_5 , вместо цикла c_{12} (на четвертом шаге), можно и не выделить базис с нулевым значением функционала Маклейна.

Для выделенной системы изометрических циклов строится вращение вершин графа, что и описывает топологический рисунок графа:

вращение вершины v_1 : $v_3 \ v_8 \ v_2 \ v_6$
 вращение вершины v_2 : $v_5 \ v_1 \ v_9$
 вращение вершины v_3 : $v_4 \ v_7 \ v_1$
 вращение вершины v_4 : $v_6 \ v_7 \ v_3$
 вращение вершины v_5 : $v_2 \ v_7 \ v_6$
 вращение вершины v_6 : $v_5 \ v_7 \ v_4 \ v_1$
 вращение вершины v_7 : $v_8 \ v_3 \ v_4 \ v_6 \ v_5 \ v_{11}$
 вращение вершины v_8 : $v_9 \ v_1 \ v_7 \ v_{10}$
 вращение вершины v_9 : $v_2 \ v_8 \ v_{10} \ v_{11}$
 вращение вершины v_{10} : $v_9 \ v_8 \ v_{11}$
 вращение вершины v_{11} : $v_7 \ v_9 \ v_{10}$

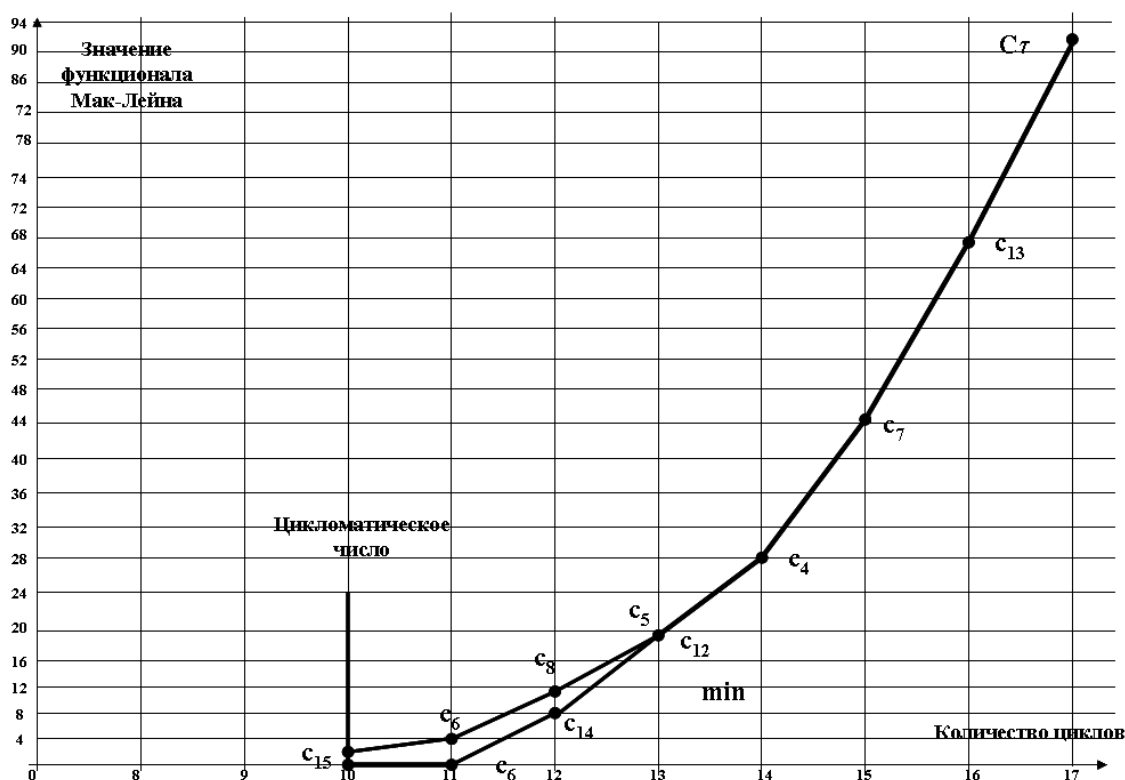


Рис. 2.4. График изменения значений целевой функции (результат неоднозначности).

Удаленные циклы с базисными циклами составляют следующие подмножества:

$$\begin{aligned}
 c_{13} &= \{e_1, e_4, e_5, e_{12}, e_{14}\} = c_1 \oplus c_3 \oplus c_5 \oplus c_9 \oplus c_{10} \oplus c_{11} = \{e_1, e_3, e_5, e_{11}\} \oplus \\
 &\oplus \{e_2, e_3, e_7, e_9\} \oplus \{e_2, e_4, e_8, e_{14}\} \oplus \{e_7, e_8, e_{10}\} \oplus \{e_9, e_{10}, e_{13}\} \oplus \{e_{11}, e_{12}, e_{13}\}; \\
 c_7 &= \{e_5, e_6, e_{12}, e_{14}, e_{16}\} = c_1 \oplus c_2 \oplus c_3 \oplus c_5 \oplus c_9 \oplus c_{10} \oplus c_{11} = \{e_1, e_3, e_5, e_{11}\} \oplus \\
 &\oplus \{e_1, e_4, e_6, e_{16}\} \oplus \{e_2, e_3, e_7, e_9\} \oplus \{e_2, e_4, e_8, e_{14}\} \oplus \{e_7, e_8, e_{10}\} \oplus \\
 &\oplus \{e_9, e_{10}, e_{13}\} \oplus \{e_{11}, e_{12}, e_{13}\}; \\
 c_4 &= \{e_2, e_3, e_8, e_{13}\} = c_3 \oplus c_9 \oplus c_{10} = \{e_2, e_3, e_7, e_9\} \oplus \{e_7, e_8, e_{10}\} \oplus \{e_9, e_{10}, e_{13}\}; \\
 c_{12} &= \{e_1, e_2, e_5, e_8, e_{12}\} = c_1 \oplus c_3 \oplus c_9 \oplus c_{10} \oplus c_{11} = \{e_1, e_3, e_5, e_{11}\} \oplus \{e_2, e_3, e_7, e_9\} \oplus \\
 &\oplus \{e_7, e_8, e_{10}\} \oplus \{e_9, e_{10}, e_{13}\} \oplus \{e_{11}, e_{12}, e_{13}\}; \\
 c_{14} &= \{e_{14}, e_{15}, e_{16}, e_{19}\} = c_1 \oplus c_2 \oplus c_3 \oplus c_5 \oplus c_8 \oplus c_9 \oplus c_{10} \oplus c_{11} = \{e_1, e_3, e_5, e_{11}\} \oplus \\
 &\oplus \{e_1, e_4, e_6, e_{16}\} \oplus \{e_2, e_3, e_7, e_9\} \oplus \{e_2, e_4, e_8, e_{14}\} \oplus \{e_5, e_6, e_{12}, e_{15}, e_{19}\} \oplus \\
 &\oplus \{e_7, e_8, e_{10}\} \oplus \{e_9, e_{10}, e_{13}\} \oplus \{e_{11}, e_{12}, e_{13}\}; \\
 c_6 &= \{e_3, e_4, e_{13}, e_{14}\} = c_3 \oplus c_5 \oplus c_9 \oplus c_{10} = \{e_2, e_3, e_7, e_9\} \oplus \{e_2, e_4, e_8, e_{14}\} \oplus
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \oplus \{e_7, e_8, e_{10}\} \oplus \{e_9, e_{10}, e_{13}\}; \\
c_{15} &= \{e_{14}, e_{15}, e_{17}, e_{20}\} = c_1 \oplus c_2 \oplus c_3 \oplus c_5 \oplus c_8 \oplus c_9 \oplus c_{10} \oplus c_{11} \oplus c_{16} \oplus c_{17} = \\
&= \{e_1, e_3, e_5, e_{11}\} \oplus \{e_1, e_4, e_6, e_{16}\} \oplus \{e_2, e_3, e_7, e_9\} \oplus \{e_2, e_4, e_8, e_{14}\} \oplus \\
&\oplus \{e_5, e_6, e_{12}, e_{15}, e_{19}\} \oplus \{e_7, e_8, e_{10}\} \oplus \{e_9, e_{10}, e_{13}\} \oplus \{e_{11}, e_{12}, e_{13}\} \oplus \\
&\oplus \{e_{16}, e_{17}, e_{18}\} \oplus \{e_{18}, e_{19}, e_{20}\}.
\end{aligned}$$

Следует заметить, что применение операции взятия обратной производной структурного числа W , относительно отдельно взятого единичного цикла, позволяет поставить в соответствие оставшемуся подмножеству циклов определенное целое положительное число. Данное число определяется значением функционала Маклейна, полученное для множества изометрических циклов без учета удаленных.

Естественно, что в приведенном алгоритме, после каждого удаления цикла проверяется вектор количества циклов проходящих по вершинам V_x на отсутствия нулевых координат. В случае появления нулевых значений, выбранный цикл возвращается в систему и выбирается другой цикл, удаление которого не приводит к появлению нулевых значений.

Следует заметить, что имеется алгоритм Хопкрофта-Тарьяна позволяющий распознать планарность графа за линейное время. Однако, наша цель состоит в рассмотрении процесса построения подмножества изометрических циклов для решения задачи построения топологического рисунка плоского графа.

2.3. Функционал Понтрягина-Куратовского

Для решения задачи построения топологического рисунка максимально плоского суграфа непланарного графа, необходимо описывать процесс удаления цикла с одновременным удалением ребра из выделенного базиса циклов с минимальным значением функционала Маклейна для оставшихся циклов. Применение правила удаления цикла исходит из удовлетворения уравнения Эйлера. Обозначим цикломатическое число графа как $\nu(\mathbf{G})$. Тогда формула Эйлера для подмножества независимых циклов графа имеет вид:

$$m - n - \nu(\mathbf{G}) + 1 = 0. \quad (2.8)$$

Здесь m - количество ребер графа, а n - количество вершин графа.

Если мы удаляем из графа ребро, то для сохранения выполнения уравнения Эйлера должны изменить и значение цикломатического числа нового суграфа на единицу:

$$(m-1) - n - (\nu(\mathbf{G}) - 1) + 1 = m - n - \nu(\mathbf{G}) + 1 = 0. \quad (2.9)$$

Если мы удаляем из графа два ребра, то для сохранения выполнения уравнения Эйлера должны изменить значение цикломатического числа нового суграфа на единицу и уменьшить количество компонент связности графа тоже на единицу.

$$(m-2) - (n-1) - (\nu(\mathbf{G}) - 1) + 1 = m - n - \nu(\mathbf{G}) + 1 = 0 \quad (2.10)$$

Для выполнения этих целей, воспользуемся понятием дифференцирования структурного числа. Напомним, что *дифференцирование структурного числа* называется структурное число $\partial W/\partial \alpha$, равное:

$$\frac{\partial W}{\partial \alpha} = W \mid \text{столбцы, не содержащие элемент } a \mid, \text{ исключены.} \quad (2.11)$$

Очевидно также, что при удалении цикла и одновременного удаления ребра должно уменьшиться и цикломатическое число графа на единицу, при условии, что оставшаяся система циклов покрывает все множество вершин графа.

В этом случае функционал Маклейна уже не будет отвечать процессу построения топологического рисунка графа, так как он строился в предположении отсутствия нулевых значений для вектора P_e . Для более точного описания процесса удаления ребер из базиса, введем функционал Понтрягина-Куратовского:

$$FP(C) = \sum_{i=1}^m s_i (s_i - 1)(s_i - 2) = \sum_{i=1}^m s_i^3 - 3 \sum_{i=1}^m s_i^2 + 2 \sum_{i=1}^m s_i, \quad (2.12)$$

где s_i – количество изометрических циклов проходящих по ребру i для заданного подмножества циклов.

Данный функционал подобен функционалу Маклейна, но позволяет учитывать нулевые значения в векторе P_e в процессе удаления ребер из базиса.

Процесс выделения плоской части графа из базиса может быть описан как процедура дифференцирования элемента структурного числа:

$$W_b' = \frac{\partial^q W_b}{\partial c_1 \partial c_2 \partial c_3 \dots \partial c_{q-1} \partial c_q}, \quad (8.13)$$

где q – количество удаленных ребер. Структурное число W_b описывает базис изометрических циклов.

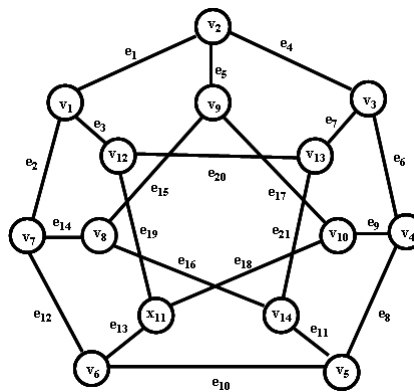


Рис. 2.5. Граф G_1 .

Рассмотрим пример решения задачи выделения плоской части не планарного графа.

Пример 2.3. Выделить максимально плоский суграф для графа, представленного на рис. 2.5 и продемонстрировать применение функционала Понтрягина-Куратовского.

Множество C_τ изометрических циклов графа G_1 представленного на рис. 2.5 записывается в виде:

$$\begin{aligned}
 c_1 &= \{e_1, e_2, e_5, e_{14}, e_{15}\} \rightarrow \{v_1, v_2, v_7, v_8, v_9\}; \\
 c_2 &= \{e_1, e_3, e_4, e_7, e_{20}\} \rightarrow \{v_1, v_2, v_3, v_{12}, v_{13}\}; \\
 c_3 &= \{e_2, e_3, e_{12}, e_{13}, e_{19}\} \rightarrow \{v_1, v_6, v_7, v_{11}, v_{12}\}; \\
 c_4 &= \{e_4, e_5, e_6, e_9, e_{17}\} \rightarrow \{v_2, v_3, v_4, v_9, v_{10}\}; \\
 c_5 &= \{e_6, e_7, e_8, e_{11}, e_{21}\} \rightarrow \{v_3, v_4, v_5, v_{13}, v_{14}\}; \\
 c_6 &= \{e_8, e_9, e_{10}, e_{13}, e_{18}\} \rightarrow \{v_4, v_5, v_6, v_{10}, v_{11}\}; \\
 c_7 &= \{e_{10}, e_{11}, e_{12}, e_{14}, e_{16}\} \rightarrow \{v_5, v_6, v_7, v_8, v_{14}\}; \\
 c_8 &= \{e_8, e_9, e_{11}, e_{15}, e_{16}, e_{17}\} \rightarrow \{v_4, v_5, v_8, v_9, v_{10}, v_{14}\}; \\
 c_9 &= \{e_4, e_5, e_7, e_{15}, e_{16}, e_{21}\} \rightarrow \{v_2, v_3, v_8, v_9, v_{13}, v_{14}\}; \\
 c_{10} &= \{e_{12}, e_{13}, e_{14}, e_{15}, e_{17}, e_{18}\} \rightarrow \{v_6, v_7, v_8, v_9, v_{10}, v_{11}\}; \\
 c_{11} &= \{e_1, e_3, e_5, e_{17}, e_{18}, e_{19}\} \rightarrow \{v_1, v_2, v_9, v_{10}, v_{11}, v_{12}\}; \\
 c_{12} &= \{e_6, e_7, e_9, e_{18}, e_{19}, e_{20}\} \rightarrow \{v_3, v_4, v_{10}, v_{11}, v_{12}, v_{13}\}; \\
 c_{13} &= \{e_{10}, e_{11}, e_{13}, e_{19}, e_{20}, e_{21}\} \rightarrow \{v_5, v_6, v_{11}, v_{12}, v_{13}, v_{14}\}; \\
 c_{14} &= \{e_2, e_3, e_{14}, e_{16}, e_{20}, e_{21}\} \rightarrow \{v_1, v_7, v_8, v_{12}, v_{13}, v_{14}\}.
 \end{aligned}$$

Значение функционала Маклейна для множества изометрических циклов равно: $F(G_\tau) = 100$.

Множество изометрических циклов графа G_1 позволяет построить вектор циклов \mathbf{P}_e - определяющий количество изометрических циклов, обозначаемых латинской буквой s , проходящих по ребру, где порядок записи в кортеже соответствует номеру ребра:

$$\begin{aligned}
 \mathbf{P}_e &= \langle s_1, s_2, s_3, s_4, s_5, s_6, s_7, s_8, s_9, s_{10}, s_{11}, s_{12}, s_{13}, s_{14}, s_{15}, s_{16}, s_{17}, s_{18}, s_{19}, s_{20}, s_{21} \rangle = \\
 &= \langle 3, 3, 4, 3, 4, 3, 5, 3, 4, 3, 4, 3, 4, 4, 4, 4, 3, 4, 4, 4, 4 \rangle.
 \end{aligned}$$

Выделим базис подпространства циклов, состоящий из подмножества циклов $W_b = \{c_1, c_2, c_3, c_4, c_5, c_6, c_7, c_8\}$. Для выделенного базиса определим значение функционала Понтрягина-Куратовского: $FP(W_b) = 18$. Для удаления цикла воспользуемся понятием дифференцирования структурного числа:

$$\begin{aligned}
 FP\left(\frac{\partial W_b}{\partial c_1}\right) &= 18; & FP\left(\frac{\partial W_b}{\partial c_2}\right) &= 18; & FP\left(\frac{\partial W_b}{\partial c_3}\right) &= 18; & FP\left(\frac{\partial W_b}{\partial c_4}\right) &= 12; \\
 FP\left(\frac{\partial W_b}{\partial c_5}\right) &= 6; & FP\left(\frac{\partial W_b}{\partial c_6}\right) &= 6; & FP\left(\frac{\partial W_b}{\partial c_7}\right) &= 12; & FP\left(\frac{\partial W_b}{\partial c_8}\right) &= 0.
 \end{aligned}$$

И хотя при удалении c_8 достигается минимальное нулевое значение функционала Понтрягина-Куратовского, удаление ребра не производится, так как не удовлетворяется условие: при удалении цикла – удаляется одно и только одно ребро. При удалении c_6 – удаляется ребро e_{18} , а при удалении c_5 - удаляется ребро e_{21} . В этих случаях, значение функционала Понтрягина-Куратовского меньше из всех кандидатов на удаление и равно 6. Выбираем для уда-

ления – c_6 . Продолжаем процесс удаления циклов с одновременным удалением одного и только одного ребра:

$$\begin{aligned} \text{FP}\left(\frac{\partial^2 W_b}{\partial c_6 \partial c_1}\right) &= 6; & \text{FP}\left(\frac{\partial^2 W_b}{\partial c_6 \partial c_2}\right) &= 6; & \text{FP}\left(\frac{\partial^2 W_b}{\partial c_6 \partial c_3}\right) &= 6; & \text{FP}\left(\frac{\partial^2 W_b}{\partial c_6 \partial c_4}\right) &= 6; \\ \text{FP}\left(\frac{\partial^2 W_b}{\partial c_6 \partial c_5}\right) &= 0; & \text{FP}\left(\frac{\partial^2 W_b}{\partial c_6 \partial c_7}\right) &= 0; & \text{FP}\left(\frac{\partial^2 W_b}{\partial c_6 \partial c_8}\right) &= 0. \end{aligned}$$

И снова, при удалении цикла c_8 получаем нулевое значение функционала Понтрягина-Куратовского, но удаление ребра не может быть произведено, так как не выполняется условие совместного удаления ребра и цикла. При удалении c_7 – удаляется ребро e_{10} , а при удалении c_5 – удаляется ребро e_{21} . В последних случаях, значение функционала Понтрягина-Куратовского равно 0 и, при удалении его из базиса, удаляется одно и только одно ребро. Выбираем для удаления – c_7 .

В результате мы получили плоский суграф (см. рис. 2.6). Шесть циклов $c_1, c_2, c_3, c_4, c_5, c_8$ и обод образуют плоский суграф из непланарного графа при исключении ребер e_{18} и e_{10} .

Полученное множество циклов индуцирует вращение вершин плоского суграфа, тем самым, описывая следующей диаграммой его топологический рисунок [1]:

- вращение вершины v_1 : $v_2 \ v_{12} \ v_7$
- вращение вершины v_2 : $v_9 \ v_3 \ v_1$
- вращение вершины v_3 : $v_4 \ v_{13} \ v_2$
- вращение вершины v_4 : $v_5 \ v_3 \ v_{10}$
- вращение вершины v_5 : $v_4 \ v_{14}$
- вращение вершины v_6 : $v_7 \ v_{11}$
- вращение вершины v_7 : $v_8 \ v_1 \ v_6$
- вращение вершины v_8 : $v_9 \ v_7 \ v_{14}$
- вращение вершины v_9 : $v_8 \ v_{10} \ v_2$
- вращение вершины v_{10} : $v_9 \ v_4$
- вращение вершины v_{11} : $v_6 \ v_{12}$
- вращение вершины v_{12} : $v_1 \ v_{13} \ v_{11}$
- вращение вершины v_{13} : $v_3 \ v_{14} \ v_{12}$
- вращение вершины v_{14} : $v_8 \ v_{13} \ v_5$.

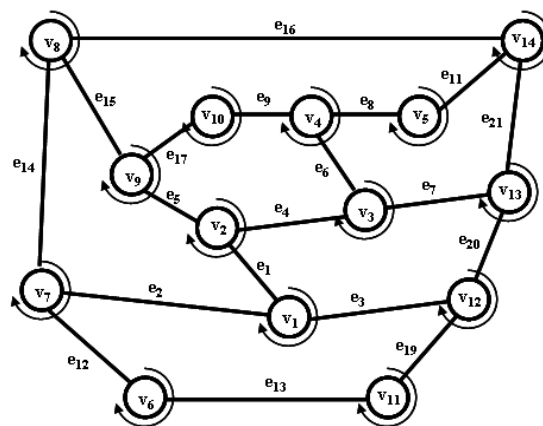


Рис. 2.6. Плоский суграф графа G_1 .

Рассмотрим следующий пример.

Пример 2.4. Выделить максимально плоский суграф графа представленного на рис. 2.7 и сформировать его топологический рисунок.

Множество изометрических циклов графа G_2 имеет вид:

$$\begin{aligned}
 c_1 &= \{e_1, e_2, e_6\}; & c_2 &= \{e_1, e_3, e_7\}; & c_3 &= \{e_1, e_4, e_8, e_{19}\}; \\
 c_4 &= \{e_2, e_3, e_{10}\}; & c_5 &= \{e_2, e_5, e_{11}, e_{20}\}; & c_6 &= \{e_3, e_4, e_{15}\}; \\
 c_7 &= \{e_3, e_5, e_{17}\}; & c_8 &= \{e_4, e_5, e_{18}\}; & c_9 &= \{e_6, e_7, e_{10}\}; \\
 c_{10} &= \{e_6, e_8, e_9, e_{14}\}; & c_{11} &= \{e_7, e_8, e_{12}, e_{14}\}; & c_{12} &= \{e_7, e_8, e_{15}, e_{19}\}; \\
 c_{13} &= \{e_9, e_{10}, e_{12}\}; & c_{14} &= \{e_9, e_{11}, e_{13}\}; & c_{15} &= \{e_{10}, e_{11}, e_{16}\}; \\
 c_{16} &= \{e_{12}, e_{13}, e_{16}\}; & c_{17} &= \{e_{12}, e_{14}, e_{15}, e_{19}\}; & c_{18} &= \{e_{15}, e_{17}, e_{18}\}; \\
 c_{19} &= \{e_{16}, e_{17}, e_{20}\}.
 \end{aligned}$$

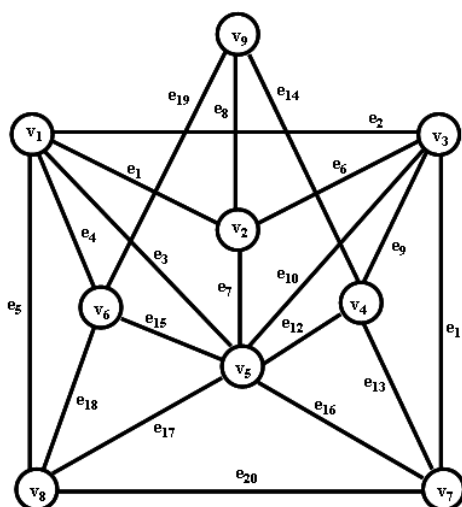


Рис. 2.7. Граф G_2 .

Методом наискорейшего спуска выделим базис, состоящий из следующих циклов $W_b = \{c_2, c_3, c_5, c_8, c_9, c_{10}, c_{14}, c_{15}, c_{16}, c_{17}, c_{18}, c_{19}\}$. Значение функционала Понтрягина-Куратовского для данного независимого базиса равно 12.

Для выделения максимально плоского суграфа, воспользуемся понятием дифференцирования структурного числа:

$$\begin{aligned}
 FP\left(\frac{\partial W_b}{\partial c_2}\right) &= 12; & FP\left(\frac{\partial W_b}{\partial c_3}\right) &= 12; & FP\left(\frac{\partial W_b}{\partial c_5}\right) &= 6; & FP\left(\frac{\partial W_b}{\partial c_8}\right) &= 12; \\
 FP\left(\frac{\partial W_b}{\partial c_9}\right) &= 12; & FP\left(\frac{\partial W_b}{\partial c_{10}}\right) &= 12; & FP\left(\frac{\partial W_b}{\partial c_{14}}\right) &= 6; & FP\left(\frac{\partial W_b}{\partial c_{15}}\right) &= 0; \\
 FP\left(\frac{\partial W_b}{\partial c_{16}}\right) &= 6; & FP\left(\frac{\partial W_b}{\partial c_{17}}\right) &= 12; & FP\left(\frac{\partial W_b}{\partial c_{18}}\right) &= 12; & FP\left(\frac{\partial W_b}{\partial c_{19}}\right) &= 6.
 \end{aligned}$$

Удалить цикл c_{15} нельзя, так как в векторе P_u для его ребер не содержится единичных значений. А вот в цикле c_5 содержится ребро e_2 со значением равным единице в векторе P_u .

Удаляем цикл c_5 и ребро e_2 , продолжаем процесс дальше:

$$\begin{aligned}
FP\left(\frac{\partial^2 W_b}{\partial c_5 \partial c_2}\right) &= 6; & FP\left(\frac{\partial^2 W_b}{\partial c_5 \partial c_3}\right) &= 6; & FP\left(\frac{\partial^2 W_b}{\partial c_5 \partial c_8}\right) &= 6; & FP\left(\frac{\partial^2 W_b}{\partial c_5 \partial c_9}\right) &= 6; \\
FP\left(\frac{\partial^2 W_b}{\partial c_5 \partial c_{10}}\right) &= 6; & FP\left(\frac{\partial^2 W_b}{\partial c_5 \partial c_{14}}\right) &= 6; & FP\left(\frac{\partial^2 W_b}{\partial c_5 \partial c_{15}}\right) &= 0; & FP\left(\frac{\partial^2 W_b}{\partial c_5 \partial c_{16}}\right) &= 0; \\
FP\left(\frac{\partial^2 W_b}{\partial c_5 \partial c_{17}}\right) &= 6; & FP\left(\frac{\partial^2 W_b}{\partial c_5 \partial c_{18}}\right) &= 6; & FP\left(\frac{\partial^2 W_b}{\partial c_5 \partial c_{19}}\right) &= 0.
\end{aligned}$$

Среди циклов, удаление которых приводит к минимальному значению функционала Понтрягина-Куратовского, только цикл c_{19} содержит единицу для ребра e_{20} в векторе P_e . Удаляем цикл c_{19} и ребро e_{20} , получаем максимально плоский суграф (см. рис. 2.8).

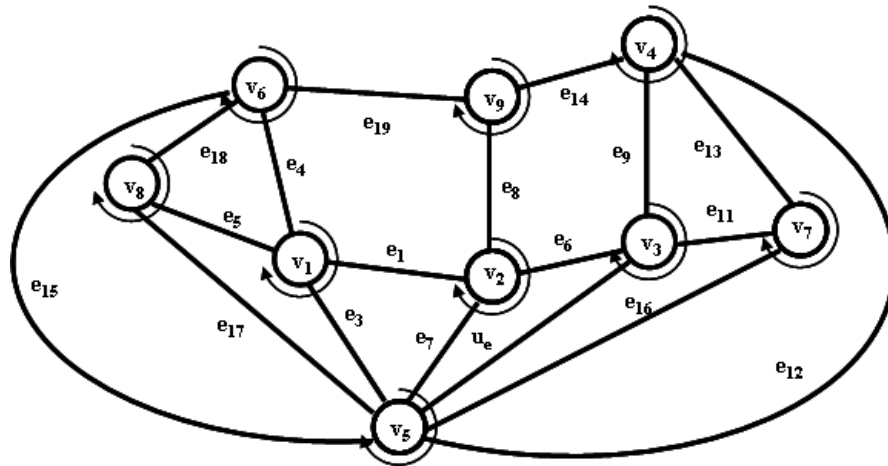


Рис. 2.8. Максимально плоский суграф графа G_2 .

Произвольным образом выделим базис, состоящий из следующих циклов $W_b = \{c_1, c_2, c_3, c_6, c_8, c_9, c_{11}, c_{13}, c_{14}, c_{16}, c_{18}, c_{19}\}$. Значение функционала Понтрягина-Куратовского для данного базиса равно 24.

Для выделения максимально плоского суграфа, воспользуемся понятием дифференцирования структурного числа:

$$\begin{aligned}
FP\left(\frac{\partial W_b}{\partial c_1}\right) &= 18; & FP\left(\frac{\partial W_b}{\partial c_2}\right) &= 12; & FP\left(\frac{\partial W_b}{\partial c_3}\right) &= 12; & FP\left(\frac{\partial W_b}{\partial c_6}\right) &= 18; \\
FP\left(\frac{\partial W_b}{\partial c_8}\right) &= 18; & FP\left(\frac{\partial W_b}{\partial c_9}\right) &= 18; & FP\left(\frac{\partial W_b}{\partial c_{11}}\right) &= 12; & FP\left(\frac{\partial W_b}{\partial c_{13}}\right) &= 18; \\
FP\left(\frac{\partial W_b}{\partial c_{14}}\right) &= 24; & FP\left(\frac{\partial W_b}{\partial c_{16}}\right) &= 18; & FP\left(\frac{\partial W_b}{\partial c_{18}}\right) &= 24; & FP\left(\frac{\partial W_b}{\partial c_{19}}\right) &= 24.
\end{aligned}$$

Удаляем цикл c_3 , содержащий ребро e_{19} со значением равным единице в векторе P_u . Продолжаем процесс дальше:

$$\begin{aligned}
FP\left(\frac{\partial^2 W_b}{\partial c_3 \partial c_1}\right) &= 12; & FP\left(\frac{\partial^2 W_b}{\partial c_3 \partial c_2}\right) &= 6; & FP\left(\frac{\partial^2 W_b}{\partial c_3 \partial c_6}\right) &= 12; & FP\left(\frac{\partial^2 W_b}{\partial c_3 \partial c_8}\right) &= 12; \\
FP\left(\frac{\partial^2 W_b}{\partial c_3 \partial c_9}\right) &= 6; & FP\left(\frac{\partial^2 W_b}{\partial c_3 \partial c_{11}}\right) &= 0; & FP\left(\frac{\partial^2 W_b}{\partial c_3 \partial c_{13}}\right) &= 6; & FP\left(\frac{\partial^2 W_b}{\partial c_3 \partial c_{14}}\right) &= 12;
\end{aligned}$$

$$FP\left(\frac{\partial^2 W_b}{\partial c_3 \partial c_{16}}\right) = 6; \quad FP\left(\frac{\partial^2 W_b}{\partial c_3 \partial c_{18}}\right) = 12; \quad FP\left(\frac{\partial^2 W_b}{\partial c_3 \partial c_{19}}\right) = 12.$$

Среди циклов, содержится цикл c_{11} удаление, которого приводит к нулевому значению функционала Понтрягина-Куратовского, но содержащий несколько единиц для ребер e_8 и e_{14} в векторе P_e . Удаление этого цикла приводит к одновременному удалению двух ребер и вершины v_9 . В результате получаем максимально плоский суграф (см. рис. 2.9).

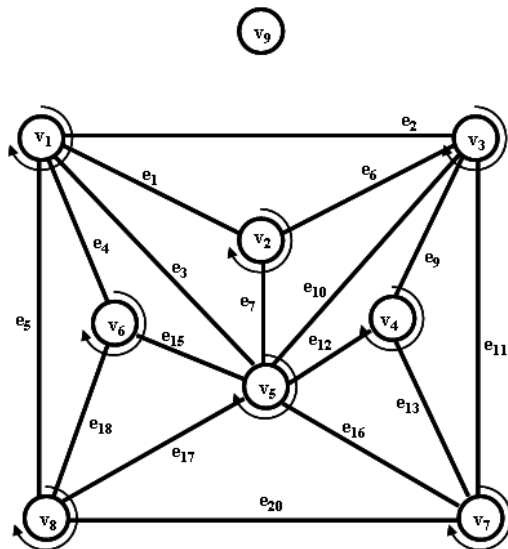


Рис. 2.9. Плоский суграф с тремя удаленными ребрами.

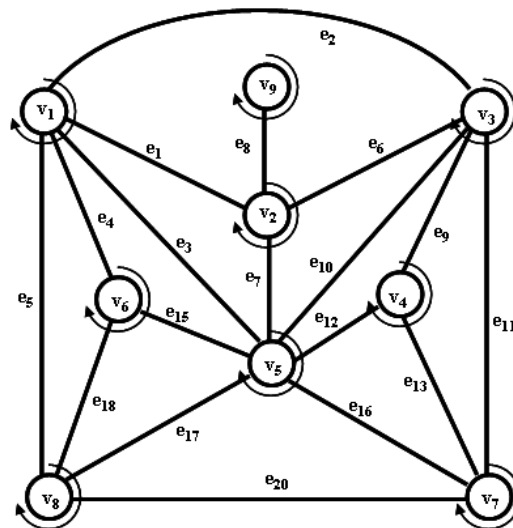


Рис. 2.10. Плоский подграф с двумя удаленными ребрами.

В случае нашего графа, получается, что у нас удалено три ребра и одна вершина. Однако всегда можно найти цикл и расположить в нем удаленную вершину соединив непересекающимся ребром смежную к ней вершину (см. рис. 2.10). Тогда количество удаленных ребер в подграфе будет равно двум для всех накрывающих вершин, как и в первом случае.

Рассматривая пример 2.4, можно заметить, что при удалении циклов возможно удаление двух ребер и вершины. Таким образом, возможно удаление нескольких ребер при удалении одного цикла, не забывая при этом, что одновременно происходит удаление вершин согласно выражению Эйлера (2.8).

2.4. Фрагментарный алгоритм

Для решения комбинаторных оптимизационных задач применимы приближенные метаэвристические алгоритмы [39]. Метаэвристические алгоритмы находят «достаточно хорошие» практические решения сложной проблемы за приемлемое время, теоретически не обосновывая их оптимальность.

Один из таких алгоритмов представлен в работе [16]. Данный алгоритм последовательно реализует метод рекурсивного удаления изометрических циклов из множества изометрических циклов графа. Схема поиска основана на последовательном удалении цикла из множе-

ства изометрических циклов до получения нулевого значения функционала Маклейна (или нулевого значения функционала Понтрягина-Куратовского).

Рассмотрим следующий двухэтапный фрагментарный алгоритм.

На первом этапе фрагментарная структура, характеризующая конфигурацию, может быть построена с помощью следующего «жадного» алгоритма [32,39]:

- элементы множества Y нумеруются и линейно упорядочиваются;
- на шаге с номером $k + 1$ выбирается первый по порядку элемент, максимально уменьшающий значение функционала Маклейна $y \in Y \setminus Y_k$, такой, что $Y_k \setminus \{y\} \in U$. Строится множество $Y_{k+1} = Y_k \setminus \{y\}$;
- построение фрагментарной структуры характеризующей конфигурацию заканчивается, если на очередном шаге мощность множества $\text{card}(Y \setminus Y_k) = m - n + 1$, т.е. мощность выделенной системы циклов равна цикломатическому числу графа.

Приведённый алгоритм будем называть *фрагментарным алгоритмом построения плоской конфигурации*. Результат применения фрагментарного алгоритма определяется заданным линейным порядком на множестве Y .

На втором этапе фрагментарная структура, характеризующая плоскую конфигурацию, может быть построена с помощью следующего «жадного» алгоритма:

- элементы множества $\{Y \setminus Y_k\}$ уже линейно упорядочены;
- на шаге с номером $k_l + 1$ выбирается первый по порядку элемент, максимально уменьшающий значение функционала Понтрягина-Куратовского и удовлетворяющий условию Эйлера $y \in \{Y \setminus Y_k\}_{k_l}$ такой, что $\{Y \setminus Y_k\}_{k_l} \setminus \{y\} \in U$. Строится множество $\{Y \setminus Y_k\}_{k_l+1} = \{Y \setminus Y_k\}_{k_l} \setminus \{y\}$;
- построение фрагментарной структуры характеризующей плоскую конфигурацию заканчивается, если на очередном шаге значение функционала Понтрягина-Куратовского приобретает нулевое значение.

Результатом применения фрагментарного алгоритма является построение топологического рисунка плоского графа [16].

Естественно, что в случае получения фрагментарной структуры нарушающей линейную независимость конфигурации или нарушающей условия Эйлера, случайным образом генерируется новая фрагментарная структура.

Будем рассматривать множество циклов графа как фрагментарную структуру, причем изометрические циклы будут представлять элементарные фрагменты этой структуры. Следу-

ет заметить, что любой планарный суграф графа G можно представить в виде суммы изометрических циклов (элементарных фрагментов)

Пример 2.5. Для описания алгоритма рассмотрим процесс выделения плоского суграфа на примере графа G_3 представленного на рис. 2.11. Данный пример взят для сравнения методов, рассмотренных в предыдущей главе (см. рис. 1.12).

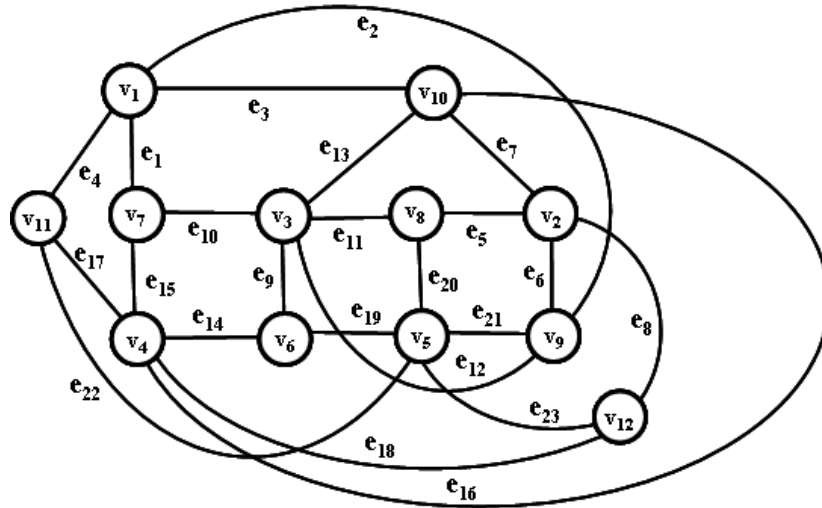


Рис. 2.11. Граф G_3 .

Трехместный предикат P графа G_3 имеет вид:

$$\begin{aligned}
 e_1 &= (v_1, v_2) \vee (v_2, v_1); & e_2 &= (v_1, v_9) \vee (v_9, v_1); & e_3 &= (v_1, v_{10}) \vee (v_{10}, v_1); \\
 e_4 &= (v_1, v_{11}) \vee (v_{11}, v_1); & e_5 &= (v_2, v_8) \vee (v_8, v_2); & e_6 &= (v_2, v_9) \vee (v_9, v_2); \\
 e_7 &= (v_2, v_{10}) \vee (v_{10}, v_1); & e_8 &= (v_2, v_{12}) \vee (v_{12}, v_2); & e_9 &= (v_3, v_6) \vee (v_6, v_3); \\
 e_{10} &= (v_3, v_7) \vee (v_7, v_3); & e_{11} &= (v_3, v_8) \vee (v_8, v_3); & e_{12} &= (v_3, v_9) \vee (v_9, v_3); \\
 e_{13} &= (v_3, v_{10}) \vee (v_{10}, v_3); & e_{14} &= (v_4, v_6) \vee (v_6, v_4); & e_{15} &= (v_4, v_7) \vee (e_7, e_4); \\
 e_{16} &= (v_4, v_{10}) \vee (v_{10}, v_4); & e_{17} &= (v_4, v_{11}) \vee (v_{11}, v_4); & e_{18} &= (v_4, v_{12}) \vee (v_{12}, v_4); \\
 e_{19} &= (v_5, v_6) \vee (v_6, v_5); & e_{20} &= (v_5, v_8) \vee (v_8, v_5); & e_{21} &= (v_5, v_9) \vee (v_9, v_5); \\
 e_{22} &= (v_5, v_{11}) \vee (v_{11}, v_5); & e_{23} &= (v_5, v_{12}) \vee (v_{12}, v_5).
 \end{aligned}$$

Множество изометрических циклов:

$$\begin{aligned}
 c_1 &= \{e_1, e_2, e_{10}, e_{12}\} \rightarrow \{v_1, v_3, v_7, v_9\}; & c_2 &= \{e_1, e_3, e_{10}, e_{13}\} \rightarrow \{v_1, v_3, v_7, v_{10}\}; \\
 c_3 &= \{e_1, e_3, e_{15}, e_{16}\} \rightarrow \{v_1, v_4, v_7, v_{10}\}; & c_4 &= \{e_1, e_4, e_{15}, e_{17}\} \rightarrow \{v_1, v_4, v_7, v_{11}\}; \\
 c_5 &= \{e_2, e_3, e_6, e_7\} \rightarrow \{v_1, v_2, v_9, v_{10}\}; & c_6 &= \{e_2, e_3, e_{12}, e_{13}\} \rightarrow \{v_1, v_3, v_9, v_{10}\}; \\
 c_7 &= \{e_2, e_4, e_{21}, e_{22}\} \rightarrow \{v_1, v_5, v_9, v_{11}\}; & c_8 &= \{e_3, e_4, e_{16}, e_{17}\} \rightarrow \{v_1, v_4, v_{10}, v_{11}\}; \\
 c_9 &= \{e_5, e_6, e_{11}, e_{12}\} \rightarrow \{v_2, v_3, v_8, v_9\}; & c_{10} &= \{e_5, e_6, e_{20}, e_{21}\} \rightarrow \{v_2, v_5, v_8, v_9\}; \\
 c_{11} &= \{e_5, e_7, e_{11}, e_{13}\} \rightarrow \{v_2, v_3, v_8, v_{10}\}; & c_{12} &= \{e_5, e_8, e_{20}, e_{23}\} \rightarrow \{v_2, v_5, v_8, v_{12}\}; \\
 c_{13} &= \{e_6, e_7, e_{12}, e_{13}\} \rightarrow \{v_2, v_3, v_9, v_{10}\}; & c_{14} &= \{e_6, e_8, e_{21}, e_{23}\} \rightarrow \{v_2, v_5, v_9, v_{12}\}; \\
 c_{15} &= \{e_7, e_8, e_{16}, e_{18}\} \rightarrow \{v_2, v_4, v_{10}, v_{12}\}; & c_{16} &= \{e_9, e_{10}, e_{14}, e_{15}\} \rightarrow \{v_3, v_4, v_6, v_7\}; \\
 c_{17} &= \{e_9, e_{11}, e_{19}, e_{20}\} \rightarrow \{v_3, v_5, v_6, v_8\}; & c_{18} &= \{e_9, e_{12}, e_{19}, e_{21}\} \rightarrow \{v_3, v_5, v_6, v_9\}; \\
 c_{19} &= \{e_9, e_{13}, e_{14}, e_{16}\} \rightarrow \{v_3, v_4, v_6, v_{10}\}; & c_{20} &= \{e_{10}, e_{13}, e_{15}, e_{16}\} \rightarrow \{v_3, v_4, v_7, v_{10}\}; \\
 c_{21} &= \{e_{11}, e_{12}, e_{20}, e_{21}\} \rightarrow \{v_3, v_5, v_8, v_9\}; & c_{22} &= \{e_{14}, e_{17}, e_{19}, e_{22}\} \rightarrow \{v_4, v_5, v_6, v_{11}\}; \\
 c_{23} &= \{e_{14}, e_{18}, e_{19}, e_{23}\} \rightarrow \{v_4, v_5, v_6, v_{12}\}; & c_{24} &= \{e_{17}, e_{18}, e_{22}, e_{23}\} \rightarrow \{v_4, v_5, v_{11}, v_{12}\}.
 \end{aligned}$$

Определим значение функционала Маклейна для множества изометрических циклов. В нашем случае оно равно 176.

Случайным образом осуществим перестановку циклов (вариант 1).

(1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
	14	18	9	20	15	8	7	3	19	24	17	23	5	11	16	6	2	1	13	10
	21	22	23	24)															
	22	4	21	12																

Связь новой нумерации циклов с исходной:

Новый номер	Старый номер	Множество изометрических циклов графа в виде ребер:	Множество изометрических циклов графа в виде вершин:
c ₁	c ₁₄	{e ₆ ,e ₈ ,e ₂₁ ,e ₂₃ };	{v ₂ ,v ₅ ,v ₉ ,v ₁₂ };
c ₂	c ₁₈	{e ₉ ,e ₁₂ ,e ₁₉ ,e ₂₁ };	{v ₃ ,v ₅ ,v ₆ ,v ₉ };
c ₃	c ₉	{e ₅ ,e ₆ ,e ₁₁ ,e ₁₂ };	{v ₂ ,v ₃ ,v ₈ ,v ₉ };
c ₄	c ₂₀	{e ₁₀ ,e ₁₃ ,e ₁₅ ,e ₁₆ };	{v ₃ ,v ₄ ,v ₇ ,v ₁₀ };
c ₅	c ₁₅	{e ₇ ,e ₈ ,e ₁₆ ,e ₁₈ };	{v ₂ ,v ₄ ,v ₁₀ ,v ₁₂ };
c ₆	c ₈	{e ₃ ,e ₄ ,e ₁₆ ,e ₁₇ };	{v ₁ ,v ₄ ,v ₁₀ ,v ₁₁ };
c ₇	c ₇	{e ₂ ,e ₄ ,e ₂₁ ,e ₂₂ };	{v ₁ ,v ₅ ,v ₉ ,v ₁₁ };
c ₈	c ₃	{e ₁ ,e ₃ ,e ₁₅ ,e ₁₆ };	{v ₁ ,v ₄ ,v ₇ ,v ₁₀ };
c ₉	c ₁₉	{e ₉ ,e ₁₃ ,e ₁₄ ,e ₁₆ };	{v ₃ ,v ₄ ,v ₆ ,v ₁₀ };
c ₁₀	c ₂₄	{e ₁₇ ,e ₁₈ ,e ₂₂ ,e ₂₃ };	{v ₄ ,v ₅ ,v ₁₁ ,v ₁₂ };
c ₁₁	c ₁₇	{e ₉ ,e ₁₁ ,e ₁₉ ,e ₂₀ };	{v ₃ ,v ₅ ,v ₆ ,v ₈ };
c ₁₂	c ₂₃	{e ₁₄ ,e ₁₈ ,e ₁₉ ,e ₂₃ };	{v ₄ ,v ₅ ,v ₆ ,v ₁₂ };
c ₁₃	c ₅	{e ₂ ,e ₃ ,e ₆ ,e ₇ };	{v ₁ ,v ₂ ,v ₉ ,v ₁₀ };
c ₁₄	c ₁₁	{e ₅ ,e ₇ ,e ₁₁ ,e ₁₃ };	{v ₂ ,v ₃ ,v ₈ ,v ₁₀ };
c ₁₅	c ₁₆	{e ₉ ,e ₁₀ ,e ₁₄ ,e ₁₅ };	{v ₃ ,v ₄ ,v ₆ ,v ₇ };
c ₁₆	c ₆	{e ₂ ,e ₃ ,e ₁₂ ,e ₁₃ };	{v ₁ ,v ₃ ,v ₉ ,v ₁₀ };
c ₁₇	c ₂	{e ₁ ,e ₃ ,e ₁₀ ,e ₁₃ };	{v ₁ ,v ₃ ,v ₇ ,v ₁₀ };
c ₁₈	c ₁	{e ₁ ,e ₂ ,e ₁₀ ,e ₁₂ };	{v ₁ ,v ₃ ,v ₇ ,v ₉ };
c ₁₉	c ₁₃	{e ₆ ,e ₇ ,e ₁₂ ,e ₁₃ };	{v ₂ ,v ₃ ,v ₉ ,v ₁₀ };
c ₂₀	c ₁₀	{e ₅ ,e ₆ ,e ₂₀ ,e ₂₁ };	{v ₂ ,v ₅ ,v ₈ ,v ₉ };
c ₂₁	c ₂₂	{e ₁₄ ,e ₁₇ ,e ₁₉ ,e ₂₂ };	{v ₄ ,v ₅ ,v ₆ ,v ₁₁ };
c ₂₂	c ₄	{e ₁ ,e ₄ ,e ₁₅ ,e ₁₇ };	{v ₁ ,v ₄ ,v ₇ ,v ₁₁ };
c ₂₃	c ₂₁	{e ₁₁ ,e ₁₂ ,e ₂₀ ,e ₂₁ };	{v ₃ ,v ₅ ,v ₈ ,v ₉ };
c ₂₄	c ₁₂	{e ₅ ,e ₈ ,e ₂₀ ,e ₂₃ };	{v ₂ ,v ₅ ,v ₈ ,v ₁₂ };

Будем последовательно удалять циклы из множества изометрических циклов C_τ . Удаление циклов будем описывать как вычисление алгебраической обратной производной структурного числа [17] (здесь и далее алгоритм работает с новой системой обозначения циклов).

$$F\left(\frac{\delta^1 C_\tau}{\delta c_{19}}\right) = 148; \quad F\left(\frac{\delta^2 C_\tau}{\delta c_{19} \delta c_{16}}\right) = 126; \quad F\left(\frac{\delta^3 C_\tau}{\delta c_{19} \delta c_{16} \delta c_{23}}\right) = 108;$$

$$F\left(\frac{\delta^4 C_\tau}{\delta c_{19} \delta c_{16} \delta c_{23} \delta c_9}\right) = 90; \quad F\left(\frac{\delta^5 C_\tau}{\delta c_{19} \delta c_{16} \delta c_{23} \delta c_9 \delta c_8}\right) = 74;$$

$$F\left(\frac{\delta^6 C_\tau}{\delta c_{19} \delta c_{16} \delta c_{23} \delta c_9 \delta c_8 \delta c_{20}}\right) = 60; \quad F\left(\frac{\delta^7 C_\tau}{\delta c_{19} \delta c_{16} \delta c_{23} \delta c_9 \delta c_8 \delta c_{20} \delta c_{21}}\right) = 48;$$

$$F\left(\frac{\delta^8 C_\tau}{\delta c_{19} \delta c_{16} \delta c_{23} \delta c_9 \delta c_8 \delta c_{20} \delta c_{21} \delta c_{18}}\right) = 38; \quad F\left(\frac{\delta^9 C_\tau}{\delta c_{19} \delta c_{16} \delta c_{23} \delta c_9 \delta c_8 \delta c_{20} \delta c_{21} \delta c_{18} \delta c_1}\right) = 28;$$

$$F\left(\frac{\delta^{10} C_\tau}{\delta c_{19} \delta c_{16} \delta c_{23} \delta c_9 \delta c_8 \delta c_{20} \delta c_{21} \delta c_{18} \delta c_1 \delta c_{14}}\right) = 20; \quad F\left(\frac{\delta^{11} C_\tau}{\delta c_{19} \delta c_{16} \delta c_{23} \delta c_9 \delta c_8 \delta c_{20} \delta c_{21} \delta c_{18} \delta c_1 \delta c_{14} \delta c_6}\right) = 12;$$

$$F\left(\frac{\delta^{12} C_\tau}{\delta c_{19} \delta c_{16} \delta c_{23} \delta c_9 \delta c_8 \delta c_{20} \delta c_{21} \delta c_{18} \delta c_1 \delta c_{14} \delta c_6 \delta c_{15}}\right) = 6.$$

Напомним, что алгебраической обратной производной структурного числа называется структурное число вида $\frac{\delta W}{\delta \alpha} = W \mid$ столбцы, содержащие элемент α , опущены. Алгебраическая обратная производная структурного числа W эквивалентна представлению множеств, не содержащих базисы с номером элемента α .

В результате удаления циклов из множества C_τ получим следующий базис:

$$\begin{aligned} c_2 &= \{e_1, e_3, e_{10}, e_{13}\} \rightarrow \{v_1, v_3, v_7, v_{10}\}; & c_3 &= \{e_1, e_3, e_{15}, e_{16}\} \rightarrow \{v_1, v_4, v_7, v_{10}\}; \\ c_4 &= \{e_1, e_4, e_{15}, e_{17}\} \rightarrow \{v_1, v_4, v_7, v_{11}\}; & c_5 &= \{e_2, e_3, e_6, e_7\} \rightarrow \{v_1, v_2, v_9, v_{10}\}; \\ c_7 &= \{e_2, e_4, e_{21}, e_{22}\} \rightarrow \{v_1, v_5, v_9, v_{11}\}; & c_{10} &= \{e_5, e_6, e_{20}, e_{21}\} \rightarrow \{v_2, v_5, v_8, v_9\}; \\ c_{11} &= \{e_5, e_7, e_{11}, e_{13}\} \rightarrow \{v_2, v_3, v_8, v_{10}\}; & c_{12} &= \{e_5, e_8, e_{20}, e_{23}\} \rightarrow \{v_2, v_5, v_8, v_{12}\}; \\ c_{13} &= \{e_6, e_7, e_{12}, e_{13}\} \rightarrow \{v_2, v_3, v_9, v_{10}\}; & c_{17} &= \{e_9, e_{11}, e_{19}, e_{20}\} \rightarrow \{v_3, v_5, v_6, v_8\}; \\ c_{22} &= \{e_{14}, e_{17}, e_{19}, e_{22}\} \rightarrow \{v_4, v_5, v_6, v_{11}\}; & c_{24} &= \{e_{17}, e_{18}, e_{22}, e_{23}\} \rightarrow \{v_4, v_5, v_{11}, v_{12}\}. \end{aligned}$$

Методом Гаусса определяем ранг системы выделенных циклов. При определении ранга выясняется, что система линейно зависима. Прекращаем дальнейшие вычисления для заданной перестановки циклов. Случайным образом определяем другую перестановку (вариант 2)

$$\left(\begin{array}{cccccccccccccccccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 & 13 & 14 & 15 & 16 & 17 & 18 & 19 & 20 \\ 17 & 20 & 9 & 11 & 14 & 1 & 5 & 22 & 19 & 18 & 7 & 10 & 15 & 8 & 21 & 6 & 23 & 24 & 16 & 12 \\ \\ 21 & 22 & 23 & 24 & & & & & & & & & & & & & & & & & \\ 2 & 3 & 4 & 13 & & & & & & & & & & & & & & & & & \end{array} \right)$$

Связь новой нумерации циклов с исходной:

Новый номер	Старый номер	Множество изометрических циклов графа в виде ребер:	Множество изометрических циклов графа в виде вершин:
c ₁	c ₁₇	{e ₉ , e ₁₁ , e ₁₉ , e ₂₀ };	{v ₃ , v ₅ , v ₆ , v ₈ };
c ₂	c ₂₀	{e ₁₀ , e ₁₃ , e ₁₅ , e ₁₆ };	{v ₃ , v ₄ , v ₇ , v ₁₀ };
c ₃	c ₉	{e ₅ , e ₆ , e ₁₁ , e ₁₂ };	{v ₂ , v ₃ , v ₈ , v ₉ };
c ₄	c ₁₁	{e ₅ , e ₇ , e ₁₁ , e ₁₃ };	{v ₂ , v ₃ , v ₈ , v ₁₀ };
c ₅	c ₁₄	{e ₆ , e ₈ , e ₂₁ , e ₂₃ };	{v ₂ , v ₅ , v ₉ , v ₁₂ };
c ₆	c ₁	{e ₁ , e ₂ , e ₁₀ , e ₁₂ };	{v ₁ , v ₃ , v ₇ , v ₉ };
c ₇	c ₅	{e ₂ , e ₃ , e ₆ , e ₇ };	{v ₁ , v ₂ , v ₉ , v ₁₀ };
c ₈	c ₂₂	{e ₁₄ , e ₁₇ , e ₁₉ , e ₂₂ };	{v ₄ , v ₅ , v ₆ , v ₁₁ };
c ₉	c ₁₉	{e ₉ , e ₁₃ , e ₁₄ , e ₁₆ };	{v ₃ , v ₄ , v ₆ , v ₁₀ };
c ₁₀	c ₁₈	{e ₉ , e ₁₂ , e ₁₉ , e ₂₁ };	{v ₃ , v ₅ , v ₆ , v ₉ };

c ₁₁	c ₇	{e ₂ , e ₄ , e ₂₁ , e ₂₂ };	{v ₁ , v ₅ , v ₉ , v ₁₁ };
c ₁₂	c ₁₀	{e ₅ , e ₆ , e ₂₀ , e ₂₁ };	{v ₂ , v ₅ , v ₈ , v ₉ };
c ₁₃	c ₁₅	{e ₇ , e ₈ , e ₁₆ , e ₁₈ };	{v ₂ , v ₄ , v ₁₀ , v ₁₂ };
c ₁₄	c ₈	{e ₃ , e ₄ , e ₁₆ , e ₁₇ };	{v ₁ , v ₄ , v ₁₀ , v ₁₁ };
c ₁₅	c ₂₁	{e ₁₁ , e ₁₂ , e ₂₀ , e ₂₁ };	{v ₃ , v ₅ , v ₈ , v ₉ };
c ₁₆	c ₆	{e ₂ , e ₃ , e ₁₂ , e ₁₃ };	{v ₁ , v ₃ , v ₉ , v ₁₀ };
c ₁₇	c ₂₃	{e ₁₄ , e ₁₈ , e ₁₉ , e ₂₃ };	{v ₄ , v ₅ , v ₆ , v ₁₂ };
c ₁₈	c ₂₄	{e ₁₇ , e ₁₈ , e ₂₂ , e ₂₃ };	{v ₄ , v ₅ , v ₁₁ , v ₁₂ };
c ₁₉	c ₁₆	{e ₉ , e ₁₀ , e ₁₄ , e ₁₅ };	{v ₃ , v ₄ , v ₆ , v ₇ };
c ₂₀	c ₁₂	{e ₅ , e ₈ , e ₂₀ , e ₂₃ };	{v ₂ , v ₅ , v ₈ , v ₁₂ };
c ₂₁	c ₂	{e ₁ , e ₃ , e ₁₀ , e ₁₃ };	{v ₁ , v ₃ , v ₇ , v ₁₀ };
c ₂₂	c ₃	{e ₁ , e ₃ , e ₁₅ , e ₁₆ };	{v ₁ , v ₄ , v ₇ , v ₁₀ };
c ₂₃	c ₄	{e ₁ , e ₄ , e ₁₅ , e ₁₇ };	{v ₁ , v ₄ , v ₇ , v ₁₁ };
c ₂₄	c ₁₃	{e ₆ , e ₇ , e ₁₂ , e ₁₃ };	{v ₂ , v ₃ , v ₉ , v ₁₀ };

Последовательно удаляем циклы из множества изометрических циклов C_τ .

$$F\left(\frac{\delta^1 C_\tau}{\delta c_{24}}\right) = 148; \quad F\left(\frac{\delta^2 C_\tau}{\delta c_{24} \delta c_{16}}\right) = 126; \quad F\left(\frac{\delta^3 C_\tau}{\delta c_{24} \delta c_{16} \delta c_{22}}\right) = 108;$$

$$F\left(\frac{\delta^4 C_\tau}{\delta c_{24} \delta c_{16} \delta c_{22} \delta c_{15}}\right) = 90; \quad F\left(\frac{\delta^5 C_\tau}{\delta c_{24} \delta c_{16} \delta c_{22} \delta c_{15} \delta c_9}\right) = 74;$$

$$F\left(\frac{\delta^6 C_\tau}{\delta c_{24} \delta c_{16} \delta c_{22} \delta c_{15} \delta c_9 \delta c_{12}}\right) = 60; \quad F\left(\frac{\delta^7 C_\tau}{\delta c_{24} \delta c_{16} \delta c_{22} \delta c_{15} \delta c_9 \delta c_{12} \delta c_{18}}\right) = 48;$$

$$F\left(\frac{\delta^8 C_\tau}{\delta c_{24} \delta c_{16} \delta c_{22} \delta c_{15} \delta c_9 \delta c_{12} \delta c_{18} \delta c_{21}}\right) = 38; \quad F\left(\frac{\delta^9 C_\tau}{\delta c_{24} \delta c_{16} \delta c_{22} \delta c_{15} \delta c_9 \delta c_{12} \delta c_{18} \delta c_{21} \delta c_{10}}\right) = 28;$$

$$F\left(\frac{\delta^{10} C_\tau}{\delta c_{24} \delta c_{16} \delta c_{22} \delta c_{15} \delta c_9 \delta c_{12} \delta c_{18} \delta c_{21} \delta c_{10} \delta c_{23}}\right) = 22;$$

$$F\left(\frac{\delta^{11} C_\tau}{\delta c_{24} \delta c_{16} \delta c_{22} \delta c_{15} \delta c_9 \delta c_{12} \delta c_{18} \delta c_{21} \delta c_{10} \delta c_{23} \delta c_{20}}\right) = 16;$$

$$F\left(\frac{\delta^{12} C_\tau}{\delta c_{24} \delta c_{16} \delta c_{22} \delta c_{15} \delta c_9 \delta c_{12} \delta c_{18} \delta c_{21} \delta c_{10} \delta c_{23} \delta c_{20} \delta c_7}\right) = 10.$$

В результате удаления циклов из множества C_τ получим следующий базис, состоящий из изометрических циклов:

$$\begin{aligned} c_1 &= \{e_9, e_{11}, e_{19}, e_{20}\} \rightarrow \{v_3, v_5, v_6, v_8\}; & c_2 &= \{e_{10}, e_{13}, e_{15}, e_{16}\} \rightarrow \{v_3, v_4, v_7, v_{10}\}; \\ c_3 &= \{e_5, e_6, e_{11}, e_{12}\} \rightarrow \{v_2, v_3, v_8, v_9\}; & c_4 &= \{e_5, e_7, e_{11}, e_{13}\} \rightarrow \{v_2, v_3, v_8, v_{10}\}; \\ c_5 &= \{e_6, e_8, e_{21}, e_{23}\} \rightarrow \{v_2, v_5, v_9, v_{12}\}; & c_6 &= \{e_1, e_2, e_{10}, e_{12}\} \rightarrow \{v_1, v_3, v_7, v_9\}; \\ c_8 &= \{e_{14}, e_{17}, e_{19}, e_{22}\} \rightarrow \{v_4, v_5, v_6, v_{11}\}; & c_{11} &= \{e_2, e_4, e_{21}, e_{22}\} \rightarrow \{v_1, v_5, v_9, v_{11}\}; \\ c_{13} &= \{e_7, e_8, e_{16}, e_{18}\} \rightarrow \{v_2, v_4, v_{10}, v_{12}\}; & c_{14} &= \{e_3, e_4, e_{16}, e_{17}\} \rightarrow \{v_1, v_4, v_{10}, v_{11}\}; \\ c_{17} &= \{e_{14}, e_{18}, e_{19}, e_{23}\} \rightarrow \{v_4, v_5, v_6, v_{12}\}; & c_{19} &= \{e_9, e_{10}, e_{14}, e_{15}\} \rightarrow \{v_3, v_4, v_6, v_7\}. \end{aligned}$$

Выделенная система циклов c_b состоит из независимых циклов и является базисом подпространства циклов C . Определим величину значения функционала Понтрягина-

Куратовского равную 30 для базиса c_b . Продолжим процедуру удаления циклов из базиса c_b , описывая процесс в терминах дифференцирования структурного числа [5].

$$FS\left(\frac{\partial c_b}{\partial c_1}\right) = 18; \quad FS\left(\frac{\partial^2 c_b}{\partial c_1 \partial c_6}\right) = 12;$$

$$FS\left(\frac{\partial^3 c_b}{\partial c_1 \partial c_6 \partial c_3}\right) = 12; \quad FS\left(\frac{\partial^4 c_b}{\partial c_1 \partial c_6 \partial c_3 \partial c_5}\right) = 12.$$

Достижение нулевого значения функционала Понтрягина-Куратовского для данной системы циклов невозможно, так как дальнейшее удаление цикла нарушает условие Эйлера. Процесс вычисления прекращается. Случайным образом осуществляем новую перестановку (вариант 3).

(1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	
	23	2	5	1	10	15	17	13	3	21	12	16	4	8	20	19	6	24	11	18	
	21	22	23	24)																
	9	7	22	14																	

Связь новой нумерации циклов с исходной:

Новый номер	Старый номер	Множество изометрических циклов графа в виде ребер:	Множество изометрических циклов графа в виде вершин:
c ₁	c ₂₃	{e ₁₄ , e ₁₈ , e ₁₉ , e ₂₃ };	{v ₄ , v ₅ , v ₆ , v ₁₂ };
c ₂	c ₂	{e ₁ , e ₃ , e ₁₀ , e ₁₃ };	{v ₁ , v ₃ , v ₇ , v ₁₀ };
c ₃	c ₅	{e ₂ , e ₃ , e ₆ , e ₇ };	{v ₁ , v ₂ , v ₉ , v ₁₀ };
c ₄	c ₁	{e ₁ , e ₂ , e ₁₀ , e ₁₂ };	{v ₁ , v ₃ , v ₇ , v ₉ };
c ₅	c ₁₀	{e ₅ , e ₆ , e ₂₀ , e ₂₁ };	{v ₂ , v ₅ , v ₈ , v ₉ };
c ₆	c ₁₅	{e ₇ , e ₈ , e ₁₆ , e ₁₈ };	{v ₂ , v ₄ , v ₁₀ , v ₁₂ };
c ₇	c ₁₇	{e ₉ , e ₁₁ , e ₁₉ , e ₂₀ };	{v ₃ , v ₅ , v ₆ , v ₈ };
c ₈	c ₁₃	{e ₆ , e ₇ , e ₁₂ , e ₁₃ };	{v ₂ , v ₃ , v ₉ , v ₁₀ };
c ₉	c ₃	{e ₁ , e ₃ , e ₁₅ , e ₁₆ };	{v ₁ , v ₄ , v ₇ , v ₁₀ };
c ₁₀	c ₂₁	{e ₁₁ , e ₁₂ , e ₂₀ , e ₂₁ };	{v ₃ , v ₅ , v ₈ , v ₉ };
c ₁₁	c ₁₂	{e ₅ , e ₈ , e ₂₀ , e ₂₃ };	{v ₂ , v ₅ , v ₈ , v ₁₂ };
c ₁₂	c ₁₆	{e ₉ , e ₁₀ , e ₁₄ , e ₁₅ };	{v ₃ , v ₄ , v ₆ , v ₇ };
c ₁₃	c ₄	{e ₁ , e ₄ , e ₁₅ , e ₁₇ };	{v ₁ , v ₄ , v ₇ , v ₁₁ };
c ₁₄	c ₈	{e ₃ , e ₄ , e ₁₆ , e ₁₇ };	{v ₁ , v ₄ , v ₁₀ , v ₁₁ };
c ₁₅	c ₂₀	{e ₁₀ , e ₁₃ , e ₁₅ , e ₁₆ };	{v ₃ , v ₄ , v ₇ , v ₁₀ };
c ₁₆	c ₁₉	{e ₉ , e ₁₃ , e ₁₄ , e ₁₆ };	{v ₃ , v ₄ , v ₆ , v ₁₀ };
c ₁₇	c ₆	{e ₂ , e ₃ , e ₁₂ , e ₁₃ };	{v ₁ , v ₃ , v ₉ , v ₁₀ };
c ₁₈	c ₂₄	{e ₁₇ , e ₁₈ , e ₂₂ , e ₂₃ };	{v ₄ , v ₅ , v ₁₁ , v ₁₂ };
c ₁₉	c ₁₁	{e ₅ , e ₇ , e ₁₁ , e ₁₃ };	{v ₂ , v ₃ , v ₈ , v ₁₀ };
c ₂₀	c ₁₈	{e ₉ , e ₁₂ , e ₁₉ , e ₂₁ };	{v ₃ , v ₅ , v ₆ , v ₉ };
c ₂₁	c ₉	{e ₅ , e ₆ , e ₁₁ , e ₁₂ };	{v ₂ , v ₃ , v ₈ , v ₉ };
c ₂₂	c ₇	{e ₂ , e ₄ , e ₂₁ , e ₂₂ };	{v ₁ , v ₅ , v ₉ , v ₁₁ };
c ₂₃	c ₂₂	{e ₁₄ , e ₁₇ , e ₁₉ , e ₂₂ };	{v ₄ , v ₅ , v ₆ , v ₁₁ };
c ₂₄	c ₁₄	{e ₆ , e ₈ , e ₂₁ , e ₂₃ };	{v ₂ , v ₅ , v ₉ , v ₁₂ };

Последовательно удаляем циклы из множества изометрических циклов C_τ .

$$F\left(\frac{\delta^1 C_\tau}{\delta c_{17}}\right) = 148; \quad F\left(\frac{\delta^2 C_\tau}{\delta c_{17} \delta c_8}\right) = 126; \quad F\left(\frac{\delta^3 C_\tau}{\delta c_{17} \delta c_8 \delta c_{20}}\right) = 108;$$

$$F\left(\frac{\delta^4 C_\tau}{\delta c_{17} \delta c_8 \delta c_{20} \delta c_{15}}\right) = 90; \quad F\left(\frac{\delta^5 C_\tau}{\delta c_{17} \delta c_8 \delta c_{20} \delta c_{15} \delta c_5}\right) = 74;$$

$$F\left(\frac{\delta^6 C_\tau}{\delta c_{17} \delta c_8 \delta c_{20} \delta c_{15} \delta c_5 \delta c_{14}}\right) = 60; \quad F\left(\frac{\delta^7 C_\tau}{\delta c_{17} \delta c_8 \delta c_{20} \delta c_{15} \delta c_5 \delta c_{14} \delta c_1}\right) = 48;$$

$$F\left(\frac{\delta^8 C_\tau}{\delta c_{17} \delta c_8 \delta c_{20} \delta c_{15} \delta c_5 \delta c_{14} \delta c_1 \delta c_{21}}\right) = 38; \quad F\left(\frac{\delta^9 C_\tau}{\delta c_{17} \delta c_8 \delta c_{20} \delta c_{15} \delta c_5 \delta c_{14} \delta c_1 \delta c_{21} \delta c_9}\right) = 28;$$

$$F\left(\frac{\delta^{10} C_\tau}{\delta c_{17} \delta c_8 \delta c_{20} \delta c_{15} \delta c_5 \delta c_{14} \delta c_1 \delta c_{21} \delta c_9 \delta c_{24}}\right) = 22;$$

$$F\left(\frac{\delta^{11} C_\tau}{\delta c_{17} \delta c_8 \delta c_{20} \delta c_{15} \delta c_5 \delta c_{14} \delta c_1 \delta c_{21} \delta c_9 \delta c_{24} \delta c_{23}}\right) = 16;$$

$$F\left(\frac{\delta^{12} C_\tau}{\delta c_{17} \delta c_8 \delta c_{20} \delta c_{15} \delta c_5 \delta c_{14} \delta c_1 \delta c_{21} \delta c_9 \delta c_{24} \delta c_{23} \delta c_{19}}\right) = 10.$$

В результате выделена следующий базис состоящий из изометрических циклов:

$$\begin{aligned} c_2 &= \{e_1, e_3, e_{10}, e_{13}\} \rightarrow \{v_1, v_3, v_7, v_{10}\}; \\ c_3 &= \{e_2, e_3, e_6, e_7\} \rightarrow \{v_1, v_2, v_9, v_{10}\}; \\ c_4 &= \{e_1, e_2, e_{10}, e_{12}\} \rightarrow \{v_1, v_3, v_7, v_9\}; \\ c_6 &= \{e_7, e_8, e_{16}, e_{18}\} \rightarrow \{v_2, v_4, v_{10}, v_{12}\}; \\ c_7 &= \{e_9, e_{11}, e_{19}, e_{20}\} \rightarrow \{v_3, v_5, v_6, v_8\}; \\ c_{10} &= \{e_{11}, e_{12}, e_{20}, e_{21}\} \rightarrow \{v_3, v_5, v_8, v_9\}; \\ c_{11} &= \{e_5, e_8, e_{20}, e_{23}\} \rightarrow \{v_2, v_5, v_8, v_{12}\}; \\ c_{12} &= \{e_9, e_{10}, e_{14}, e_{15}\} \rightarrow \{v_3, v_4, v_6, v_7\}; \\ c_{13} &= \{e_1, e_4, e_{15}, e_{17}\} \rightarrow \{v_1, v_4, v_7, v_{11}\}; \\ c_{16} &= \{e_9, e_{13}, e_{14}, e_{16}\} \rightarrow \{v_3, v_4, v_6, v_{10}\}; \\ c_{18} &= \{e_{17}, e_{18}, e_{22}, e_{23}\} \rightarrow \{v_4, v_5, v_{11}, v_{12}\}; \\ c_{22} &= \{e_2, e_4, e_{21}, e_{22}\} \rightarrow \{v_1, v_5, v_9, v_{11}\}. \end{aligned}$$

Выделенная система циклов c_b состоит из независимых циклов и является базисом подпространства циклов C . Значение функционала Понтрягина-Куратовского равно 30 для базиса c_b . Продолжим процедуру удаления циклов из базиса c_b , описывая процесс в терминах дифференцирования структурного числа [5].

$$FS\left(\frac{\partial c_b}{\partial c_7}\right) = 18; \quad FS\left(\frac{\partial^2 c_b}{\partial c_7 \partial c_3}\right) = 12;$$

$$FS\left(\frac{\partial^3 c_b}{\partial c_7 \partial c_3 \partial c_2}\right) = 0.$$

Функционал Понтрягина-Куратовского достигает нулевого значения следовательно, выделен плоский суграф. Вектор циклов по ребрам имеет вид:

$$P_e = (2,2,0,2,1,0,1,2,2,2,1,2,1,2,2,2,2,2,0,2,2,2,2).$$

В итоге из графа производится удаление трех ребер e_3, e_6, e_{19} . Топологический рисунок плоского суграфа представлен на рис. 2. Система циклов, описывающая плоскую часть графа, имеет вид:

- $c_4 = \{e_1, e_2, e_{10}, e_{12}\} \rightarrow \{v_1, v_3, v_7, v_9\};$
- $c_6 = \{e_7, e_8, e_{16}, e_{18}\} \rightarrow \{v_2, v_4, v_{10}, v_{12}\};$
- $c_{10} = \{e_{11}, e_{12}, e_{20}, e_{21}\} \rightarrow \{v_3, v_5, v_8, v_9\};$
- $c_{11} = \{e_5, e_8, e_{20}, e_{23}\} \rightarrow \{v_2, v_5, v_8, v_{12}\};$
- $c_{12} = \{e_9, e_{10}, e_{14}, e_{15}\} \rightarrow \{v_3, v_4, v_6, v_7\};$
- $c_{13} = \{e_1, e_4, e_{15}, e_{17}\} \rightarrow \{v_1, v_4, v_7, v_{11}\};$
- $c_{16} = \{e_9, e_{13}, e_{14}, e_{16}\} \rightarrow \{v_3, v_4, v_6, v_{10}\};$
- $c_{18} = \{e_{17}, e_{18}, e_{22}, e_{23}\} \rightarrow \{v_4, v_5, v_{11}, v_{12}\};$
- $c_{22} = \{e_2, e_4, e_{21}, e_{22}\} \rightarrow \{v_1, v_5, v_9, v_{11}\}.$

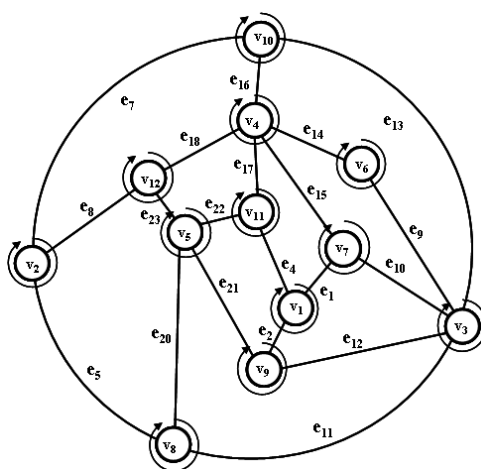


Рис. 2.12. Рисунок плоской части графа G_3 .

Диаграмма топологического рисунка графа имеет вид:

$v_1:$	v_7	v_9	v_{11}		
$v_2:$	v_{11}	v_{12}	v_8		
$v_3:$	v_1	v_7	v_6	v_{10}	v_8
$v_4:$	v_6	v_7	v_{11}	v_{12}	v_{10}
$v_5:$	v_9	v_8	v_{12}	v_{11}	
$v_6:$	v_3	v_4			
$v_7:$	v_1	v_4	v_3		
$v_8:$	v_2	v_5	v_3		
$v_9:$	v_1	v_3	v_5		
$v_{10}:$	v_2	v_3	v_4		
$v_{11}:$	v_1	v_5	v_4		
$v_{12}:$	v_2	v_4	v_5		

На рис. 2.13 представлен график удаления циклов. Сплошная линия характеризует процесс удаления циклов для 1-го варианта. Штриховая линия характеризует процесс для 2-го варианта. Пунктирная линия характеризует процесс для 3-го варианта.

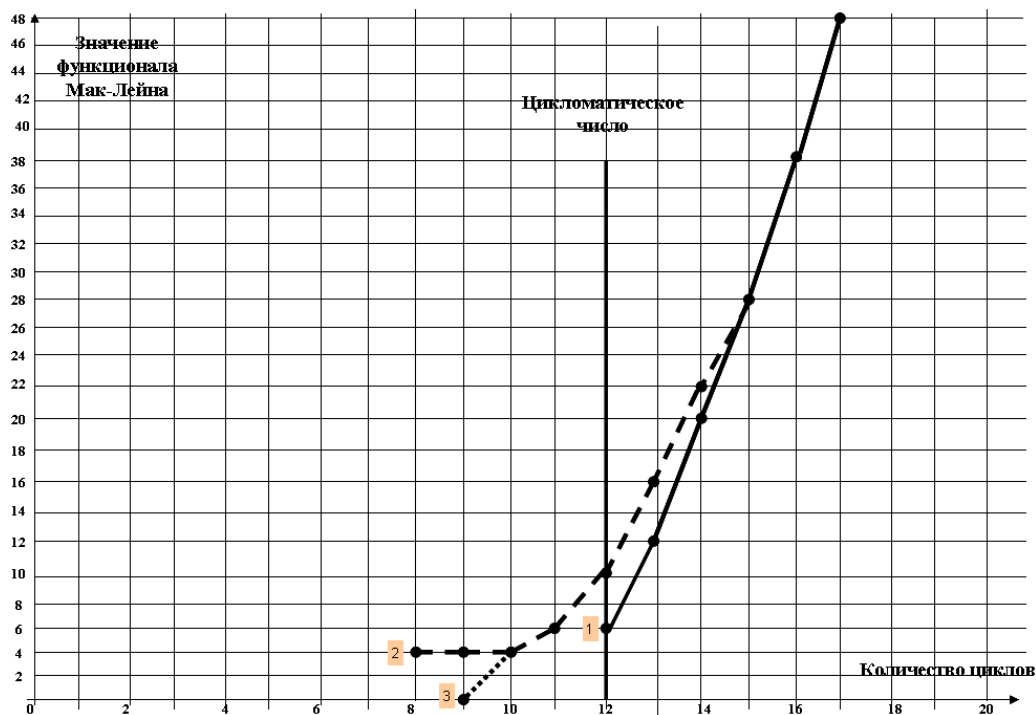


Рис. 2.13. График вычисления трех конфигураций.

Опишем фрагментарный алгоритм построения плоской части непланарного графа.

Инициализация. В графе выделяем множество изометрических циклов C_τ , упорядочиваем и нумеруем. Определяем количество допустимых перестановок.

шаг 1. [Создание максимального фрагмента]. Случайным образом определяем перестановку циклов во множестве C_τ . Первой перестановке присваиваем номер 1.

шаг 2. [Определение номера перестановки]. Определяем номер перестановки. Если номер перестановки превышает номер допустимой перестановки, то идем на шаг 8.

шаг 3. [Выделение системы циклов с мощностью $m-n+1$]. Методом наискорейшего спуска выделяем подмножество циклов мощностью $m-n+1$.

шаг 4. [Проверка на независимость]. Проверяем выбранное подмножество на линейную независимость. Если система циклов зависима, то прекращаем процесс вычисления и переходим на шаг 1.

шаг 5. [Определение значения функционала]. Определяем значение функционала Понтрягина-Куратовского.

шаг 6. [Выбор цикла]. Методом наискорейшего спуска выбираем циклы удовлетворяющие требованиям плоской конфигурации; производим удаление выбранного цикла до достижения нулевого значения функционала Понтрягина-Куратовского. Если таких циклов нет, то идем на шаг 1. Иначе продолжаем процесс.

шаг 7. [Построение рисунка графа]. Определяем вращение вершин и строим топологический рисунок графа. Записываем выбранный вариант во множество плоских конфигураций. Если возможность построения не исчерпана, идем на шаг 1.

шаг 8. [Отбор рисунков]. Из множества плоских конфигураций производим отбор плоских конфигураций с минимальным числом удаленных ребер.

шаг 9. [Конец работы алгоритма]. Конец работы алгоритма.

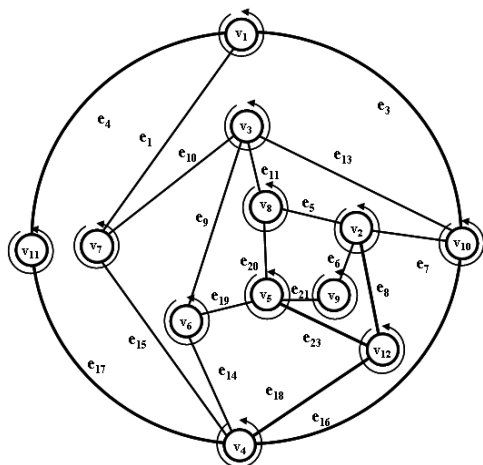


Рис. 2.14. Рисунок с удаленными ребрами e_2, e_{12}, e_{22} .

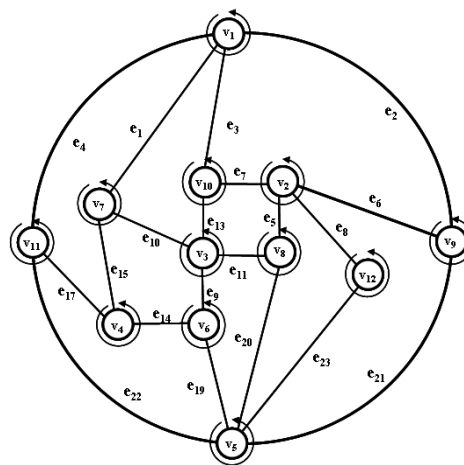


Рис. 2.15. Рисунок с удаленными ребрами e_{12}, e_{16}, e_{18} .

По результатам расчетов следует, что задача поиска планарного суграфа с максимальным числом ребер сводится к поиску максимального фрагмента во фрагментарной структуре. То есть, задача сводится к комбинаторной задаче $F(s) \xrightarrow{s \in S_N} \max$ отыскания некоторой экстремальной перестановки на множестве перестановок изометрических циклов (N - мощность множества изометрических циклов). Причем, любая перестановка является допустимой.

Множество перестановок может рассматриваться как метрическое пространство с некоторой метрикой $p : S_N \times S_N \rightarrow R_+^1$ [16]. В процессе поиска решения выбирается очередная перестановка и ищется решение методом наискорейшего спуска. Тогда каждой перестановке можно поставить в соответствие число ребер планарного суграфа, соответствующего этой перестановке.

Условие остановки: количество перебранных перестановок достигает предельного значения. Перестановки из множества, имеющие лучшее значение критерия, определяют приближенное решение задачи.

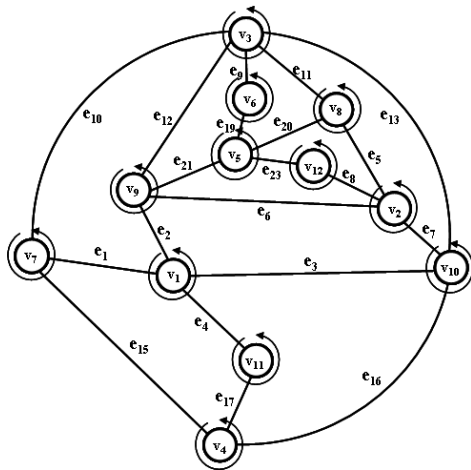


Рис. 2.16. Рисунок с удаленными ребрами e_{14}, e_{18}, e_{22}

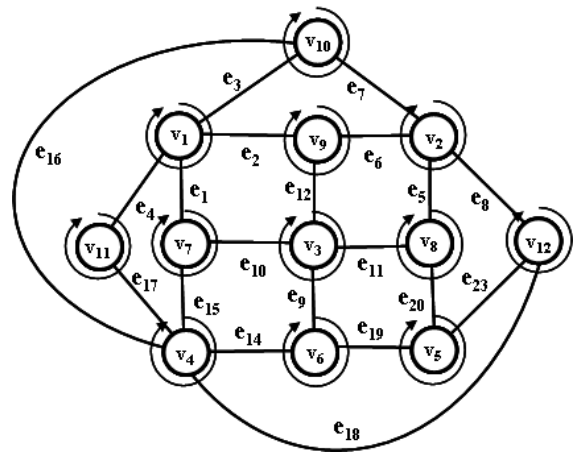


Рис. 2.17. Рисунок с удаленными ребрами e_{13}, e_{21}, e_{22} .

Оценим теперь вычислительную сложность фрагментарного алгоритма.

В соответствии с [16] трудоемкость построения множества изометричных циклов определяется величиной $O(m^2n/\log_2 n + mn^2)$. Здесь n - число вершин, m - число ребер графа. Максимально возможная мощность множества изометрических циклов составляет величину $N = O(n^3)$. Трудоемкость самого фрагментарного алгоритма в рассматриваемом случае ограничена величиной максимального количества изометрических циклов

$$n(n-1)(n-2)/6 = m(n-2)/3 = (mn-2m)/3$$

и может быть определена как $O(m^2n^2)$. Таким образом, в худшем случае количество операций для решения задачи с учетом выделения множества изометрических циклов оценивается величиной порядка $O(n^6)$.

С целью исследования разработанного метода был поставлен численный эксперимент по отысканию максимально планарного суграфа. Для поиска решений использовалась программная реализация фрагментарного подхода на перестановках.

Для графа, представленного на рис. 2.11 было выделено несколько топологических рисунков плоского суграфа. Некоторые из выделенных рисунков представлены на рис. 2.14 –рис. 2.19. Для выделенных рисунков произведено удаление только трех ребер, что и составляет граф близкий к максимально плоскому суграфу.

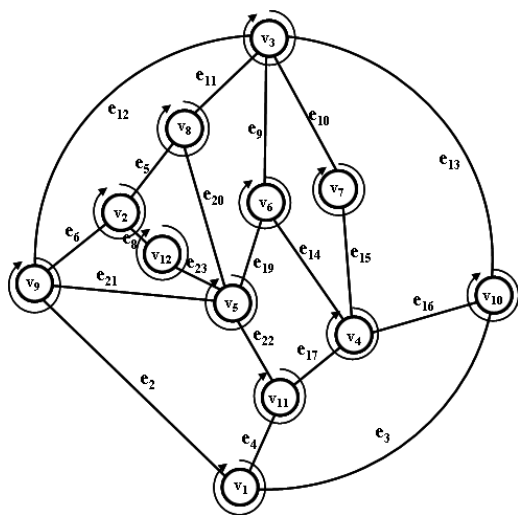


Рис. 2.18. Рисунок с удаленными ребрами e_1, e_7, e_{18} .

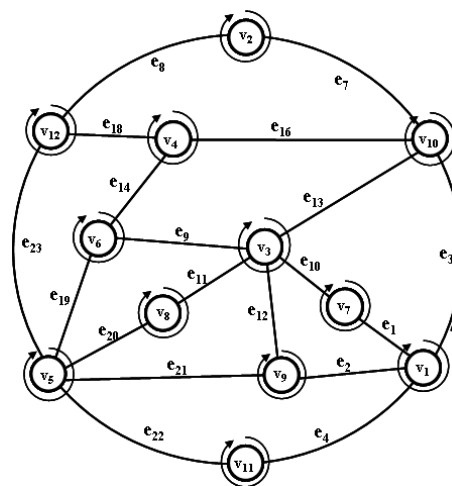


Рис. 2.19. Рисунок с удаленными ребрами e_5, e_6, e_{15}, e_{17} .

2.5. Выделение базиса и построение плоской части непланарного графа

В конечном итоге, приходится определять базис подпространства циклов, состоящий из изометрических циклов. Имеется несколько путей для выделения базиса состоящего из изометрических циклов графа.

1. Применение метода наискорейшего спуска для случайной конфигурации множества изометрических циклов. В этом случае независимое множество изометрических циклов с мощностью $\text{card}(c_b) = m - n + 1$ характеризуется минимальным значением функционала Маклейна и определяется порядком расположения элементов во множестве циклов. Мало того, при увеличении мощности множества изометрических циклов, увеличивается вероятность получения нелинейной системы циклов для подмножества изометрических циклов с мощностью равной цикломатическому числу графа.

2. Базис подпространства циклов $c_b \in C_b$, состоящий из изометрических циклов может быть выделен из случайной конфигурации множества изометрических циклов графа методом Гаусса. Здесь опять под случайной конфигурацией множества изометрических циклов подразумевается последовательность расположения элементов во множестве циклов.

3. Базис линейного подпространства циклов состоящего из изометрических циклов мощностью равной цикломатическому числу графа $\nu(G) = m - n + 1$ может быть выбран случайным образом из множества баз матриоида изометрических циклов C_y .

Множество баз матриоида изометрических циклов можно представлять как структурное число \mathbf{W} , где каждый столбец (элемент) характеризует базис подпространства циклов. С другой стороны, структурное число можно представлять как произведение однострочных структурных чисел характеризующих изометрические циклы, проходящие по выбранной хорде.

Причем согласно правилам алгебры структурных чисел [6] выбор дерева графа не влияет на конечный результат.

В свою очередь, подмножеству циклов можно поставить в соответствие два вектора. Вектор циклов по ребрам P_e , определяющий количество изометрических циклов, проходящих по ребрам данного подмножества, и вектор циклов по вершинам P_v , определяющий количество изометрических циклов, проходящих по вершинам данного подмножества. Базис линейного подпространства циклов не планарного графа должен удовлетворять следующим требованиям:

1. Значение функционала Маклейна должно стремиться к минимальному значению.
2. В векторе циклов по ребрам не должно быть нулевых элементов.
3. В векторе циклов по ребрам обязательно должны содержаться единичные элементы.
4. В векторе циклов по вершинам не должно быть нулевых элементов.

Естественно, что значение функционала Маклейна для конфигурации непланарного графа больше нуля. Следовательно, для достижения нулевого значения функционала Маклейна нужно удалить часть циклов. Для описания процесса удаления циклов методом наискорейшего спуска можно воспользоваться операцией дифференцирования структурного числа W изометрических циклов [8,9].

Пример 2.6. Рассмотрим процесс выделения плоской части графа, используя в качестве базиса элемент базы матроида изометрических циклов на примере следующего неориентированного графа.

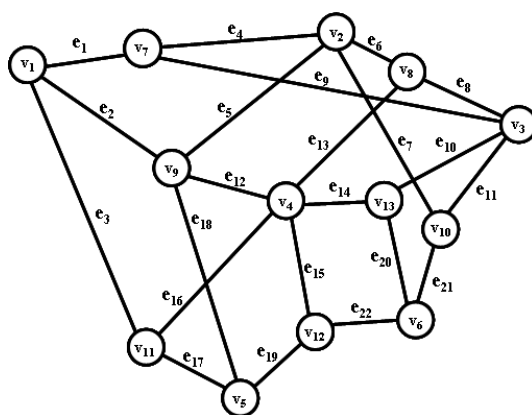


Рис. 2.20. Граф G_4 .

Множество изометрических циклов графа:

	Множество изометрических циклов графа в виде ребер:	Множество изометрических циклов графа в виде вершин:
c_1	$\{e_1, e_2, e_4, e_5\};$	$\{v_1, v_2, v_7, v_9\};$
c_2	$\{e_1, e_3, e_8, e_9, e_{13}, e_{16}\};$	$\{v_1, v_3, v_4, v_7, v_8, v_{11}\};$
c_3	$\{e_1, e_3, e_9, e_{10}, e_{14}, e_{16}\};$	$\{v_1, v_3, v_4, v_7, v_{11}, v_{13}\};$
c_4	$\{e_2, e_3, e_{12}, e_{16}\};$	$\{v_1, v_4, v_9, v_{11}\};$

c ₅	{e ₂ ,e ₃ ,e ₁₇ ,e ₁₈ };	{v ₁ ,v ₅ ,v ₉ ,v ₁₁ };
c ₆	{e ₄ ,e ₆ ,e ₈ ,e ₉ };	{v ₂ ,v ₃ ,v ₇ ,v ₈ };
c ₇	{e ₄ ,e ₇ ,e ₉ ,e ₁₁ };	{v ₂ ,v ₃ ,v ₇ ,v ₁₀ };
c ₈	{e ₅ ,e ₆ ,e ₁₂ ,e ₁₃ };	{v ₂ ,v ₄ ,v ₈ ,v ₉ };
c ₉	{e ₅ ,e ₇ ,e ₁₈ ,e ₁₉ ,e ₂₁ ,e ₂₂ };	{v ₂ ,v ₅ ,v ₆ ,v ₉ ,v ₁₀ ,v ₁₂ };
c ₁₀	{e ₆ ,e ₇ ,e ₈ ,e ₁₁ };	{v ₂ ,v ₃ ,v ₈ ,v ₁₀ };
c ₁₁	{e ₅ ,e ₇ ,e ₁₂ ,e ₁₅ ,e ₂₁ ,e ₂₂ };	{v ₂ ,v ₄ ,v ₆ ,v ₉ ,v ₁₀ ,v ₁₂ };
c ₁₂	{e ₅ ,e ₇ ,e ₁₂ ,e ₁₄ ,e ₂₀ ,e ₂₁ };	{v ₂ ,v ₄ ,v ₆ ,v ₉ ,v ₁₀ ,v ₁₃ };
c ₁₃	{e ₈ ,e ₁₀ ,e ₁₃ ,e ₁₄ };	{v ₃ ,v ₄ ,v ₈ ,v ₁₃ };
c ₁₄	{e ₁ ,e ₂ ,e ₉ ,e ₁₀ ,e ₁₂ ,e ₁₄ };	{v ₁ ,v ₃ ,v ₄ ,v ₇ ,v ₉ ,v ₁₃ };
c ₁₅	{e ₁₀ ,e ₁₁ ,e ₂₀ ,e ₂₁ };	{v ₃ ,v ₆ ,v ₁₀ ,v ₁₃ };
c ₁₆	{e ₁₂ ,e ₁₆ ,e ₁₇ ,e ₁₈ };	{v ₄ ,v ₅ ,v ₉ ,v ₁₁ };
c ₁₇	{e ₁₂ ,e ₁₅ ,e ₁₈ ,e ₁₉ };	{v ₄ ,v ₅ ,v ₉ ,v ₁₂ };
c ₁₈	{e ₁₄ ,e ₁₅ ,e ₂₀ ,e ₂₂ };	{v ₄ ,v ₆ ,v ₁₂ ,v ₁₃ };
c ₁₉	{e ₁₅ ,e ₁₆ ,e ₁₇ ,e ₁₉ };	{v ₄ ,v ₅ ,v ₁₁ ,v ₁₂ };
c ₂₀	{e ₆ ,e ₇ ,e ₁₃ ,e ₁₅ ,e ₂₁ ,e ₂₂ };	{v ₂ ,v ₄ ,v ₆ ,v ₈ ,v ₁₀ ,v ₁₂ };

Циклы матроида $\zeta (C_7)$:

- 1-й цикл матроида {c₈,c₆,c₄,c₁,c₂};
- 2-й цикл матроида {c₁₀,c₆,c₇};
- 3-й цикл матроида {c₁₃,c₃,c₂};
- 4-й цикл матроида {c₁₄,c₃,c₄};
- 5-й цикл матроида {c₁₅,c₁₂,c₃,c₇,c₄,c₁};
- 6-й цикл матроида {c₁₆,c₅,c₄};
- 7-й цикл матроида {c₁₇,c₁₁,c₉};
- 8-й цикл матроида {c₁₈,c₁₂,c₁₁};
- 9-й цикл матроида {c₁₉,c₅,c₁₁,c₉,c₄};
- 10-й цикл матроида {c₂₀,c₆,c₁₁,c₄,c₁,c₂};
- 11-й цикл матроида {c₁₄,c₁,c₈,c₆,c₁₃};
- 12-й цикл матроида {c₁₅,c₈,c₇,c₆,c₁₂,c₁₃};
- 13-й цикл матроида {c₁₆,c₅,c₁,c₂,c₈,c₆};
- 14-й цикл матроида {c₁₈,c₁₇,c₁₂,c₉};
- 15-й цикл матроида {c₁₉,c₅,c₁,c₂,c₈,c₆,c₁₇};
- 16-й цикл матроида {c₂₀,c₈,c₁₇,c₉};
- 17-й цикл матроида {c₁₆,c₅,c₂,c₁₄,c₁₃};
- 18-й цикл матроида {c₁₈,c₁₇,c₁₄,c₁,c₇,c₉,c₁₅};
- 19-й цикл матроида {c₁₉,c₅,c₂,c₁₇,c₁₄,c₁₃};
- 20-й цикл матроида {c₂₀,c₆,c₁₇,c₁₄,c₁,c₉,c₁₃}.

Рассмотрим 18-ый цикл матроида изометрических циклов:

$$c_{18} \oplus c_{17} \oplus c_{14} \oplus c_1 \oplus c_7 \oplus c_9 \oplus c_{15} = \{e_{14},e_{15},e_{20},e_{22}\} \oplus \{e_{12},e_{15},e_{18},e_{19}\} \oplus \\ \oplus \{e_1,e_2,e_9,e_{10},e_{12},e_{14}\} \oplus \{e_1,e_2,e_4,e_5\} \oplus \{e_4,e_7,e_9,e_{11}\} \oplus \{e_5,e_7,e_{18},e_{19},e_{21},e_{22}\} \oplus \\ \oplus \{e_{10},e_{11},e_{20},e_{21}\} = \emptyset$$

Если удалить из множества изометрических циклов следующие циклы:

{c₆,c₉,c₁₄,c₁₂,c₁₆,c₁₃}, то получим элемент базы матроида изометрических циклов состоящий из 14 циклов. Следует заметить, что в данном примере, циклы матроида – это плоские конфигурации.

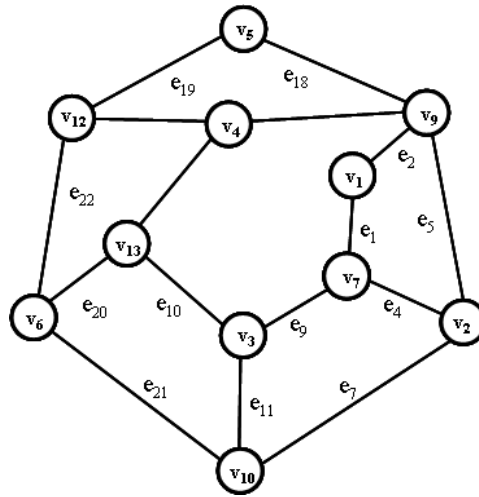


Рис. 2.21. Топологический рисунок 18-го цикла матроида.

	Множество изометрических циклов графа в виде ребер:	Множество изометрических циклов графа в виде вершин:
c ₁	{e ₁ , e ₂ , e ₄ , e ₅ };	{v ₁ , v ₂ , v ₇ , v ₉ };
c ₂	{e ₁ , e ₃ , e ₈ , e ₉ , e ₁₃ , e ₁₆ };	{v ₁ , v ₃ , v ₄ , v ₇ , v ₈ , v ₁₁ };
c ₃	{e ₁ , e ₃ , e ₉ , e ₁₀ , e ₁₄ , e ₁₆ };	{v ₁ , v ₃ , v ₄ , v ₇ , v ₁₁ , v ₁₃ };
c ₄	{e ₂ , e ₃ , e ₁₂ , e ₁₆ };	{v ₁ , v ₄ , v ₉ , v ₁₁ };
c ₅	{e ₂ , e ₃ , e ₁₇ , e ₁₈ };	{v ₁ , v ₅ , v ₉ , v ₁₁ };
c ₇	{e ₄ , e ₇ , e ₉ , e ₁₁ };	{v ₂ , v ₃ , v ₇ , v ₁₀ };
c ₈	{e ₅ , e ₆ , e ₁₂ , e ₁₃ };	{v ₂ , v ₄ , v ₈ , v ₉ };
c ₁₀	{e ₆ , e ₇ , e ₈ , e ₁₁ };	{v ₂ , v ₃ , v ₈ , v ₁₀ };
c ₁₁	{e ₅ , e ₇ , e ₁₂ , e ₁₅ , e ₂₁ , e ₂₂ };	{v ₂ , v ₄ , v ₆ , v ₉ , v ₁₀ , v ₁₂ };
c ₁₅	{e ₁₀ , e ₁₁ , e ₂₀ , e ₂₁ };	{v ₃ , v ₆ , v ₁₀ , v ₁₃ };
c ₁₇	{e ₁₂ , e ₁₅ , e ₁₈ , e ₁₉ };	{v ₄ , v ₅ , v ₉ , v ₁₂ };
c ₁₈	{e ₁₄ , e ₁₅ , e ₂₀ , e ₂₂ };	{v ₄ , v ₆ , v ₁₂ , v ₁₃ };
c ₁₉	{e ₁₅ , e ₁₆ , e ₁₇ , e ₁₉ };	{v ₄ , v ₅ , v ₁₁ , v ₁₂ };
c ₂₀	{e ₆ , e ₇ , e ₁₃ , e ₁₅ , e ₂₁ , e ₂₂ };	{v ₂ , v ₄ , v ₆ , v ₈ , v ₁₀ , v ₁₂ };

Сформируем однострочные структурные числа для множества изометрических циклов. Для выделенного дерева графа $T = \{e_1, e_4, e_5, e_8, e_{10}, e_{12}, e_{13}, e_{17}, e_{19}, e_{20}, e_{21}, e_{22}\}$ множество хорд $H = \{e_2, e_3, e_6, e_7, e_9, e_{11}, e_{14}, e_{15}, e_{16}, e_{18}\}$. И тогда однострочные структурные числа имеют вид:

- по хорде e₂ проходят циклы: [c₁, c₄, c₅, c₁₄];
- по хорде e₃ проходят циклы: [c₂, c₃, c₄, c₅];
- по хорде e₆ проходят циклы: [c₆, c₈, c₁₀, c₂₀];
- по хорде e₇ проходят циклы: [c₇, c₉, c₁₀, c₁₁, c₁₂, c₂₀];
- по хорде e₉ проходят циклы: [c₂, c₃, c₆, c₇, c₁₄];
- по хорде e₁₁ проходят циклы: [c₇, c₁₀, c₁₅];
- по хорде e₁₄ проходят циклы: [c₃, c₁₂, c₁₃, c₁₄, c₁₈];
- по хорде e₁₅ проходят циклы: [c₁₁, c₁₇, c₁₈, c₁₉, c₂₀];
- по хорде e₁₆ проходят циклы: [c₂, c₃, c₄, c₁₆, c₁₉];
- по хорде e₁₈ проходят циклы: [c₅, c₉, c₁₆, c₁₇].

Приближенно количество элементов структурного числа можно рассчитать по формуле:

$$k \leq k_u! / [(k_u - m + n - 1)! (m - n + 1)!] \quad (2.20)$$

здесь k_u – мощность усеченного множества изометрических циклов.

Построим однострочные структурные числа для усеченного множества изометрических циклов. Длина элемента структурного числа всегда равна количеству хорд графа, в данном случае – десяти.

Удаляя циклы $\{c_6, c_9, c_{12}, c_{13}, c_{14}, c_{16}\}$, получим усеченное множество циклов.

Усеченные однострочные структурные числа:

- циклы, проходящие по хорде e_{14} : $[c_3, c_{18}]$;
- циклы, проходящие по хорде e_{18} : $[c_5, c_{17}]$;
- циклы, проходящие по хорде e_2 : $[c_1, c_4, c_5]$;
- циклы, проходящие по хорде e_6 : $[c_8, c_{10}, c_{20}]$;
- циклы, проходящие по хорде e_9 : $[c_2, c_3, c_7]$;
- циклы, проходящие по хорде e_{11} : $[c_7, c_{10}, c_{15}]$;
- циклы, проходящие по хорде e_3 : $[c_2, c_3, c_4, c_5]$;
- циклы, проходящие по хорде e_7 : $[c_7, c_{10}, c_{11}, c_{20}]$;
- циклы, проходящие по хорде e_{16} : $[c_2, c_3, c_4, c_{19}]$;
- циклы, проходящие по хорде e_{15} : $[c_{11}, c_{17}, c_{18}, c_{19}, c_{20}]$;

Алгоритмом «бегущая строка» выделим все множество элементов усеченного структурного числа W и определим их количество. Количество элементов структурного числа для нашего примера равно 594.

Элементы усеченного структурного числа имеют вид:

- 1-й - элемент структурного числа = $\{c_3, c_5, c_1, c_8, c_2, c_7, c_4, c_{10}, c_{19}, c_{11}\}$;
- 2-й - элемент структурного числа = $\{c_3, c_5, c_1, c_8, c_2, c_7, c_4, c_{10}, c_{19}, c_{17}\}$;
- 3-й - элемент структурного числа = $\{c_3, c_5, c_1, c_8, c_2, c_7, c_4, c_{10}, c_{19}, c_{18}\}$;
- 4-й - элемент структурного числа = $\{c_3, c_5, c_1, c_8, c_2, c_7, c_4, c_{10}, c_{19}, c_{20}\}$;
- 5-й - элемент структурного числа = $\{c_3, c_5, c_1, c_8, c_2, c_7, c_4, c_{11}, c_{19}, c_{17}\}$;
- 6-й - элемент структурного числа = $\{c_3, c_5, c_1, c_8, c_2, c_7, c_4, c_{11}, c_{19}, c_{18}\}$;
-
- 172-й - элемент структурного числа = $\{c_3, c_5, c_1, c_{20}, c_7, c_{10}, c_2, c_{11}, c_4, c_{18}\}$;
- 173-й - элемент структурного числа = $\{c_3, c_5, c_1, c_{20}, c_7, c_{10}, c_2, c_{11}, c_4, c_{19}\}$;
- 174-й - элемент структурного числа = $\{c_3, c_5, c_1, c_{20}, c_7, c_{10}, c_2, c_{11}, c_{19}, c_{17}\}$;
- 175-й - элемент структурного числа = $\{c_3, c_5, c_1, c_{20}, c_7, c_{10}, c_2, c_{11}, c_{19}, c_{18}\}$;
-
- 559-й - элемент структурного числа = $\{c_{20}, c_3, c_{18}, c_{11}, c_1, c_{17}, c_{15}, c_2, c_{10}, c_4\}$;
- 560-й - элемент структурного числа = $\{c_{20}, c_3, c_{18}, c_{11}, c_1, c_{17}, c_{15}, c_5, c_{10}, c_4\}$;
- 561-й - элемент структурного числа = $\{c_{20}, c_3, c_{18}, c_{11}, c_1, c_{17}, c_2, c_5, c_{10}, c_4\}$;
- 562-й - элемент структурного числа = $\{c_{20}, c_3, c_{18}, c_{11}, c_1, c_{17}, c_2, c_5, c_{10}, c_{15}\}$;
-
- 589-й - элемент структурного числа = $\{c_{20}, c_3, c_{18}, c_{11}, c_{17}, c_{15}, c_{10}, c_5, c_1, c_4\}$;
- 590-й - элемент структурного числа = $\{c_{20}, c_3, c_{18}, c_{11}, c_{17}, c_{15}, c_1, c_2, c_{10}, c_4\}$;
- 591-й - элемент структурного числа = $\{c_{20}, c_3, c_{18}, c_{11}, c_{17}, c_{15}, c_1, c_5, c_{10}, c_4\}$;
- 592-й - элемент структурного числа = $\{c_{20}, c_3, c_{18}, c_{11}, c_{17}, c_{15}, c_2, c_5, c_{10}, c_1\}$;
- 593-й - элемент структурного числа = $\{c_{20}, c_3, c_{18}, c_{11}, c_{17}, c_{15}, c_2, c_5, c_{10}, c_4\}$;
- 594-й - элемент структурного числа = $\{c_{20}, c_3, c_{18}, c_{11}, c_{17}, c_{15}, c_2, c_5, c_1, c_4\}$.

Очевидно, что при создании практических систем приближенного решения для выделения базисов подпространства циклов можно воспользоваться методом Монте-Карло. То есть произвести случайным образом выборку большого числа элементов из базы матроидов и вы-

брать соответствующее решение, используя при этом в качестве целевой функции функционал Понтрягина-Куратовского и описывая процесс как дифференцирование структурного числа.

Выделенная таким образом системы циклов должна обладать следующими свойствами:

1. Должен выполняться закон Эйлера.
2. Линейная комбинация циклов обязательно должна образовывать обод, который характеризует не пустой связный простой цикл.
3. Выделенный суграф должен быть связным и не содержать точек сочленения.
4. Циклы плоской конфигурации должны индуцировать вращение вершин, которое описывает топологический рисунок плоской части графа.

Генерируя случайным образом плоские конфигурации методом наискорейшего спуска, для усеченного подмножества циклов $\{c_1, c_5, c_6, c_7, c_{13}, c_{15}, c_{16}, c_{17}, c_{18}\}$ получаем следующие плоские конфигурации:

Плоская конфигурация 1.

	Множество циклов графа в виде ребер:	Множество циклов графа в виде вершин:	Кортеж вершин изометрических циклов:
c_{16}	$\{e_{12}, e_{16}, e_{17}, e_{18}\}$	$\{v_9, v_5, v_{11}, v_4\}$	$\langle v_9, v_5, v_{11}, v_4 \rangle$
c_1	$\{e_1, e_2, e_4, e_5\}$	$\{v_7, v_2, v_9, v_1\}$	$\langle v_1, v_9, v_2, v_7 \rangle$
c_6	$\{e_4, e_6, e_8, e_9\}$	$\{v_7, v_3, v_8, v_2\}$	$\langle v_2, v_8, v_3, v_7 \rangle$
c_8	$\{e_5, e_6, e_{12}, e_{13}\}$	$\{v_9, v_4, v_8, v_2\}$	$\langle v_9, v_4, v_8, v_2 \rangle$
c_{18}	$\{e_{14}, e_{15}, e_{20}, e_{22}\}$	$\{v_{13}, v_6, v_{12}, v_4\}$	$\langle v_4, v_{12}, v_6, v_{13} \rangle$
c_{15}	$\{e_{10}, e_{11}, e_{20}, e_{21}\}$	$\{v_{13}, v_6, v_{10}, v_3\}$	$\langle v_{13}, v_6, v_{10}, v_3 \rangle$
c_5	$\{e_2, e_3, e_{17}, e_{18}\}$	$\{v_9, v_5, v_{11}, v_1\}$	$\langle v_1, v_{11}, v_5, v_9 \rangle$
c_{13}	$\{e_8, e_{10}, e_{13}, e_{14}\}$	$\{v_8, v_4, v_{13}, v_3\}$	$\langle v_8, v_4, v_{13}, v_3 \rangle$
обод	$\{e_{16}, e_1, e_9, e_{15}, e_{22}, e_{11}, e_{21}, e_3\}$	$\{v_{11}, v_1, v_7, v_3, v_{10}, v_6, v_{12}, v_4\}$	$\langle v_{11}, v_1, v_7, v_3, v_{10}, v_6, v_{12}, v_4 \rangle$

В процессе планаризации удалены ребра e_7 и e_{19} .

Вращение вершин плоского графа:

- вращение вершины v_1 : $v_{11} \ v_7 \ v_9 \ v_{11}$
- вращение вершины v_2 : $v_8 \ v_9 \ v_7 \ v_8$
- вращение вершины v_3 : $v_7 \ v_{10} \ v_{11}$
- вращение вершины v_4 : $v_{11} \ v_9 \ v_8 \ v_{13}$
- вращение вершины v_5 : $v_9 \ v_{11} \ v_9$
- вращение вершины v_6 : $v_{13} \ v_{10} \ v_{13}$
- вращение вершины v_7 : $v_1 \ v_3 \ v_2 \ v_1$
- вращение вершины v_8 : $v_4 \ v_2 \ v_3 \ v_4$
- вращение вершины v_9 : $v_4 \ v_5 \ v_1 \ v_2 \ v_4$
- вращение вершины v_{10} : $v_3 \ v_6 \ v_3$
- вращение вершины v_{11} : $v_5 \ v_4 \ v_1 \ v_5$
- вращение вершины v_{12} : $v_4 \ v_6 \ v_4$
- вращение вершины v_{13} : $v_4 \ v_3 \ v_6 \ v_4$

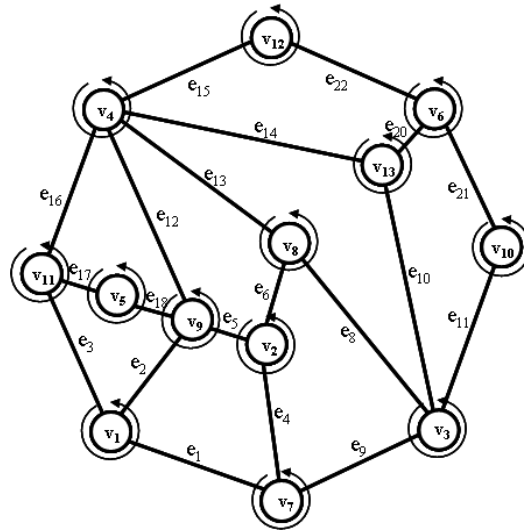


Рис. 2.22. Топологический рисунок плоской конфигурации 1.

Плоская конфигурация 2.

	Множество циклов графа в виде ребер:	Множество циклов графа в виде вершин:	Кортеж вершин изометрических циклов:
c ₁₅	{e ₁₀ , e ₁₁ , e ₂₀ , e ₂₁ }	{v ₁₃ , v ₆ , v ₁₀ , v ₃ }	<v ₁₃ , v ₆ , v ₁₀ , v ₃ >
c ₈	{e ₅ , e ₆ , e ₁₂ , e ₁₃ }	{v ₉ , v ₄ , v ₈ , v ₂ }	<v ₉ , v ₄ , v ₈ , v ₂ >
c ₁₆	{e ₁₂ , e ₁₆ , e ₁₇ , e ₁₈ }	{v ₉ , v ₅ , v ₁₁ , v ₄ }	<v ₉ , v ₅ , v ₁₁ , v ₄ >
c ₁₃	{e ₈ , e ₁₀ , e ₁₃ , e ₁₄ }	{v ₈ , v ₄ , v ₁₃ , v ₃ }	<v ₈ , v ₄ , v ₁₃ , v ₃ >
c ₅	{e ₂ , e ₃ , e ₁₇ , e ₁₈ }	{v ₉ , v ₅ , v ₁₁ , v ₁ }	<v ₁ , v ₁₁ , v ₅ , v ₉ >
c ₆	{e ₄ , e ₆ , e ₈ , e ₉ }	{v ₇ , v ₃ , v ₈ , v ₂ }	<v ₂ , v ₈ , v ₃ , v ₇ >
c ₁₈	{e ₁₄ , e ₁₅ , e ₂₀ , e ₂₂ }	{v ₁₃ , v ₆ , v ₁₂ , v ₄ }	<v ₄ , v ₁₂ , v ₆ , v ₁₃ >
c ₇	{e ₄ , e ₇ , e ₉ , e ₁₁ }	{v ₇ , v ₃ , v ₁₀ , v ₂ }	<v ₇ , v ₃ , v ₁₀ , v ₂ >
обод	{e ₂₁ , e ₅ , e ₁₆ , e ₂ , e ₃ , e ₁₅ , e ₂₂ , e ₇ }	{v ₁₀ , v ₂ , v ₉ , v ₁ , v ₁₁ , v ₄ , v ₁₂ , v ₆ }	<v ₆ , v ₁₂ , v ₄ , v ₁₁ , v ₁ , v ₉ , v ₂ , v ₁₀ >

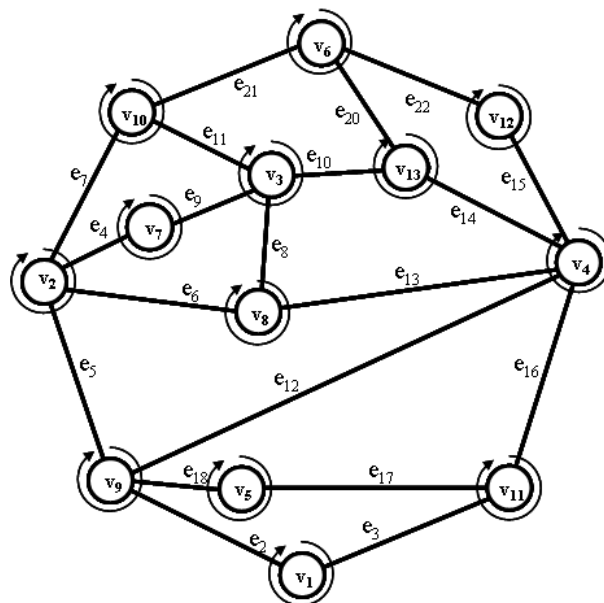


Рис. 2.23. Плоская конфигурация 2.

В процессе планаризации удалены ребра e₁ и e₁₉.

Вращение вершин плоского графа:

вращение вершины v_1 : $v_{11} v_9 v_{11}$
 вращение вершины v_2 : $v_{10} v_7 v_8 v_9 v_{10}$
 вращение вершины v_3 : $v_{10} v_{13} v_8 v_7 v_{10}$
 вращение вершины v_4 : $v_8 v_{13} v_{12} v_{11} v_9 v_8$
 вращение вершины v_5 : $v_9 v_{11} v_9$
 вращение вершины v_6 : $v_{13} v_{10} v_{12} v_{13}$
 вращение вершины v_7 : $v_2 v_3 v_2$
 вращение вершины v_8 : $v_3 v_4 v_2 v_3$
 вращение вершины v_9 : $v_1 v_2 v_4 v_5 v_1$
 вращение вершины v_{10} : $v_6 v_3 v_2 v_6$
 вращение вершины v_{11} : $v_4 v_1 v_5 v_4$
 вращение вершины v_{12} : $v_4 v_6 v_4$
 вращение вершины v_{13} : $v_3 v_6 v_4 v_3$

Конфигурация 3.

	Множество циклов графа в виде ребер:	Множество циклов графа в виде вершин:	Кортеж вершин изометрических циклов:
c_8	$\{e_5, e_6, e_{12}, e_{13}\}$	$\{v_9, v_4, v_8, v_2\}$	$\langle v_9, v_4, v_8, v_2 \rangle$
c_{13}	$\{e_8, e_{10}, e_{13}, e_{14}\}$	$\{v_8, v_4, v_{13}, v_3\}$	$\langle v_8, v_4, v_{13}, v_3 \rangle$
c_{17}	$\{e_{12}, e_{15}, e_{18}, e_{19}\}$	$\{v_9, v_5, v_{12}, v_4\}$	$\langle v_9, v_5, v_{12}, v_4 \rangle$
c_{18}	$\{e_{14}, e_{15}, e_{20}, e_{22}\}$	$\{v_{13}, v_6, v_{12}, v_4\}$	$\langle v_4, v_{12}, v_6, v_{13} \rangle$
c_6	$\{e_4, e_6, e_8, e_9\}$	$\{v_7, v_3, v_8, v_2\}$	$\langle v_2, v_8, v_3, v_7 \rangle$
c_{15}	$\{e_{10}, e_{11}, e_{20}, e_{21}\}$	$\{v_{13}, v_6, v_{10}, v_3\}$	$\langle v_{13}, v_6, v_{10}, v_3 \rangle$
c_5	$\{e_2, e_3, e_{17}, e_{18}\}$	$\{v_9, v_5, v_{11}, v_1\}$	$\langle v_1, v_{11}, v_5, v_9 \rangle$
c_1	$\{e_1, e_2, e_4, e_5\}$	$\{v_7, v_2, v_9, v_1\}$	$\langle v_1, v_9, v_2, v_7 \rangle$
обод	$\{e_{19}, e_{22}, e_9, e_{11}, e_{21}, e_3, e_{17}, e_1\}$	$\{v_{12}, v_6, v_{10}, v_3, v_7, v_1, v_{11}, v_5\}$	$\langle v_5, v_{11}, v_1, v_7, v_3, v_{10}, v_6, v_{12} \rangle$

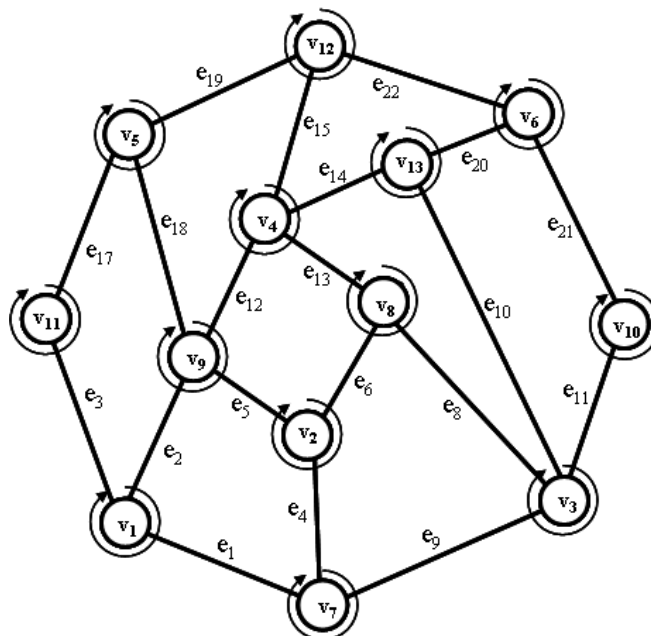


Рис. 2.24. Плоская конфигурация 3.

В процессе планаризации удалены ребра e_7 и e_{16} .

Вращение вершин плоского суграфа:

вращение вершины v_1 : $v_7 \ v_9 \ v_{11} \ v_7$
 вращение вершины v_2 : $v_8 \ v_7 \ v_9 \ v_8$
 вращение вершины v_3 : $v_8 \ v_{13} \ v_{10} \ v_7 \ v_8$
 вращение вершины v_4 : $v_9 \ v_{12} \ v_{13} \ v_8 \ v_9$
 вращение вершины v_5 : $v_9 \ v_{11} \ v_{12} \ v_9$
 вращение вершины v_6 : $v_{10} \ v_{13} \ v_{12} \ v_{10}$
 вращение вершины v_7 : $v_2 \ v_3 \ v_1 \ v_2$
 вращение вершины v_8 : $v_4 \ v_3 \ v_2 \ v_4$
 вращение вершины v_9 : $v_2 \ v_1 \ v_5 \ v_4 \ v_2$
 вращение вершины v_{10} : $v_3 \ v_6 \ v_3$
 вращение вершины v_{11} : $v_5 \ v_1 \ v_5$
 вращение вершины v_{12} : $v_5 \ v_6 \ v_4 \ v_5$
 вращение вершины v_{13} : $v_4 \ v_6 \ v_3 \ v_4$

Кортеж циклов в вершинной записи позволяет записывать циклы в векторной форме:

$$\begin{aligned}
 \langle v_9, v_4, v_8, v_2 \rangle &= (v_9, v_4) + (v_4, v_8) + (v_8, v_2) + (v_2, v_9); \\
 \langle v_8, v_4, v_{13}, v_3 \rangle &= (v_8, v_4) + (v_4, v_{13}) + (v_{13}, v_3) + (v_3, v_8); \\
 \langle v_9, v_5, v_{12}, v_4 \rangle &= (v_9, v_5) + (v_5, v_{12}) + (v_{12}, v_4) + (v_4, v_9); \\
 \langle v_4, v_{12}, v_6, v_{13} \rangle &= (v_4, v_{12}) + (v_{12}, v_6) + (v_6, v_{13}) + (v_{13}, v_4); \\
 \langle v_2, v_8, v_3, v_7 \rangle &= (v_2, v_8) + (v_8, v_3) + (v_3, v_7) + (v_7, v_2); \\
 \langle v_{13}, v_6, v_{10}, v_3 \rangle &= (v_{13}, v_6) + (v_6, v_{10}) + (v_{10}, v_3) + (v_3, v_{13}); \\
 \langle v_1, v_{11}, v_5, v_9 \rangle &= (v_1, v_{11}) + (v_{11}, v_5) + (v_5, v_9) + (v_9, v_1); \\
 \langle v_1, v_9, v_2, v_7 \rangle &= (v_1, v_9) + (v_9, v_2) + (v_2, v_7) + (v_7, v_1); \\
 \langle v_5, v_{11}, v_1, v_7, v_3, v_{10}, v_6, v_{12} \rangle &= (v_5, v_{11}) + (v_{11}, v_1) + (v_1, v_7) + (v_7, v_3) + (v_3, v_{10}) + (v_{10}, v_6) + \\
 &+ (v_6, v_{12}) + (v_{12}, v_5).
 \end{aligned}$$

Сумма всех векторных записей для плоской конфигурации есть пустое множество, так как $(v_i, v_j) + (v_j, v_i) = \emptyset$.

Следует заметить, что подмножество циклов, характеризующееся нулевым значением функционала Понтрягина-Куратовского, не всегда может представлять топологический рисунок несепарабельной плоской части графа. Для корректного построения топологического рисунка двухсвязного несепарабельного суграфа, необходимо чтобы обод представлял собой простой цикл. Например, конфигурация на рис. 2.25 описывает суграф с точкой сочленения, где обод представляется квазициклом.

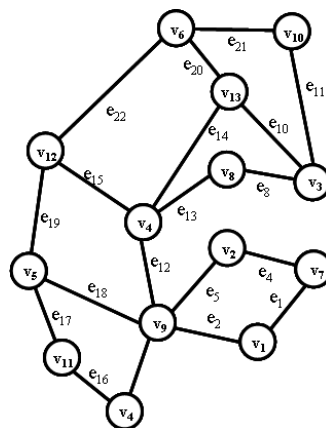


Рис. 2.25. Суграф с точкой сочленения.

c_{13}	$\{e_8, e_{10}, e_{13}, e_{14}\}$	$\{v_8, v_4, v_{13}, v_3\}$
c_{17}	$\{e_{12}, e_{15}, e_{18}, e_{19}\}$	$\{v_9, v_5, v_{12}, v_4\}$
c_{18}	$\{e_{14}, e_{15}, e_{20}, e_{22}\}$	$\{v_{13}, v_6, v_{12}, v_4\}$
c_{15}	$\{e_{10}, e_{11}, e_{20}, e_{21}\}$	$\{v_{13}, v_6, v_{10}, v_3\}$
c_{16}	$\{e_{12}, e_{16}, e_{17}, e_{18}\}$	$\{v_9, v_5, v_{11}, v_4\}$
c_1	$\{e_1, e_2, e_4, e_5\}$	$\{v_7, v_2, v_9, v_1\}$

Следует также обратить внимание, что во множестве зависимой системе циклов по некоторым ребрам может проходить более двух циклов. В этом случае, построение плоского рисунка основанного на множестве зависимой системы циклов может быть лишено смысла, так как нарушается условие теоремы Маклейна.

Например, зависимая система циклов:

$$c_3 \oplus c_5 \oplus c_{25} \oplus c_{16} \oplus c_{17} \oplus c_{18} \oplus c_{32} \oplus c_{19} \oplus c_{33} \oplus c_{24} \oplus c_{22} \oplus c_{23} \oplus c_{30} \oplus c_7 \oplus c_8 \oplus c_4 \oplus c_{11} = \emptyset.$$

не может считаться плоской конфигурацией, так как вектор циклов по ребрам имеет некоторое количество ребер, по которым проходит четыре цикла, что противоречит теореме Маклейна.

Вектор циклов по ребрам P_e представим в табличном виде, с указанием количества циклов проходящих по ребрам.

e_1	e_2	e_3	e_4	e_5	e_6	e_7	e_8	e_9	e_{10}	e_{11}	e_{12}	e_{13}	e_{14}	e_{15}	e_{16}	e_{17}	e_{18}	e_{19}	e_{20}
2	2	2	4	2	2	2	2	2	2	2	2	0	2	0	2	2	2	2	2

e_{21}	e_{22}	e_{23}	e_{24}	e_{25}	e_{26}	e_{27}	e_{28}	e_{29}	e_{30}	e_{31}	e_{32}	e_{33}	e_{34}	e_{35}	e_{36}	e_{37}	e_{38}	e_{39}	e_{40}
2	2	2	2	2	0	2	2	2	2	2	2	2	2	2	4	0	2	2	2

e_{41}	e_{42}	e_{43}	e_{44}	e_{45}	e_{46}	e_{47}	e_{48}	e_{49}	e_{50}	e_{51}	e_{52}	e_{53}	e_{54}
2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2

Выводы

Рассматривая методы построения топологического рисунка плоской части непланарного графа, можно сказать, что процесс решения состоит из двух этапов.

На первом этапе из множества изометрических циклов графа выделяется подмножество циклов с мощностью равное цикломатическому числу графа. Данное подмножество должно быть базисом подпространства циклов и удовлетворять некоторым критериям. Если для графа G , существует базис подпространства циклов со значением функционала Маклейна равного нулю, то несепарабельный граф планарен. Иначе несепарабельный граф непланарен. Рассматриваемые в данной главе методы для первого этапа можно характеризовать следующим образом:

- метод наискорейшего спуска характерен неоднозначностью построения подмножества циклов с минимальным значением функционала Маклейна и не гарантирует их линейную независимость;

- фрагментарный метод выделения подмножества циклов устраняет неоднозначность выбора циклов и формирует множество решений, но увеличивает вероятность появления зависимых подмножеств циклов при увеличении мощности множества изометрических циклов.

Второй этап удаления минимального количества циклов для непланарных графов, предназначен для построения плоской части графа путем выделения из базиса циклов подмножества, имеющего нулевое значение функционала Маклейна. Причем удаление циклов из базиса циклов (элементов), должно производиться с выполнением условия Эйлера. С целью выделения такого подмножества, обосновывается введение функционала Понтрягина-Куратовского.

- метод выделения усеченного структурного числа, ограничен возможностью определения линейной независимости для выделенного подмножества циклов, алгоритмом бегущей строки и характерен экспоненциальной вычислительной сложностью.

Глава 3. МЕТОД СЖИМАЮЩИХСЯ ОКРЕСТНОСТЕЙ

3.1. Структурное число графа и метод сжимающихся окрестностей

Точное решение задачи выделение плоской части непланарного графа с минимальным количеством удаленных ребер является трудно-решаемой задачей [8]. Очевидно, что в этом случае следует искать приближенное полиномиальное решение, близкое к оптимальному. Кроме того, решение задачи должно быть представлено в виде топологического рисунка плоской части графа, так как планарность предполагает визуальное представление. Понятно также, что в свою очередь построение топологического рисунка графа требует описания топологического рисунка как самостоятельной математической структуры [20-31,46].

Будем рассматривать граф $G(V,E;P)$. $V = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ – множество вершин, $\text{card } V = n$. $E = \{e_1, e_2, \dots, e_m\}$ – множество ребер, $\text{card } E = m$. P – трехместный предикат ставящий в соответствие ребру $e_i \in E$, $i = \{1, 2, \dots, m\}$ две вершины $(v_1, v_2) \in V$. L_G – множество всех суграфов этого графа состоящее из ребер. Для кратности будем обозначать граф как $G(V,E)$ считая, что трехместный предикат задан матрицей инциденций $B(G)$.

Выделим в несепарабельном графе множество изометрических циклов C_τ . Определим для множества изометрических чисел значение функционала Маклейна.

Методом поиска в глубину, выделим дерево в графе G . Относительно хорд составим структурное число характеризующее базис матроида изометрических циклов.

Поставим в соответствие каждому изометрическому циклу $c_i \in C_\tau$ числовую характеристику равную значению функционала Маклейна для подмножества изометрических циклов с удаленным циклом c_i $F\left(\frac{\delta W}{\delta c_i}\right)$ и будем называть его *весом изометрического цикла* c_i .

Составим кортеж циклов K_τ , расположим его элементы в порядке не возрастания весов циклов.

Применим модифицированный метод Гаусса для выявления множества зависимых подмножеств изометрических циклов Θ или множества плоских конфигураций.

Среди множества изометрических циклов системы Θ выделим минимальное количество циклов, которые присутствуют во всех зависимых подмножествах, и будем называть такие циклы *накрывающими*. Помечаем накрывающие циклы.

Удаляем помеченные циклы из множества изометрических циклов и вновь ставим в соответствие каждому оставшемуся циклу вес. Для новой системы изометрических циклов C'_τ строим кортеж весов K'_τ и вновь для построения зависимой системы циклов Θ' применяем модифицированный алгоритма Гаусса. Выделяем накрывающее подмножество изометрических циклов и удаляем их из рассмотрения. Процесс продолжаем до получения количества

изометрических циклов равно цикломатическому числу графа плюс единица $\nu(G)+1=(m-n+1)+1$.

Последовательно выбираем циклы из последней системы зависимых циклов, и получаем подмножество базисов состоящее из изометрических циклов.

Из каждого базиса удаляем циклы с соблюдением условия Эйлера до появления нулевого значения функционала Понтрягина-Куратовского. Полученная в результате преобразований система изометрических циклов индуцирует вращение вершин графа и описывает плоскую часть рисунка графа. В результате возможно построение некоторого множества рисунков графа для каждого базиса, состоящего из изометрических циклов.

Сказанное рассмотрим на примере следующего графа представленного на рис. 3.1.

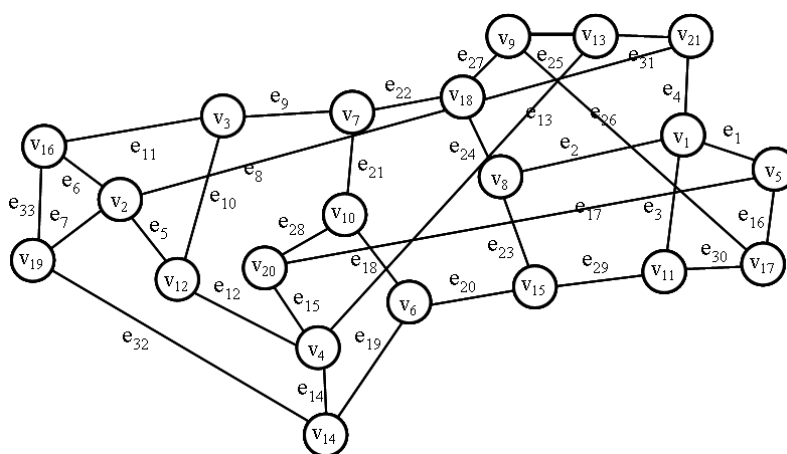


Рис. 3.1. Граф G_5 .

Количество вершин графа = 21, количество ребер графа = 33, количество изометрических циклов = 18.

Смежность вершин графа:

v_1 : $v_5 v_8 v_{11} v_{21}$	v_2 : $v_{12} v_{16} v_{19} v_{21}$	v_3 : $v_7 v_{12} v_{16}$
v_4 : $v_{12} v_{13} v_{14} v_{20}$	v_5 : $v_1 v_{17} v_{20}$	v_6 : $v_{10} v_{14} v_{15}$
v_7 : $v_3 v_{10} v_{18}$	v_8 : $v_1 v_{15} v_{18}$	v_9 : $v_{13} v_{17} v_{18}$
v_{10} : $v_6 v_7 v_{20}$	v_{11} : $v_1 v_{15} v_{17}$	v_{12} : $v_2 v_3 v_4$
v_{13} : $v_4 v_9 v_{21}$	v_{14} : $v_4 v_6 v_{19}$	v_{15} : $v_6 v_8 v_{11}$
v_{16} : $v_2 v_3 v_{19}$	v_{17} : $v_5 v_9 v_{11}$	v_{18} : $v_7 v_8 v_9$
v_{19} : $v_2 v_{14} v_{16}$	v_{20} : $v_4 v_5 v_{10}$	v_{21} : $v_1 v_2 v_{13}$

Инцидентность ребер и вершин графа:

$e_1 \rightarrow (v_1, v_5) \vee (v_5, v_1);$	$e_2 \rightarrow (v_1, v_8) \vee (v_8, v_1);$	$e_3 \rightarrow (v_1, v_{11}) \vee (v_{11}, v_1);$
$e_4 \rightarrow (v_1, v_{21}) \vee (v_{21}, v_1);$	$e_5 \rightarrow (v_2, v_{12}) \vee (v_{12}, v_2);$	$e_6 \rightarrow (v_2, v_{16}) \vee (v_{16}, v_2);$
$e_7 \rightarrow (v_2, v_{19}) \vee (v_{19}, v_2);$	$e_8 \rightarrow (v_2, v_{21}) \vee (v_{21}, v_2);$	$e_9 \rightarrow (v_3, v_7) \vee (v_7, v_3);$
$e_{10} \rightarrow (v_3, v_{12}) \vee (v_{12}, v_3);$	$e_{11} \rightarrow (v_3, v_{16}) \vee (v_{16}, v_3);$	$e_{12} \rightarrow (v_4, v_{12}) \vee (v_{12}, v_4);$
$e_{13} \rightarrow (v_4, v_{13}) \vee (v_{13}, v_4);$	$e_{14} \rightarrow (v_4, v_{14}) \vee (v_{14}, v_4);$	$e_{15} \rightarrow (v_4, v_{20}) \vee (v_{20}, v_4);$
$e_{16} \rightarrow (v_5, v_{17}) \vee (v_{17}, v_5);$	$e_{17} \rightarrow (v_5, v_{20}) \vee (v_{20}, v_5);$	$e_{18} \rightarrow (v_6, v_{10}) \vee (v_{10}, v_6);$
$e_{19} \rightarrow (v_6, v_{14}) \vee (v_{14}, v_6);$	$e_{20} \rightarrow (v_6, v_{15}) \vee (v_{15}, v_6);$	$e_{21} \rightarrow (v_7, v_{10}) \vee (v_{10}, v_7);$
$e_{22} \rightarrow (v_7, v_{18}) \vee (v_{18}, v_7);$	$e_{23} \rightarrow (v_8, v_{15}) \vee (v_{15}, v_8);$	$e_{24} \rightarrow (v_8, v_{18}) \vee (v_{18}, v_8);$
$e_{25} \rightarrow (v_9, v_{13}) \vee (v_{13}, v_9);$	$e_{26} \rightarrow (v_9, v_{17}) \vee (v_{17}, v_9);$	$e_{27} \rightarrow (v_9, v_{18}) \vee (v_{18}, v_9);$
$e_{28} \rightarrow (v_{10}, v_{20}) \vee (v_{20}, v_{10});$	$e_{29} \rightarrow (v_{11}, v_{15}) \vee (v_{15}, v_{11});$	$e_{30} \rightarrow (v_{11}, v_{17}) \vee (v_{17}, v_{11});$
$e_{31} \rightarrow (v_{13}, v_{21}) \vee (v_{21}, v_{13});$	$e_{32} \rightarrow (v_{14}, v_{19}) \vee (v_{19}, v_{14});$	$e_{33} \rightarrow (v_{16}, v_{19}) \vee (v_{19}, v_{16}).$

Множество изометрических циклов графа

Множество изометрических циклов графа:	
$c_1 = \{e_1, e_3, e_{16}, e_{30}\} \rightarrow \{v_1, v_5, v_{11}, v_{17}\};$	
$c_2 = \{e_1, e_4, e_{13}, e_{15}, e_{17}, e_{31}\} \rightarrow \{v_1, v_5, v_{21}, v_4, v_{13}, v_{20}\};$	
$c_3 = \{e_1, e_2, e_{16}, e_{24}, e_{26}, e_{27}\} \rightarrow \{v_1, v_5, v_8, v_{17}, v_{18}, v_9\};$	
$c_4 = \{e_2, e_3, e_{23}, e_{29}\} \rightarrow \{v_1, v_8, v_{11}, v_{15}\};$	
$c_5 = \{e_2, e_4, e_{24}, e_{25}, e_{27}, e_{31}\} \rightarrow \{v_1, v_8, v_{21}, v_{18}, v_9, v_{13}\};$	
$c_6 = \{e_1, e_4, e_{16}, e_{25}, e_{26}, e_{31}\} \rightarrow \{v_1, v_5, v_{21}, v_{17}, v_9, v_{13}\};$	
$c_7 = \{e_3, e_4, e_{25}, e_{26}, e_{30}, e_{31}\} \rightarrow \{v_1, v_{11}, v_{21}, v_9, v_{13}, v_{17}\};$	
$c_8 = \{e_5, e_6, e_{10}, e_{11}\} \rightarrow \{v_2, v_{12}, v_{16}, v_3\};$	
$c_9 = \{e_5, e_7, e_{12}, e_{14}, e_{32}\} \rightarrow \{v_2, v_{12}, v_{19}, v_4, v_{14}\};$	
$c_{10} = \{e_5, e_8, e_{12}, e_{13}, e_{31}\} \rightarrow \{v_2, v_{12}, v_{21}, v_4, v_{13}\};$	
$c_{11} = \{e_6, e_7, e_{33}\} \rightarrow \{v_2, v_{16}, v_{19}\};$	
$c_{12} = \{e_9, e_{10}, e_{12}, e_{15}, e_{21}, e_{28}\} \rightarrow \{v_3, v_7, v_{12}, v_4, v_{20}, v_{10}\};$	
$c_{13} = \{e_{13}, e_{15}, e_{16}, e_{17}, e_{25}, e_{26}\} \rightarrow \{v_4, v_{13}, v_{20}, v_5, v_{17}, v_9\};$	
$c_{14} = \{e_{14}, e_{15}, e_{18}, e_{19}, e_{28}\} \rightarrow \{v_4, v_{14}, v_{20}, v_6, v_{10}\};$	
$c_{15} = \{e_{18}, e_{20}, e_{21}, e_{22}, e_{23}, e_{24}\} \rightarrow \{v_6, v_{10}, v_{15}, v_7, v_{18}, v_8\};$	
$c_{16} = \{e_9, e_{10}, e_{12}, e_{13}, e_{22}, e_{25}, e_{27}\} \rightarrow \{v_3, v_7, v_{12}, v_4, v_{13}, v_{18}, v_9\};$	
$c_{17} = \{e_2, e_3, e_{24}, e_{26}, e_{27}, e_{30}\} \rightarrow \{v_1, v_8, v_{11}, v_{18}, v_9, v_{17}\};$	
$c_{18} = \{e_{23}, e_{24}, e_{26}, e_{27}, e_{29}, e_{30}\} \rightarrow \{v_8, v_{15}, v_{18}, v_9, v_{17}, v_{11}\}.$	

Выделим дерево в графе (см. рис. 3.2, ветви дерева окрашены красным цветом).

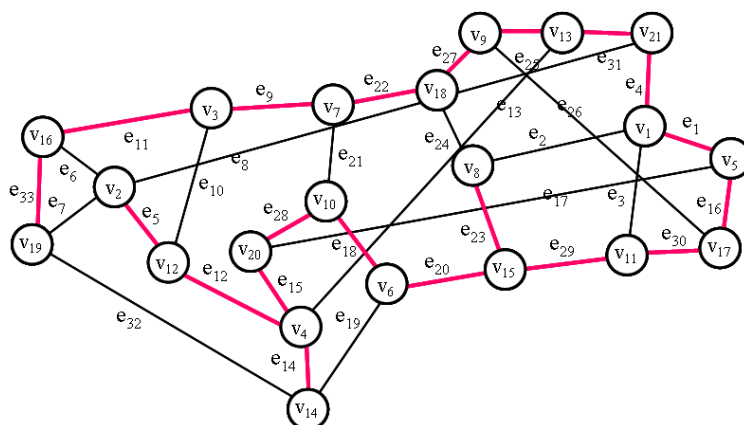


Рис. 3.2. Дерево графа.

Представим матроид изометрических чисел в записи произведений однострочных структурных чисел относительно хорд графа.

ребра	ЦИКЛЫ
$e_2:$	$c_3 \ c_4 \ c_5 \ c_{17}$
$e_3:$	$c_1 \ c_4 \ c_7 \ c_{17}$
$e_6:$	$c_8 \ c_{11}$
$e_7:$	$c_9 \ c_{11}$
$e_8:$	c_{10}
$e_{10}:$	$c_8 \ c_{12} \ c_{16}$
$e_{13}:$	$c_2 \ c_{10} \ c_{13} \ c_{16}$
$e_{17}:$	$c_2 \ c_{13}$
$e_{19}:$	c_{14}
$e_{21}:$	$c_{12} \ c_{15}$
$e_{24}:$	$c_3 \ c_5 \ c_{15} \ c_{17} \ c_{18}$
$e_{26}:$	$c_3 \ c_6 \ c_7 \ c_{13} \ c_{17} \ c_{18}$
$e_{32}:$	c_9

Функционал Понтрягина-Куратовского для множества изометрических циклов равен = 594. Строим кортеж циклов K_τ располагая циклы согласно их весам.

Множество изометрических циклов графа:	Значение функционала
$c_{11} = \{e_6, e_7, e_{33}\} \rightarrow \{v_2, v_{16}, v_{19}\};$	594
$c_8 = \{e_5, e_6, e_{10}, e_{11}\} \rightarrow \{v_2, v_{12}, v_{16}, v_3\};$	582
$c_{14} = \{e_{14}, e_{15}, e_{18}, e_{19}, e_{28}\} \rightarrow \{v_4, v_{14}, v_{20}, v_6, v_{10}\};$	576
$c_9 = \{e_5, e_7, e_{12}, e_{14}, e_{32}\} \rightarrow \{v_2, v_{12}, v_{19}, v_4, v_{14}\};$	570
$c_4 = \{e_2, e_3, e_{23}, e_{29}\} \rightarrow \{v_1, v_8, v_{11}, v_{15}\};$	552
$c_{12} = \{e_9, e_{10}, e_{12}, e_{15}, e_{21}, e_{28}\} \rightarrow \{v_3, v_7, v_{12}, v_4, v_{20}, v_{10}\};$	552
$c_{15} = \{e_{18}, e_{20}, e_{21}, e_{22}, e_{23}, e_{24}\} \rightarrow \{v_6, v_{10}, v_{15}, v_7, v_{18}, v_8\};$	552
$c_1 = \{e_1, e_3, e_{16}, e_{30}\} \rightarrow \{v_1, v_5, v_{11}, v_{17}\};$	522
$c_{10} = \{e_5, e_8, e_{12}, e_{13}, e_{31}\} \rightarrow \{v_2, v_{12}, v_{21}, v_4, v_{13}\};$	516
$c_2 = \{e_1, e_4, e_{13}, e_{15}, e_{17}, e_{31}\} \rightarrow \{v_1, v_5, v_{21}, v_4, v_{13}, v_{20}\};$	486
$c_{16} = \{e_9, e_{10}, e_{12}, e_{13}, e_{22}, e_{25}, e_{27}\} \rightarrow \{v_3, v_7, v_{12}, v_4, v_{13}, v_{18}, v_9\};$	480
$c_{18} = \{e_{23}, e_{24}, e_{26}, e_{27}, e_{29}, e_{30}\} \rightarrow \{v_8, v_{15}, v_{18}, v_9, v_{17}, v_{11}\};$	438
$c_{13} = \{e_{13}, e_{15}, e_{16}, e_{17}, e_{25}, e_{26}\} \rightarrow \{v_4, v_{13}, v_{20}, v_5, v_{17}, v_9\};$	444
$c_5 = \{e_2, e_4, e_{24}, e_{25}, e_{27}, e_{31}\} \rightarrow \{v_1, v_8, v_{21}, v_{18}, v_9, v_{13}\};$	414
$c_6 = \{e_1, e_4, e_{16}, e_{25}, e_{26}, e_{31}\} \rightarrow \{v_1, v_5, v_{21}, v_{17}, v_9, v_{13}\};$	408
$c_7 = \{e_3, e_4, e_{25}, e_{26}, e_{30}, e_{31}\} \rightarrow \{v_1, v_{11}, v_{21}, v_9, v_{13}, v_{17}\};$	408
$c_{17} = \{e_2, e_3, e_{24}, e_{26}, e_{27}, e_{30}\} \rightarrow \{v_1, v_8, v_{11}, v_{18}, v_9, v_{17}\};$	408
$c_3 = \{e_1, e_2, e_{16}, e_{24}, e_{26}, e_{27}\} \rightarrow \{v_1, v_5, v_8, v_{17}, v_{18}, v_9\}.$	400

Для выделения зависимых подмножеств изометрических циклов применяем метод Гаусса для определения ранга системы. Выделяем следующую систему зависимых циклов Θ :

$$\left\{ \begin{array}{l} c_1 \oplus c_2 \oplus c_4 \oplus c_5 \oplus c_{13} \oplus c_{18} = \emptyset; \\ c_2 \oplus c_6 \oplus c_{13} = \emptyset; \\ c_1 \oplus c_2 \oplus c_7 \oplus c_{13} = \emptyset; \\ c_4 \oplus c_{17} \oplus c_{18} = \emptyset; \\ c_1 \oplus c_3 \oplus c_4 \oplus c_{18} = \emptyset. \end{array} \right.$$

Выделим подмножество накрывающих циклов: c_{13} и c_{18} . Удалим данные циклы из множества изометрических циклов.

Множество изометрических циклов графа:
$c_{11} = \{e_6, e_7, e_{33}\} \rightarrow \{v_2, v_{16}, v_{19}\};$
$c_8 = \{e_5, e_6, e_{10}, e_{11}\} \rightarrow \{v_2, v_{12}, v_{16}, v_3\};$
$c_{14} = \{e_{14}, e_{15}, e_{18}, e_{19}, e_{28}\} \rightarrow \{v_4, v_{14}, v_{20}, v_6, v_{10}\};$
$c_9 = \{e_5, e_7, e_{12}, e_{14}, e_{32}\} \rightarrow \{v_2, v_{12}, v_{19}, v_4, v_{14}\};$
$c_4 = \{e_2, e_3, e_{23}, e_{29}\} \rightarrow \{v_1, v_8, v_{11}, v_{15}\};$
$c_{12} = \{e_9, e_{10}, e_{12}, e_{15}, e_{21}, e_{28}\} \rightarrow \{v_3, v_7, v_{12}, v_4, v_{20}, v_{10}\};$
$c_{15} = \{e_{18}, e_{20}, e_{21}, e_{22}, e_{23}, e_{24}\} \rightarrow \{v_6, v_{10}, v_{15}, v_7, v_{18}, v_8\};$
$c_1 = \{e_1, e_3, e_{16}, e_{30}\} \rightarrow \{v_1, v_5, v_{11}, v_{17}\};$
$c_{10} = \{e_5, e_8, e_{12}, e_{13}, e_{31}\} \rightarrow \{v_2, v_{12}, v_{21}, v_4, v_{13}\};$
$c_2 = \{e_1, e_4, e_{13}, e_{15}, e_{17}, e_{31}\} \rightarrow \{v_1, v_5, v_{21}, v_4, v_{13}, v_{20}\};$
$c_{16} = \{e_9, e_{10}, e_{12}, e_{13}, e_{22}, e_{25}, e_{27}\} \rightarrow \{v_3, v_7, v_{12}, v_4, v_{13}, v_{18}, v_9\};$
$c_5 = \{e_2, e_4, e_{24}, e_{25}, e_{27}, e_{31}\} \rightarrow \{v_1, v_8, v_{21}, v_{18}, v_9, v_{13}\};$
$c_6 = \{e_1, e_4, e_{16}, e_{25}, e_{26}, e_{31}\} \rightarrow \{v_1, v_5, v_{21}, v_{17}, v_9, v_{13}\};$
$c_7 = \{e_3, e_4, e_{25}, e_{26}, e_{30}, e_{31}\} \rightarrow \{v_1, v_{11}, v_{21}, v_9, v_{13}, v_{17}\};$
$c_{17} = \{e_2, e_3, e_{24}, e_{26}, e_{27}, e_{30}\} \rightarrow \{v_1, v_8, v_{11}, v_{18}, v_9, v_{17}\};$
$c_3 = \{e_1, e_2, e_{16}, e_{24}, e_{26}, e_{27}\} \rightarrow \{v_1, v_5, v_8, v_{17}, v_{18}, v_9\}.$

Для выделения зависимых подмножеств изометрических циклов применяем модифицированный метод Гаусса для определения ранга системы. Выделяем следующую систему зависимых циклов Θ' :

$$\begin{cases} c_1 \oplus c_6 \oplus c_7 = \emptyset; \\ c_1 \oplus c_5 \oplus c_6 \oplus c_{17} = \emptyset; \\ c_1 \oplus c_3 \oplus c_{17} = \emptyset. \end{cases}$$

Образует подмножество накрывающих циклов: c_6 и c_{17} , цикл c_1 исключим из рассмотрения как цикл меньшей длины. Удаляем данные циклы из множества изометрических циклов.

Множество изометрических циклов графа:	
$c_{11} = \{e_6, e_7, e_{33}\}$	$\rightarrow \{v_2, v_{16}, v_{19}\}$;
$c_8 = \{e_5, e_6, e_{10}, e_{11}\}$	$\rightarrow \{v_2, v_{12}, v_{16}, v_3\}$;
$c_{14} = \{e_{14}, e_{15}, e_{18}, e_{19}, e_{28}\}$	$\rightarrow \{v_4, v_{14}, v_{20}, v_6, v_{10}\}$;
$c_9 = \{e_5, e_7, e_{12}, e_{14}, e_{32}\}$	$\rightarrow \{v_2, v_{12}, v_{19}, v_4, v_{14}\}$;
$c_4 = \{e_2, e_3, e_{23}, e_{29}\}$	$\rightarrow \{v_1, v_8, v_{11}, v_{15}\}$;
$c_{12} = \{e_9, e_{10}, e_{12}, e_{15}, e_{21}, e_{28}\}$	$\rightarrow \{v_3, v_7, v_{12}, v_4, v_{20}, v_{10}\}$;
$c_{15} = \{e_{18}, e_{20}, e_{21}, e_{22}, e_{23}, e_{24}\}$	$\rightarrow \{v_6, v_{10}, v_{15}, v_7, v_{18}, v_8\}$;
$c_1 = \{e_1, e_3, e_{16}, e_{30}\}$	$\rightarrow \{v_1, v_5, v_{11}, v_{17}\}$;
$c_{10} = \{e_5, e_8, e_{12}, e_{13}, e_{31}\}$	$\rightarrow \{v_2, v_{12}, v_{21}, v_4, v_{13}\}$;
$c_2 = \{e_1, e_4, e_{13}, e_{15}, e_{17}, e_{31}\}$	$\rightarrow \{v_1, v_5, v_{21}, v_4, v_{13}, v_{20}\}$;
$c_{16} = \{e_9, e_{10}, e_{12}, e_{13}, e_{22}, e_{25}, e_{27}\}$	$\rightarrow \{v_3, v_7, v_{12}, v_4, v_{13}, v_{18}, v_9\}$;
$c_5 = \{e_2, e_4, e_{24}, e_{25}, e_{27}, e_{31}\}$	$\rightarrow \{v_1, v_8, v_{21}, v_{18}, v_9, v_{13}\}$;
$c_7 = \{e_3, e_4, e_{25}, e_{26}, e_{30}, e_{31}\}$	$\rightarrow \{v_1, v_{11}, v_{21}, v_9, v_{13}, v_{17}\}$;
$c_3 = \{e_1, e_2, e_{16}, e_{24}, e_{26}, e_{27}\}$	$\rightarrow \{v_1, v_5, v_8, v_{17}, v_{18}, v_9\}$.

Для выделения зависимых подмножеств изометрических циклов применяем модифицированный метод Гаусса для определения ранга системы. Выделяем следующее подмножество зависимых циклов:

$$c_1 \oplus c_3 \oplus c_5 \oplus c_7 = \emptyset.$$

Если из системы удалить циклы c_1 или c_3 или c_5 или c_7 , то количество независимых циклов будет равно цикломатическому числу графа. То есть выделен базис системы циклов.

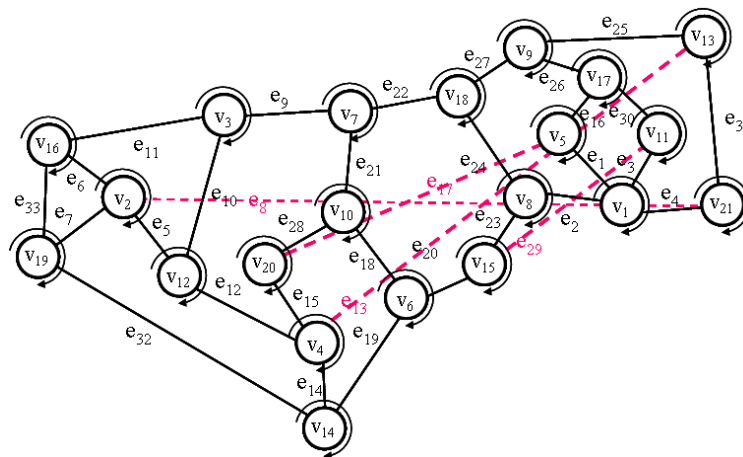


Рис. 3.3. Плоская часть графа (красным цветом обозначены удаленные ребра).

Удалим из множества изометрических циклов цикл c_5 . Будем последовательно удалять из данного базиса циклы, не нарушая правило Эйлера – удаление одного цикла приводит к удалению одного и только одного ребра. В результате последовательного удаления циклов c_{10}, c_2, c_{16}, c_7 получим подмножество изометрических циклов для которого значение функционала Понтрягина-Куратовского равно нулю. Рисунок плоской части непланарного графа представлен на рис. 3.3.

Если в качестве базиса выбрать подмножество циклов с удаленным циклом c_7 , то после удаления циклов до нулевого значения функционала, будут также удалены ребра $e_8, e_{13}, e_{17}, e_{29}$ (см. рис. 3.4).

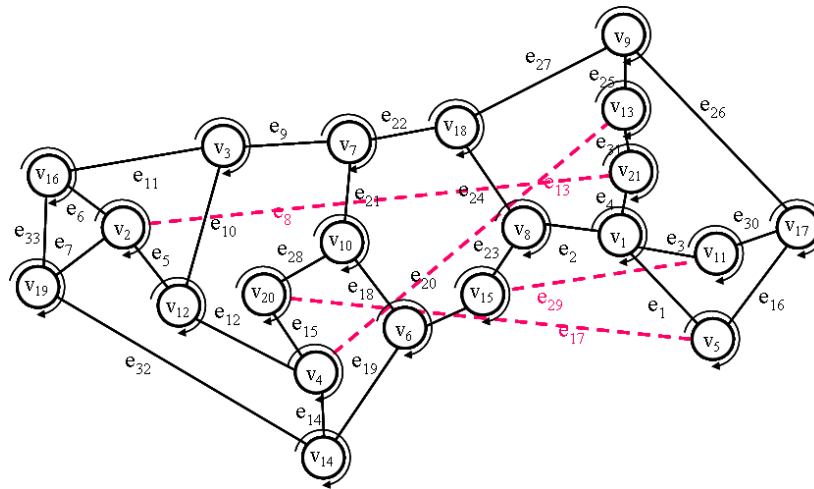


Рис. 3.4. Плоская часть графа (красным цветом обозначены удаленные ребра).

Естественно, что если производить перегруппировку циклов в кортежах при каждом удалении накрывающего подмножества циклов, то получим другую систему зависимых циклов. Например, для следующего кортежа циклов с переставленными элементами будет выделена другая система зависимых циклов.

Множество изометрических циклов графа:	Значение функционала
$c_{11} = \{e_6, e_7, e_{33}\} \rightarrow \{v_2, v_{16}, v_{19}\};$	312
$c_{14} = \{e_{14}, e_{15}, e_{18}, e_{19}, e_{28}\} \rightarrow \{v_4, v_{14}, v_{20}, v_6, v_{10}\};$	306
$c_8 = \{e_5, e_6, e_{10}, e_{11}\} \rightarrow \{v_2, v_{12}, v_{16}, v_3\};$	300
$c_{15} = \{e_{18}, e_{20}, e_{21}, e_{22}, e_{23}, e_{24}\} \rightarrow \{v_6, v_{10}, v_{15}, v_7, v_{18}, v_8\};$	294
$c_9 = \{e_5, e_7, e_{12}, e_{14}, e_{32}\} \rightarrow \{v_2, v_{12}, v_{19}, v_4, v_{14}\};$	288
$c_{12} = \{e_9, e_{10}, e_{12}, e_{15}, e_{21}, e_{28}\} \rightarrow \{v_3, v_7, v_{12}, v_4, v_{20}, v_{10}\};$	282
$c_4 = \{e_2, e_3, e_{23}, e_{29}\} \rightarrow \{v_1, v_8, v_{11}, v_{15}\};$	276
$c_1 = \{e_1, e_3, e_{16}, e_{30}\} \rightarrow \{v_1, v_5, v_{11}, v_{17}\};$	264
$c_{10} = \{e_5, e_8, e_{12}, e_{13}, e_{31}\} \rightarrow \{v_2, v_{12}, v_{21}, v_4, v_{13}\};$	246
$c_{16} = \{e_9, e_{10}, e_{12}, e_{13}, e_{22}, e_{25}, e_{27}\} \rightarrow \{v_3, v_7, v_{12}, v_4, v_{13}, v_{18}, v_9\};$	246
$c_2 = \{e_1, e_4, e_{13}, e_{15}, e_{17}, e_{31}\} \rightarrow \{v_1, v_5, v_{21}, v_4, v_{13}, v_{20}\};$	228
$c_{17} = \{e_2, e_3, e_{24}, e_{26}, e_{27}, e_{30}\} \rightarrow \{v_1, v_8, v_{11}, v_{18}, v_9, v_{17}\};$	216
$c_6 = \{e_1, e_4, e_{16}, e_{25}, e_{26}, e_{31}\} \rightarrow \{v_1, v_5, v_{21}, v_{17}, v_9, v_{13}\};$	198
$c_7 = \{e_3, e_4, e_{25}, e_{26}, e_{30}, e_{31}\} \rightarrow \{v_1, v_{11}, v_{21}, v_9, v_{13}, v_{17}\};$	198
$c_5 = \{e_2, e_4, e_{24}, e_{25}, e_{27}, e_{31}\} \rightarrow \{v_1, v_8, v_{21}, v_{18}, v_9, v_{13}\};$	196
$c_3 = \{e_1, e_2, e_{16}, e_{24}, e_{26}, e_{27}\} \rightarrow \{v_1, v_5, v_8, v_{17}, v_{18}, v_9\}.$	168

$$\begin{cases} c_1 \oplus c_6 \oplus c_7 = \emptyset; \\ c_1 \oplus c_5 \oplus c_6 \oplus c_{17} = \emptyset; \\ c_3 \oplus c_5 \oplus c_6 = \emptyset. \end{cases}$$

Метод сжимающихся окрестностей можно рассматривать как последовательное сжатие элементов матроида изометрических циклов, путем их удаления. Рассмотрим сокращение записи произведения однострочных структурных чисел характеризующих матроид в процессе удаления циклов.

Матроид изометрических циклов (в виде произведения однострочных структурных чисел)		Удаление циклов C ₁₃ и C ₁₈		Удаление циклов C ₁₃ , C ₁₈ , C ₆ и C ₁₇		Удаление циклов C ₁₃ , C ₁₈ , C ₆ , C ₁₇ и C ₅		Удаление циклов C ₁₃ , C ₁₈ , C ₆ , C ₁₇ и C ₇	
ребра	циклы	ребра	циклы	ребра	циклы	ребра	циклы	ребра	циклы
e ₂ :	C ₃ C ₄ C ₅ C ₁₇	e ₂ :	C ₃ C ₄ C ₅ C ₁₇	e ₂ :	C ₃ C ₄ C ₅	e ₂ :	C ₄	e ₂ :	C ₄
e ₃ :	C ₁ C ₄ C ₇ C ₁₇	e ₃ :	C ₁ C ₄ C ₇ C ₁₇	e ₃ :	C ₁ C ₄ C ₇	e ₃ :	C ₁	e ₃ :	C ₁
e ₆ :	C ₈ C ₁₁	e ₆ :	C ₈	e ₆ :	C ₈	e ₆ :	C ₈	e ₆ :	C ₈
e ₇ :	C ₉ C ₁₁	e ₇ :	C ₁₁	e ₇ :	C ₁₁	e ₇ :	C ₁₁	e ₇ :	C ₁₁
e ₈ :	C ₁₀	e ₈ :	C ₁₀	e ₈ :	C ₁₀	e ₈ :	C ₁₀	e ₈ :	C ₁₀
e ₁₀ :	C ₈ C ₁₂ C ₁₆	e ₁₀ :	C ₁₂	e ₁₀ :	C ₁₂	e ₁₀ :	C ₁₂	e ₁₀ :	C ₁₂
e ₁₃ :	C ₂ C ₁₀ C ₁₃ C ₁₆	e ₁₃ :	C ₁₆	e ₁₃ :	C ₁₆	e ₁₃ :	C ₁₆	e ₁₃ :	C ₁₆
e ₁₇ :	C ₂ C ₁₃	e ₁₇ :	C ₂	e ₁₇ :	C ₂	e ₁₇ :	C ₂	e ₁₇ :	C ₂
e ₁₉ :	C ₁₄	e ₁₉ :	C ₁₄	e ₁₉ :	C ₁₄	e ₁₉ :	C ₁₄	e ₁₉ :	C ₁₄
e ₂₁ :	C ₁₂ C ₁₅	e ₂₁ :	C ₁₅	e ₂₁ :	C ₁₅	e ₂₁ :	C ₁₅	e ₂₁ :	C ₁₅
e ₂₄ :	C ₃ C ₅ C ₁₅ C ₁₇ C ₁₈	e ₂₄ :	C ₃ C ₅ C ₁₇	e ₂₄ :	C ₃ C ₅	e ₂₄ :	C ₃	e ₂₄ :	C ₅
e ₂₆ :	C ₃ C ₆ C ₇ C ₁₃ C ₁₇ C ₁₈	e ₂₆ :	C ₃ C ₆ C ₇ C ₁₇	e ₂₆ :	C ₃ C ₇	e ₂₆ :	C ₇	e ₂₆ :	C ₃
e ₃₂ :	C ₉	e ₃₂ :	C ₉	e ₃₂ :	C ₉	e ₃₂ :	C ₉	e ₃₂ :	C ₉

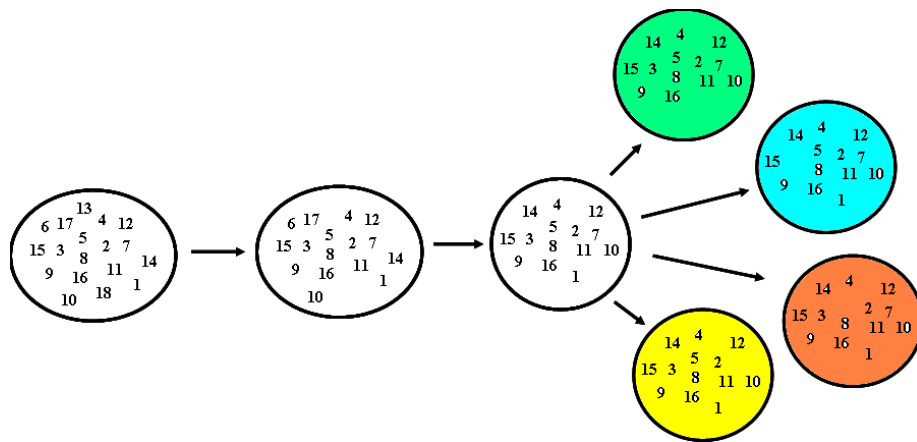


Рис. 3.5. Сужающиеся окрестности для множества циклов.

3.2. Метод сжимающихся окрестностей

Рассмотрим более подробно данный метод на примере графа с большим количеством изометрических циклов (см. рис. 3.6).

Количество вершин графа = 35, количество ребер графа = 54, количество изометрических циклов = 33

Смежность вершин графа:

V₁: V₂ V₈ V₂₉
V₄: V₃ V₅ V₂₃

V₂: V₁ V₃ V₃₁
V₅: V₄ V₆ V₂₄

V₃: V₂ V₄ V₃₅
V₆: V₅ V₇ V₃₄

$v_7: v_6 v_8 v_{32}$
 $v_{10}: v_9 v_{11} v_{32}$
 $v_{13}: v_{12} v_{14} v_{32}$
 $v_{16}: v_{15} v_{17} v_{35}$
 $v_{19}: v_{20} v_{28} v_{30}$
 $v_{22}: v_{21} v_{23} v_{34}$
 $v_{25}: v_{24} v_{26} v_{33}$
 $v_{28}: v_{19} v_{27} v_{32}$
 $v_{31}: v_2 v_{17} v_{20}$
 $v_{34}: v_6 v_{11} v_{22}$

$v_8: v_1 v_7 v_{30}$
 $v_{11}: v_{10} v_{12} v_{34}$
 $v_{14}: v_{13} v_{15} v_{35}$
 $v_{17}: v_{16} v_{18} v_{31}$
 $v_{20}: v_{19} v_{21} v_{31}$
 $v_{23}: v_4 v_{22} v_{24}$
 $v_{26}: v_{25} v_{27} v_{30}$
 $v_{29}: v_1 v_{15} v_{18} v_{21}$
 $v_{32}: v_7 v_{10} v_{13} v_{28}$
 $v_{35}: v_3 v_{14} v_{16}$

$v_9: v_{10} v_{18} v_{30}$
 $v_{12}: v_{11} v_{13} v_{33}$
 $v_{15}: v_{14} v_{16} v_{29}$
 $v_{18}: v_9 v_{17} v_{29}$
 $v_{21}: v_{20} v_{22} v_{29}$
 $v_{24}: v_5 v_{23} v_{25}$
 $v_{27}: v_{26} v_{28} v_{33}$
 $v_{30}: v_8 v_9 v_{19} v_{26}$
 $v_{33}: v_{12} v_{25} v_{27}$

Инцидентность ребер и вершин графа:

$e_1 \rightarrow (v_1, v_2) \vee (v_2, v_1)$
 $e_4 \rightarrow (v_2, v_3) \vee (v_3, v_2)$
 $e_7 \rightarrow (v_3, v_{35}) \vee (v_{35}, v_3)$
 $e_{10} \rightarrow (v_5, v_6) \vee (v_6, v_5)$
 $e_{13} \rightarrow (v_6, v_{34}) \vee (v_{34}, v_6)$
 $e_{16} \rightarrow (v_8, v_{30}) \vee (v_{30}, v_8)$
 $e_{19} \rightarrow (v_9, v_{30}) \vee (v_{30}, v_9)$
 $e_{22} \rightarrow (v_{11}, v_{12}) \vee (v_{12}, v_{11})$
 $e_{25} \rightarrow (v_{12}, v_{33}) \vee (v_{33}, v_{12})$
 $e_{28} \rightarrow (v_{14}, v_{15}) \vee (v_{15}, v_{14})$
 $e_{31} \rightarrow (v_{15}, v_{29}) \vee (v_{29}, v_{15})$
 $e_{34} \rightarrow (v_{17}, v_{18}) \vee (v_{18}, v_{17})$
 $e_{37} \rightarrow (v_{19}, v_{20}) \vee (v_{20}, v_{19})$
 $e_{40} \rightarrow (v_{20}, v_{21}) \vee (v_{21}, v_{20})$
 $e_{43} \rightarrow (v_{21}, v_{29}) \vee (v_{29}, v_{21})$
 $e_{46} \rightarrow (v_{23}, v_{24}) \vee (v_{24}, v_{23})$
 $e_{49} \rightarrow (v_{25}, v_{33}) \vee (v_{33}, v_{25})$
 $e_{52} \rightarrow (v_{27}, v_{28}) \vee (v_{28}, v_{27})$

$e_2 \rightarrow (v_1, v_8) \vee (v_8, v_1)$
 $e_5 \rightarrow (v_2, v_{31}) \vee (v_{31}, v_2)$
 $e_8 \rightarrow (v_4, v_5) \vee (v_5, v_4)$
 $e_{11} \rightarrow (v_5, v_{24}) \vee (v_{24}, v_5)$
 $e_{14} \rightarrow (v_7, v_8) \vee (v_8, v_7)$
 $e_{17} \rightarrow (v_9, v_{10}) \vee (v_{10}, v_9)$
 $e_{20} \rightarrow (v_{10}, v_{11}) \vee (v_{11}, v_{10})$
 $e_{23} \rightarrow (v_{11}, v_{34}) \vee (v_{34}, v_{11})$
 $e_{26} \rightarrow (v_{13}, v_{14}) \vee (v_{14}, v_{13})$
 $e_{29} \rightarrow (v_{14}, v_{35}) \vee (v_{35}, v_{14})$
 $e_{32} \rightarrow (v_{16}, v_{17}) \vee (v_{17}, v_{16})$
 $e_{35} \rightarrow (v_{17}, v_{31}) \vee (v_{31}, v_{17})$
 $e_{38} \rightarrow (v_{19}, v_{28}) \vee (v_{28}, v_{19})$
 $e_{41} \rightarrow (v_{20}, v_{31}) \vee (v_{31}, v_{20})$
 $e_{44} \rightarrow (v_{22}, v_{23}) \vee (v_{23}, v_{22})$
 $e_{47} \rightarrow (v_{24}, v_{25}) \vee (v_{25}, v_{24})$
 $e_{50} \rightarrow (v_{26}, v_{27}) \vee (v_{27}, v_{26})$
 $e_{53} \rightarrow (v_{27}, v_{33}) \vee (v_{33}, v_{27})$

$e_3 \rightarrow (v_1, v_{29}) \vee (v_{29}, v_1)$
 $e_6 \rightarrow (v_3, v_4) \vee (v_4, v_3)$
 $e_9 \rightarrow (v_4, v_{23}) \vee (v_{23}, v_4)$
 $e_{12} \rightarrow (v_6, v_7) \vee (v_7, v_6)$
 $e_{15} \rightarrow (v_7, v_{32}) \vee (v_{32}, v_7)$
 $e_{18} \rightarrow (v_9, v_{18}) \vee (v_{18}, v_9)$
 $e_{21} \rightarrow (v_{10}, v_{32}) \vee (v_{32}, v_{10})$
 $e_{24} \rightarrow (v_{12}, v_{13}) \vee (v_{13}, v_{12})$
 $e_{27} \rightarrow (v_{13}, v_{32}) \vee (v_{32}, v_{13})$
 $e_{30} \rightarrow (v_{15}, v_{16}) \vee (v_{16}, v_{15})$
 $e_{33} \rightarrow (v_{16}, v_{35}) \vee (v_{35}, v_{16})$
 $e_{36} \rightarrow (v_{18}, v_{29}) \vee (v_{29}, v_{18})$
 $e_{39} \rightarrow (v_{19}, v_{30}) \vee (v_{30}, v_{19})$
 $e_{42} \rightarrow (v_{21}, v_{22}) \vee (v_{22}, v_{21})$
 $e_{45} \rightarrow (v_{22}, v_{34}) \vee (v_{34}, v_{22})$
 $e_{48} \rightarrow (v_{25}, v_{26}) \vee (v_{26}, v_{25})$
 $e_{51} \rightarrow (v_{26}, v_{30}) \vee (v_{30}, v_{26})$
 $e_{54} \rightarrow (v_{28}, v_{32}) \vee (v_{32}, v_{28})$

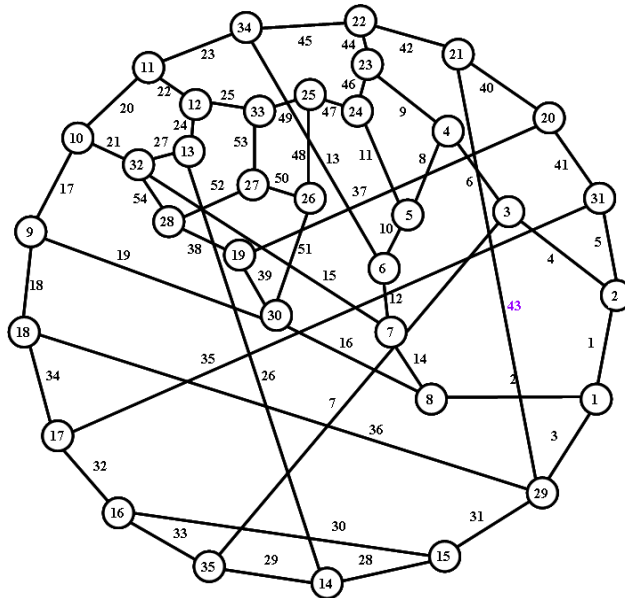


Рис. 3.6. Граф G_6 .

Множество изометрических циклов графа и определение веса циклов:

Множество изометрических циклов графа:	Значение функционала
$c_1 = \{e_1, e_3, e_5, e_{34}, e_{35}, e_{36}\} \rightarrow \{v_1, v_2, v_{29}, v_{31}, v_{17}, v_{18}\}$	2130
$c_2 = \{e_1, e_3, e_5, e_{40}, e_{41}, e_{43}\} \rightarrow \{v_1, v_2, v_{29}, v_{31}, v_{20}, v_{21}\}$	2094
$c_3 = \{e_2, e_3, e_{16}, e_{18}, e_{19}, e_{36}\} \rightarrow \{v_1, v_8, v_{29}, v_{30}, v_9, v_{18}\}$	2070

$C_4 = \{e_4, e_5, e_7, e_{32}, e_{33}, e_{35}\} \rightarrow \{v_2, v_3, v_{31}, v_{35}, v_{16}, v_{17}\}$	2388
$C_5 = \{e_1, e_2, e_4, e_6, e_8, e_{10}, e_{12}, e_{14}\} \rightarrow \{v_1, v_2, v_8, v_3, v_4, v_5, v_6, v_7\}$	2196
$C_6 = \{e_1, e_3, e_4, e_6, e_9, e_{42}, e_{43}, e_{44}\} \rightarrow \{v_1, v_2, v_{29}, v_3, v_4, v_{23}, v_{21}, v_{22}\}$	2088
$C_7 = \{e_4, e_5, e_6, e_9, e_{40}, e_{41}, e_{42}, e_{44}\} \rightarrow \{v_2, v_3, v_{31}, v_4, v_{23}, v_{20}, v_{21}, v_{22}\}$	2256
$C_8 = \{e_8, e_9, e_{11}, e_{46}\} \rightarrow \{v_4, v_5, v_{23}, v_{24}\}$	2430
$C_9 = \{e_8, e_9, e_{10}, e_{13}, e_{44}, e_{45}\} \rightarrow \{v_4, v_5, v_{23}, v_6, v_{34}, v_{22}\}$	2310
$C_{10} = \{e_{10}, e_{11}, e_{13}, e_{44}, e_{45}, e_{46}\} \rightarrow \{v_5, v_6, v_{24}, v_{34}, v_{22}, v_{23}\}$	2310
$C_{11} = \{e_{10}, e_{11}, e_{12}, e_{14}, e_{16}, e_{47}, e_{48}, e_{51}\} \rightarrow \{v_5, v_6, v_{24}, v_7, v_8, v_{30}, v_{25}, v_{26}\}$	2280
$C_{12} = \{e_{12}, e_{13}, e_{15}, e_{20}, e_{21}, e_{23}\} \rightarrow \{v_6, v_7, v_{34}, v_{32}, v_{10}, v_{11}\}$	2346
$C_{13} = \{e_2, e_3, e_{12}, e_{13}, e_{14}, e_{42}, e_{43}, e_{45}\} \rightarrow \{v_1, v_8, v_{29}, v_6, v_7, v_{34}, v_{21}, v_{22}\}$	2034
$C_{14} = \{e_{14}, e_{15}, e_{16}, e_{17}, e_{19}, e_{21}\} \rightarrow \{v_7, v_8, v_{32}, v_{30}, v_9, v_{10}\}$	2250
$C_{15} = \{e_{14}, e_{15}, e_{16}, e_{38}, e_{39}, e_{54}\} \rightarrow \{v_7, v_8, v_{32}, v_{30}, v_{19}, v_{28}\}$	2238
$C_{16} = \{e_{17}, e_{18}, e_{20}, e_{23}, e_{36}, e_{42}, e_{43}, e_{45}\} \rightarrow \{v_9, v_{10}, v_{18}, v_{11}, v_{34}, v_{29}, v_{21}, v_{22}\}$	2166
$C_{17} = \{e_{17}, e_{19}, e_{21}, e_{38}, e_{39}, e_{54}\} \rightarrow \{v_9, v_{10}, v_{30}, v_{32}, v_{19}, v_{28}\}$	2286
$C_{18} = \{e_{20}, e_{21}, e_{22}, e_{24}, e_{27}\} \rightarrow \{v_{10}, v_{11}, v_{32}, v_{12}, v_{13}\}$	2412
$C_{19} = \{e_{24}, e_{25}, e_{27}, e_{52}, e_{53}, e_{54}\} \rightarrow \{v_{12}, v_{13}, v_{33}, v_{32}, v_{27}, v_{28}\}$	2448
$C_{20} = \{e_2, e_3, e_{14}, e_{15}, e_{26}, e_{27}, e_{28}, e_{31}\} \rightarrow \{v_1, v_8, v_{29}, v_7, v_{32}, v_{13}, v_{14}, v_{15}\}$	2160
$C_{21} = \{e_{17}, e_{18}, e_{21}, e_{26}, e_{27}, e_{28}, e_{31}, e_{36}\} \rightarrow \{v_9, v_{10}, v_{18}, v_{32}, v_{13}, v_{14}, v_{15}, v_{29}\}$	2244
$C_{22} = \{e_{28}, e_{29}, e_{30}, e_{33}\} \rightarrow \{v_{14}, v_{15}, v_{35}, v_{16}\}$	2460
$C_{23} = \{e_{30}, e_{31}, e_{32}, e_{34}, e_{36}\} \rightarrow \{v_{15}, v_{16}, v_{29}, v_{17}, v_{18}\}$	2352
$C_{24} = \{e_1, e_3, e_4, e_7, e_{28}, e_{29}, e_{31}\} \rightarrow \{v_1, v_2, v_{29}, v_3, v_{35}, v_{14}, v_{15}\}$	2220
$C_{25} = \{e_{34}, e_{35}, e_{36}, e_{40}, e_{41}, e_{43}\} \rightarrow \{v_{17}, v_{18}, v_{31}, v_{29}, v_{20}, v_{21}\}$	2190
$C_{26} = \{e_1, e_2, e_5, e_{16}, e_{37}, e_{39}, e_{41}\} \rightarrow \{v_1, v_2, v_8, v_{31}, v_{30}, v_{19}, v_{20}\}$	2118
$C_{27} = \{e_2, e_3, e_{16}, e_{37}, e_{39}, e_{40}, e_{43}\} \rightarrow \{v_1, v_8, v_{29}, v_{30}, v_{19}, v_{20}, v_{21}\}$	1998
$C_{28} = \{e_{18}, e_{19}, e_{34}, e_{35}, e_{37}, e_{39}, e_{41}\} \rightarrow \{v_9, v_{18}, v_{30}, v_{17}, v_{31}, v_{19}, v_{20}\}$	2226
$C_{29} = \{e_{18}, e_{19}, e_{36}, e_{37}, e_{39}, e_{40}, e_{43}\} \rightarrow \{v_9, v_{18}, v_{30}, v_{29}, v_{19}, v_{20}, v_{21}\}$	2082
$C_{30} = \{e_{38}, e_{39}, e_{50}, e_{51}, e_{52}\} \rightarrow \{v_{19}, v_{28}, v_{30}, v_{26}, v_{27}\}$	2382
$C_{31} = \{e_{10}, e_{11}, e_{13}, e_{22}, e_{23}, e_{25}, e_{47}, e_{49}\} \rightarrow \{v_5, v_6, v_{24}, v_{34}, v_{11}, v_{12}, v_{33}, v_{25}\}$	2346
$C_{32} = \{e_{22}, e_{23}, e_{25}, e_{44}, e_{45}, e_{46}, e_{47}, e_{49}\} \rightarrow \{v_{11}, v_{12}, v_{34}, v_{33}, v_{22}, v_{23}, v_{24}, v_{25}\}$	2358
$C_{33} = \{e_{48}, e_{49}, e_{50}, e_{53}\} \rightarrow \{v_{25}, v_{26}, v_{33}, v_{27}\}$	2472

Образуем кортеж изометрических циклов K_τ располагая циклы в порядке не возрастания их весов:

Множество изометрических циклов графа:	Значение функционала
$C_{33} = \{e_{48}, e_{49}, e_{50}, e_{53}\} \rightarrow \{v_{25}, v_{26}, v_{33}, v_{27}\}$	2472
$C_{22} = \{e_{28}, e_{29}, e_{30}, e_{33}\} \rightarrow \{v_{14}, v_{15}, v_{35}, v_{16}\}$	2460
$C_{19} = \{e_{24}, e_{25}, e_{27}, e_{52}, e_{53}, e_{54}\} \rightarrow \{v_{12}, v_{13}, v_{33}, v_{32}, v_{27}, v_{28}\}$	2448
$C_8 = \{e_8, e_9, e_{11}, e_{46}\} \rightarrow \{v_4, v_5, v_{23}, v_{24}\}$	2430
$C_{18} = \{e_{20}, e_{21}, e_{22}, e_{24}, e_{27}\} \rightarrow \{v_{10}, v_{11}, v_{32}, v_{12}, v_{13}\}$	2412
$C_4 = \{e_4, e_5, e_7, e_{32}, e_{33}, e_{35}\} \rightarrow \{v_2, v_3, v_{31}, v_{35}, v_{16}, v_{17}\}$	2388
$C_{30} = \{e_{38}, e_{39}, e_{50}, e_{51}, e_{52}\} \rightarrow \{v_{19}, v_{28}, v_{30}, v_{26}, v_{27}\}$	2382
$C_{32} = \{e_{22}, e_{23}, e_{25}, e_{44}, e_{45}, e_{46}, e_{47}, e_{49}\} \rightarrow \{v_{11}, v_{12}, v_{34}, v_{33}, v_{22}, v_{23}, v_{24}, v_{25}\}$	2358
$C_{23} = \{e_{30}, e_{31}, e_{32}, e_{34}, e_{36}\} \rightarrow \{v_{15}, v_{16}, v_{29}, v_{17}, v_{18}\}$	2352
$C_{12} = \{e_{12}, e_{13}, e_{15}, e_{20}, e_{21}, e_{23}\} \rightarrow \{v_6, v_7, v_{34}, v_{32}, v_{10}, v_{11}\}$	2346
$C_{31} = \{e_{10}, e_{11}, e_{13}, e_{22}, e_{23}, e_{25}, e_{47}, e_{49}\} \rightarrow \{v_5, v_6, v_{24}, v_{34}, v_{11}, v_{12}, v_{33}, v_{25}\}$	2346
$C_9 = \{e_8, e_9, e_{10}, e_{13}, e_{44}, e_{45}\} \rightarrow \{v_4, v_5, v_{23}, v_6, v_{34}, v_{22}\}$	2310
$C_{10} = \{e_{10}, e_{11}, e_{13}, e_{44}, e_{45}, e_{46}\} \rightarrow \{v_5, v_6, v_{24}, v_{34}, v_{22}, v_{23}\}$	2310
$C_{17} = \{e_{17}, e_{19}, e_{21}, e_{38}, e_{39}, e_{54}\} \rightarrow \{v_9, v_{10}, v_{30}, v_{32}, v_{19}, v_{28}\}$	2286
$C_{11} = \{e_{10}, e_{11}, e_{12}, e_{14}, e_{16}, e_{47}, e_{48}, e_{51}\} \rightarrow \{v_5, v_6, v_{24}, v_7, v_8, v_{30}, v_{25}, v_{26}\}$	2280
$C_7 = \{e_4, e_5, e_6, e_9, e_{40}, e_{41}, e_{42}, e_{44}\} \rightarrow \{v_2, v_3, v_{31}, v_4, v_{23}, v_{20}, v_{21}, v_{22}\}$	2256
$C_{14} = \{e_{14}, e_{15}, e_{16}, e_{17}, e_{19}, e_{21}\} \rightarrow \{v_7, v_8, v_{32}, v_{30}, v_9, v_{10}\}$	2250
$C_{16} = \{e_{17}, e_{18}, e_{20}, e_{23}, e_{36}, e_{42}, e_{43}, e_{45}\} \rightarrow \{v_9, v_{10}, v_{18}, v_{11}, v_{34}, v_{29}, v_{21}, v_{22}\}$	2166
$C_{15} = \{e_{14}, e_{15}, e_{16}, e_{38}, e_{39}, e_{54}\} \rightarrow \{v_7, v_8, v_{32}, v_{30}, v_{19}, v_{28}\}$	2238
$C_{28} = \{e_{18}, e_{19}, e_{34}, e_{35}, e_{37}, e_{39}, e_{41}\} \rightarrow \{v_9, v_{18}, v_{30}, v_{17}, v_{31}, v_{19}, v_{20}\}$	2226

$c_{24} = \{e_1, e_3, e_4, e_7, e_{28}, e_{29}, e_{31}\} \rightarrow \{v_1, v_2, v_{29}, v_3, v_{35}, v_{14}, v_{15}\}$	2220
$c_5 = \{e_1, e_2, e_4, e_6, e_8, e_{10}, e_{12}, e_{14}\} \rightarrow \{v_1, v_2, v_8, v_3, v_4, v_5, v_6, v_7\}$	2196
$c_{25} = \{e_{34}, e_{35}, e_{36}, e_{40}, e_{41}, e_{43}\} \rightarrow \{v_{17}, v_{18}, v_{31}, v_{29}, v_{20}, v_{21}\}$	2190
$c_{21} = \{e_{17}, e_{18}, e_{21}, e_{26}, e_{27}, e_{28}, e_{31}, e_{36}\} \rightarrow \{v_9, v_{10}, v_{18}, v_{32}, v_{13}, v_{14}, v_{15}, v_{29}\}$	2244
$c_{20} = \{e_2, e_3, e_{14}, e_{15}, e_{26}, e_{27}, e_{28}, e_{31}\} \rightarrow \{v_1, v_8, v_{29}, v_7, v_{32}, v_{13}, v_{14}, v_{15}\}$	2160
$c_1 = \{e_1, e_3, e_5, e_{34}, e_{35}, e_{36}\} \rightarrow \{v_1, v_2, v_{29}, v_{31}, v_{17}, v_{18}\}$	2130
$c_{26} = \{e_1, e_2, e_5, e_{16}, e_{37}, e_{39}, e_{41}\} \rightarrow \{v_1, v_2, v_8, v_{31}, v_{30}, v_{19}, v_{20}\}$	2118
$c_2 = \{e_1, e_3, e_5, e_{40}, e_{41}, e_{43}\} \rightarrow \{v_1, v_2, v_{29}, v_{31}, v_{20}, v_{21}\}$	2094
$c_6 = \{e_1, e_3, e_4, e_6, e_9, e_{42}, e_{43}, e_{44}\} \rightarrow \{v_1, v_2, v_{29}, v_3, v_4, v_{23}, v_{21}, v_{22}\}$	2088
$c_{29} = \{e_{18}, e_{19}, e_{36}, e_{37}, e_{39}, e_{40}, e_{43}\} \rightarrow \{v_9, v_{18}, v_{30}, v_{29}, v_{19}, v_{20}, v_{21}\}$	2082
$c_3 = \{e_2, e_3, e_{16}, e_{18}, e_{19}, e_{36}\} \rightarrow \{v_1, v_8, v_{29}, v_{30}, v_9, v_{18}\}$	2070
$c_{13} = \{e_2, e_3, e_{12}, e_{13}, e_{14}, e_{42}, e_{43}, e_{45}\} \rightarrow \{v_1, v_8, v_{29}, v_6, v_7, v_{34}, v_{21}, v_{22}\}$	2034
$c_{27} = \{e_2, e_3, e_{16}, e_{37}, e_{39}, e_{40}, e_{43}\} \rightarrow \{v_1, v_8, v_{29}, v_{30}, v_{19}, v_{20}, v_{21}\}$	1998

Выделим подмножества ветвей дерева и хорд графа.

Подмножество хорд $H = \{e_2, e_5, e_6, e_{10}, e_{15}, e_{19}, e_{21}, e_{22}, e_{26}, e_{31}, e_{33}, e_{34}, e_{37}, e_{43}, e_{45}, e_{46}, e_{49}, e_{50}, e_{51}, e_{53}\}$.

Применим к кортежу K_r модифицированный алгоритм Гаусса и выделим систему зависимых подмножеств изометрических циклов. Отобразим процесс формирования суграфов.

		Множество изометрических циклов графа:
1	c_{33}	$\{e_{48}, e_{49}, e_{50}, e_{53}\}$
2	c_{22}	$\{e_{28}, e_{29}, e_{30}, e_{33}\}$
3	c_{19}	$\{e_{48}, e_{49}, e_{50}, e_{24}, e_{25}, e_{27}, e_{52}, e_{54}\}$
4	c_8	$\{e_8, e_9, e_{11}, e_{46}\}$
5	c_{18}	$\{e_{20}, e_{21}, e_{22}, e_{24}, e_{27}\}$
6	c_4	$\{e_4, e_5, e_7, e_{32}, e_{33}, e_{35}\}$
7	c_{30}	$\{e_{38}, e_{39}, e_{50}, e_{51}, e_{52}\}$
8	c_{32}	$\{e_{48}, e_{50}, e_{24}, e_{27}, e_{52}, e_{54}, e_{22}, e_{23}, e_{44}, e_{45}, e_{46}, e_{47}\}$
9	c_{23}	$\{e_{30}, e_{31}, e_{32}, e_{34}, e_{36}\}$
10	c_{12}	$\{e_{48}, e_{50}, e_{52}, e_{54}, e_{44}, e_{45}, e_{46}, e_{47}, e_{12}, e_{13}, e_{15}\}$
11	c_{31}	$\{e_{48}, e_{50}, e_{52}, e_{54}, e_{47}, e_{12}, e_{15}, e_{10}, e_{11}\}$
12	c_9	\emptyset
13	c_{10}	\emptyset
14	c_{17}	$\{e_{48}, e_{23}, e_{44}, e_{45}, e_{46}, e_{47}, e_{51}, e_{20}, e_{17}, e_{19}\}$
15	c_{11}	$\{e_{10}, e_{11}, e_{12}, e_{14}, e_{16}, e_{47}, e_{48}, e_{51}\}$
16	c_7	$\{e_{10}, e_{12}, e_{14}, e_{16}, e_{47}, e_{48}, e_{51}, e_7, e_{32}, e_{33}, e_{35}, e_8, e_{46}, e_6, e_{40}, e_{41}, e_{42}, e_{44}\}$
17	c_{14}	\emptyset
18	c_{16}	$\{e_{10}, e_{12}, e_{14}, e_{16}, e_7, e_{32}, e_{33}, e_{35}, e_8, e_6, e_{40}, e_{41}, e_{19}, e_{18}, e_{36}, e_{43}\}$
19	c_{15}	\emptyset
20	c_{28}	$\{e_{35}, e_{41}, e_{36}, e_{43}, e_{47}, e_{48}, e_{46}, e_{42}, e_{44}, e_{38}, e_{50}, e_{52}, e_{34}, e_{37}\}$
21	c_{24}	$\{e_{36}, e_{47}, e_{48}, e_{46}, e_{42}, e_{44}, e_{38}, e_{50}, e_{52}, e_{37}, e_{10}, e_{12}, e_{14}, e_{16}, e_8, e_6, e_{40}, e_{19}, e_{18}, e_1, e_3, e_4\}$
22	c_5	$\{e_1, e_2, e_4, e_6, e_8, e_{10}, e_{12}, e_{14}\}$
23	c_{25}	$\{e_{36}, e_{10}, e_{12}, e_{14}, e_{16}, e_8, e_6, e_{19}, e_{18}, e_1, e_3, e_4\}$
24	c_{21}	$\{e_{36}, e_{10}, e_{12}, e_{14}, e_{16}, e_8, e_6, e_{19}, e_1, e_3, e_4, e_{30}, e_{32}, e_{34}, e_{20}, e_{22}, e_{24}, e_{17}, e_{26}, e_{28}\}$
25	c_{20}	\emptyset
26	c_1	\emptyset
27	c_{26}	\emptyset
28	c_2	\emptyset
29	c_6	\emptyset
30	c_{29}	\emptyset
31	c_3	\emptyset
32	c_{13}	\emptyset
33	c_{27}	\emptyset

Отдельно отобразим процесс формирования зависимой системы циклов.

1	c_{33}	
2	c_{22}	
3	c_{19}	c_{19}, c_{33}
4	c_8	
5	c_{18}	
6	c_4	
7	c_{30}	
8	c_{32}	c_{32}, c_{19}, c_{33}
9	c_{23}	
10	c_{12}	$c_{12}, c_{18}, c_{32}, c_{10}, c_{33}$
11	c_{31}	$c_{31}, c_{12}, c_{18}, c_{19}, c_{33}$
12	c_9	c_9, c_8, c_{32}, c_{31}
13	c_{10}	c_{10}, c_{32}, c_{31}
14	c_{17}	$c_{17}, c_{18}, c_{30}, c_{32}, c_{19}, c_{33}$
15	c_{11}	
16	c_7	c_7, c_8, c_4, c_{11}
17	c_{14}	$c_{14}, c_{31}, c_{12}, c_{17}, c_{18}, c_{30}, c_{19}, c_{33}, c_{11}$
18	c_{16}	$c_{16}, c_{17}, c_{18}, c_{30}, c_{32}, c_{19}, c_{33}, c_7, c_8, c_4$
19	c_{15}	$c_{15}, c_{30}, c_{31}, c_{12}, c_{18}, c_{19}, c_{33}, c_{11}$
20	c_{28}	$c_{28}, c_{16}, c_{17}, c_{18}, c_{32}, c_{19}, c_{33}$
21	c_{24}	$c_{24}, c_{22}, c_{23}, c_{30}, c_7, c_8, c_4, c_{11}, c_{28}$
22	c_5	
23	c_{25}	$c_{25}, c_{16}, c_{17}, c_{18}, c_{32}, c_{19}, c_{33}, c_{24}, c_{22}, c_{23}, c_{30}, c_7, c_8, c_4, c_{11}$
24	c_{21}	$c_{21}, c_{25}, c_{16}, c_{17}, c_{32}, c_{19}, c_{33}, c_{24}, c_{22}, c_{30}, c_7, c_8, c_4, c_{11}$
25	c_{20}	$c_{20}, c_{23}, c_{31}, c_{12}, c_{22}, c_{21}, c_{25}, c_{16}, c_{32}, c_{24}, c_{22}, c_7, c_8, c_4$
26	c_1	$c_1, c_{24}, c_{22}, c_{23}, c_4$
27	c_{26}	$c_{26}, c_{28}, c_{22}, c_{25}, c_{16}, c_{17}, c_{18}, c_{32}, c_{19}, c_{33}, c_{30}, c_7, c_8, c_{11}$
28	c_2	$c_2, c_{25}, c_{24}, c_{22}, c_{23}, c_4$
29	c_6	$c_6, c_{25}, c_{24}, c_{22}, c_{23}, c_7, c_4$
30	c_{29}	c_{29}, c_{28}, c_{25}
31	c_3	$c_3, c_5, c_{25}, c_{16}, c_{17}, c_{18}, c_{32}, c_{19}, c_{33}, c_{24}, c_{22}, c_{23}, c_{30}, c_7, c_8, c_4, c_{11}$
32	c_{13}	$c_{13}, c_{31}, c_5, c_{25}, c_{32}, c_{24}, c_{22}, c_{23}, c_7, c_8, c_4$
33	c_{27}	$c_{27}, c_{16}, c_{17}, c_{18}, c_{32}, c_{19}, c_{33}, c_{24}, c_{22}, c_{23}, c_{30}, c_7, c_8, c_4, c_{11}, c_{28}, c_5$

$$\left. \begin{aligned}
 & c_9 \oplus c_8 \oplus c_{32} \oplus c_{31} \oplus c_{23} = \emptyset; \\
 & c_{10} \oplus c_{32} \oplus c_{31} = \emptyset; \\
 & c_{14} \oplus c_{31} \oplus c_{12} \oplus c_{17} \oplus c_{18} \oplus c_{30} \oplus c_{19} \oplus c_{33} \oplus c_{11} = \emptyset; \\
 & c_{15} \oplus c_{30} \oplus c_{31} \oplus c_{12} \oplus c_{18} \oplus c_{19} \oplus c_{33} \oplus c_{11} = \emptyset; \\
 & c_{20} \oplus c_{23} \oplus c_{31} \oplus c_{12} \oplus c_{22} \oplus c_{21} \oplus c_{25} \oplus c_{16} \oplus c_{32} \oplus c_{24} \oplus c_{22} \oplus c_7 \oplus c_8 \oplus c_4 = \emptyset; \\
 & c_1 \oplus c_{24} \oplus c_{22} \oplus c_{23} \oplus c_4 = \emptyset; \\
 & c_{26} \oplus c_{28} \oplus c_{22} \oplus c_{25} \oplus c_{16} \oplus c_{17} \oplus c_{18} \oplus c_{32} \oplus c_{19} \oplus c_{33} \oplus c_{30} \oplus c_7 \oplus c_8 \oplus c_{11} = \emptyset; \\
 & c_2 \oplus c_{25} \oplus c_{24} \oplus c_{22} \oplus c_{23} \oplus c_4 = \emptyset; \\
 & c_6 \oplus c_{25} \oplus c_{24} \oplus c_{22} \oplus c_{23} \oplus c_7 \oplus c_4 = \emptyset; \\
 & c_{29} \oplus c_{28} \oplus c_{25} = \emptyset; \\
 & c_3 \oplus c_5 \oplus c_{25} \oplus c_{16} \oplus c_{17} \oplus c_{18} \oplus c_{32} \oplus c_{19} \oplus c_{33} \oplus c_{24} \oplus c_{22} \oplus c_{23} \oplus c_{30} \oplus c_7 \oplus c_8 \oplus c_4 \oplus c_{11} = \emptyset; \\
 & c_{13} \oplus c_{31} \oplus c_5 \oplus c_{25} \oplus c_{32} \oplus c_{24} \oplus c_{22} \oplus c_{23} \oplus c_7 \oplus c_8 \oplus c_4 = \emptyset; \\
 & c_{27} \oplus c_{16} \oplus c_{17} \oplus c_{18} \oplus c_{32} \oplus c_{19} \oplus c_{33} \oplus c_{24} \oplus c_{22} \oplus c_{23} \oplus c_{30} \oplus c_7 \oplus c_8 \oplus c_4 \oplus c_{11} \oplus c_{28} \oplus c_5 = \emptyset.
 \end{aligned} \right\}$$

Формируем множество накрывающихся циклов: c_{31}, c_5, c_{25} . Удаляем накрывающиеся циклы из множества изометрических циклов.

Образует новый кортеж изометрических циклов K'_r , расставляя циклы в порядке не воз-

растания их весов:

№	Множество изометрических циклов графа:
1	$c_{33} = \{e_{48}, e_{49}, e_{50}, e_{53}\} \rightarrow \{v_{25}, v_{26}, v_{33}, v_{27}\}$
2	$c_{22} = \{e_{28}, e_{29}, e_{30}, e_{33}\} \rightarrow \{v_{14}, v_{15}, v_{35}, v_{16}\}$
3	$c_{19} = \{e_{24}, e_{25}, e_{27}, e_{52}, e_{53}, e_{54}\} \rightarrow \{v_{12}, v_{13}, v_{33}, v_{32}, v_{27}, v_{28}\}$
4	$c_8 = \{e_8, e_9, e_{11}, e_{46}\} \rightarrow \{v_4, v_5, v_{23}, v_{24}\}$
5	$c_{18} = \{e_{20}, e_{21}, e_{22}, e_{24}, e_{27}\} \rightarrow \{v_{10}, v_{11}, v_{32}, v_{12}, v_{13}\}$
6	$c_4 = \{e_4, e_5, e_7, e_{32}, e_{33}, e_{35}\} \rightarrow \{v_2, v_3, v_{31}, v_{35}, v_{16}, v_{17}\}$
7	$c_{30} = \{e_{38}, e_{39}, e_{50}, e_{51}, e_{52}\} \rightarrow \{v_{19}, v_{28}, v_{30}, v_{26}, v_{27}\}$
8	$c_{32} = \{e_{22}, e_{23}, e_{25}, e_{44}, e_{45}, e_{46}, e_{47}, e_{49}\} \rightarrow \{v_{11}, v_{12}, v_{34}, v_{33}, v_{22}, v_{23}, v_{24}, v_{25}\}$
9	$c_{23} = \{e_{30}, e_{31}, e_{32}, e_{34}, e_{36}\} \rightarrow \{v_{15}, v_{16}, v_{29}, v_{17}, v_{18}\}$
10	$c_{12} = \{e_{12}, e_{13}, e_{15}, e_{20}, e_{21}, e_{23}\} \rightarrow \{v_6, v_7, v_{34}, v_{32}, v_{10}, v_{11}\}$
11	$c_9 = \{e_8, e_9, e_{10}, e_{13}, e_{44}, e_{45}\} \rightarrow \{v_4, v_5, v_{23}, v_6, v_{34}, v_{22}\}$
12	$c_{10} = \{e_{10}, e_{11}, e_{13}, e_{44}, e_{45}, e_{46}\} \rightarrow \{v_5, v_6, v_{24}, v_{34}, v_{22}, v_{23}\}$
13	$c_{17} = \{e_{17}, e_{19}, e_{21}, e_{38}, e_{39}, e_{54}\} \rightarrow \{v_9, v_{10}, v_{30}, v_{32}, v_{19}, v_{28}\}$
14	$c_{11} = \{e_{10}, e_{11}, e_{12}, e_{14}, e_{16}, e_{47}, e_{48}, e_{51}\} \rightarrow \{v_5, v_6, v_{24}, v_7, v_8, v_{30}, v_{25}, v_{26}\}$
15	$c_7 = \{e_4, e_5, e_6, e_9, e_{40}, e_{41}, e_{42}, e_{44}\} \rightarrow \{v_2, v_3, v_{31}, v_4, v_{23}, v_{20}, v_{21}, v_{22}\}$
16	$c_{14} = \{e_{14}, e_{15}, e_{16}, e_{17}, e_{19}, e_{21}\} \rightarrow \{v_7, v_8, v_{32}, v_{30}, v_9, v_{10}\}$
17	$c_{16} = \{e_{17}, e_{18}, e_{20}, e_{23}, e_{36}, e_{42}, e_{43}, e_{45}\} \rightarrow \{v_9, v_{10}, v_{18}, v_{11}, v_{34}, v_{29}, v_{21}, v_{22}\}$
18	$c_{15} = \{e_{14}, e_{15}, e_{16}, e_{38}, e_{39}, e_{54}\} \rightarrow \{v_7, v_8, v_{32}, v_{30}, v_{19}, v_{28}\}$
19	$c_{28} = \{e_{18}, e_{19}, e_{34}, e_{35}, e_{37}, e_{39}, e_{41}\} \rightarrow \{v_9, v_{18}, v_{30}, v_{17}, v_{31}, v_{19}, v_{20}\}$
20	$c_{24} = \{e_1, e_3, e_4, e_7, e_{28}, e_{29}, e_{31}\} \rightarrow \{v_1, v_2, v_{29}, v_3, v_{35}, v_{14}, v_{15}\}$
21	$c_{21} = \{e_{17}, e_{18}, e_{21}, e_{26}, e_{27}, e_{28}, e_{31}, e_{36}\} \rightarrow \{v_9, v_{10}, v_{18}, v_{32}, v_{13}, v_{14}, v_{15}, v_{29}\}$
22	$c_{20} = \{e_2, e_3, e_{14}, e_{15}, e_{26}, e_{27}, e_{28}, e_{31}\} \rightarrow \{v_1, v_8, v_{29}, v_7, v_{32}, v_{13}, v_{14}, v_{15}\}$
23	$c_1 = \{e_1, e_3, e_5, e_{34}, e_{35}, e_{36}\} \rightarrow \{v_1, v_2, v_{29}, v_{31}, v_{17}, v_{18}\}$
24	$c_{26} = \{e_1, e_2, e_5, e_{16}, e_{37}, e_{39}, e_{41}\} \rightarrow \{v_1, v_2, v_8, v_{31}, v_{30}, v_{19}, v_{20}\}$
25	$c_2 = \{e_1, e_3, e_5, e_{40}, e_{41}, e_{43}\} \rightarrow \{v_1, v_2, v_{29}, v_{31}, v_{20}, v_{21}\}$
26	$c_6 = \{e_1, e_3, e_4, e_6, e_9, e_{42}, e_{43}, e_{44}\} \rightarrow \{v_1, v_2, v_{29}, v_3, v_4, v_{23}, v_{21}, v_{22}\}$
27	$c_{29} = \{e_{18}, e_{19}, e_{36}, e_{37}, e_{39}, e_{40}, e_{43}\} \rightarrow \{v_9, v_{18}, v_{30}, v_{29}, v_{19}, v_{20}, v_{21}\}$
28	$c_3 = \{e_2, e_3, e_{16}, e_{18}, e_{19}, e_{36}\} \rightarrow \{v_1, v_8, v_{29}, v_{30}, v_9, v_{18}\}$
29	$c_{13} = \{e_2, e_3, e_{12}, e_{13}, e_{14}, e_{42}, e_{43}, e_{45}\} \rightarrow \{v_1, v_8, v_{29}, v_6, v_7, v_{34}, v_{21}, v_{22}\}$
30	$c_{27} = \{e_2, e_3, e_{16}, e_{37}, e_{39}, e_{40}, e_{43}\} \rightarrow \{v_1, v_8, v_{29}, v_{30}, v_{19}, v_{20}, v_{21}\}$

Образует следующую систему зависимых циклов.

$$\left\{ \begin{array}{l} c_{10} \oplus c_9 \oplus c_8 = \emptyset; \\ c_{14} \oplus c_9 \oplus c_8 \oplus c_{12} \oplus c_{17} \oplus c_{18} \oplus c_{30} \oplus c_{32} \oplus c_{19} \oplus c_{33} \oplus c_{11} = \emptyset; \\ c_{15} \oplus c_{30} \oplus c_9 \oplus c_8 \oplus c_{12} \oplus c_{18} \oplus c_{32} \oplus c_{19} \oplus c_{33} \oplus c_{11} = \emptyset; \\ c_{26} \oplus c_{30} \oplus c_8 \oplus c_{11} \oplus c_1 \oplus c_{28} \oplus c_{21} \oplus c_{18} \oplus c_{20} \oplus c_9 \oplus c_{12} \oplus c_{17} \oplus c_{32} \oplus c_{33} = \emptyset; \\ c_2 \oplus c_{16} \oplus c_7 \oplus c_{21} \oplus c_{20} \oplus c_9 \oplus c_{12} \oplus c_{24} = \emptyset; \\ c_6 \oplus c_{16} \oplus c_{21} \oplus c_{20} \oplus c_9 \oplus c_{12} \oplus c_{24} = \emptyset; \\ c_{29} \oplus c_{16} \oplus c_1 \oplus c_7 \oplus c_{28} \oplus c_{21} \oplus c_{20} \oplus c_9 \oplus c_{12} \oplus c_{24} = \emptyset; \\ c_3 \oplus c_{21} \oplus c_{18} \oplus c_{20} \oplus c_9 \oplus c_8 \oplus c_{12} \oplus c_{17} \oplus c_{30} \oplus c_{32} \oplus c_{19} \oplus c_{33} \oplus c_{11} = \emptyset; \\ c_{13} \oplus c_{16} \oplus c_{21} \oplus c_{20} \oplus c_{12} = \emptyset; \\ c_{27} \oplus c_{16} \oplus c_8 \oplus c_{30} \oplus c_{11} \oplus c_1 \oplus c_7 \oplus c_{28} \oplus c_{18} \oplus c_{17} \oplus c_{32} \oplus c_{19} \oplus c_{33} \oplus c_{24} = \emptyset. \end{array} \right.$$

Формируем множество накрывающихся циклов: c_{11} и c_{17} . Удаляем накрывающиеся циклы из множества изометрических циклов.

Образуем новый кортеж изометрических циклов K_r^{**} , расставляя циклы в порядке не воз-

вращения их весов:

№	Множество изометрических циклов графа:
1	$c_{33} = \{e_{48}, e_{49}, e_{50}, e_{53}\} \rightarrow \{v_{25}, v_{26}, v_{33}, v_{27}\}$
2	$c_{22} = \{e_{28}, e_{29}, e_{30}, e_{33}\} \rightarrow \{v_{14}, v_{15}, v_{35}, v_{16}\}$
3	$c_{19} = \{e_{24}, e_{25}, e_{27}, e_{52}, e_{53}, e_{54}\} \rightarrow \{v_{12}, v_{13}, v_{33}, v_{32}, v_{27}, v_{28}\}$
4	$c_8 = \{e_8, e_9, e_{11}, e_{46}\} \rightarrow \{v_4, v_5, v_{23}, v_{24}\}$
5	$c_{18} = \{e_{20}, e_{21}, e_{22}, e_{24}, e_{27}\} \rightarrow \{v_{10}, v_{11}, v_{32}, v_{12}, v_{13}\}$
6	$c_4 = \{e_4, e_5, e_7, e_{32}, e_{33}, e_{35}\} \rightarrow \{v_2, v_3, v_{31}, v_{35}, v_{16}, v_{17}\}$
7	$c_{30} = \{e_{38}, e_{39}, e_{50}, e_{51}, e_{52}\} \rightarrow \{v_{19}, v_{28}, v_{30}, v_{26}, v_{27}\}$
8	$c_{32} = \{e_{22}, e_{23}, e_{25}, e_{44}, e_{45}, e_{46}, e_{47}, e_{49}\} \rightarrow \{v_{11}, v_{12}, v_{34}, v_{33}, v_{22}, v_{23}, v_{24}, v_{25}\}$
9	$c_{23} = \{e_{30}, e_{31}, e_{32}, e_{34}, e_{36}\} \rightarrow \{v_{15}, v_{16}, v_{29}, v_{17}, v_{18}\}$
10	$c_{12} = \{e_{12}, e_{13}, e_{15}, e_{20}, e_{21}, e_{23}\} \rightarrow \{v_6, v_7, v_{34}, v_{32}, v_{10}, v_{11}\}$
11	$c_{10} = \{e_{10}, e_{11}, e_{13}, e_{44}, e_{45}, e_{46}\} \rightarrow \{v_5, v_6, v_{24}, v_{34}, v_{22}, v_{23}\}$
12	$c_{17} = \{e_{17}, e_{19}, e_{21}, e_{38}, e_{39}, e_{54}\} \rightarrow \{v_9, v_{10}, v_{30}, v_{32}, v_{19}, v_{28}\}$
13	$c_{11} = \{e_{10}, e_{11}, e_{12}, e_{14}, e_{16}, e_{47}, e_{48}, e_{51}\} \rightarrow \{v_5, v_6, v_{24}, v_7, v_8, v_{30}, v_{25}, v_{26}\}$
14	$c_7 = \{e_4, e_5, e_6, e_9, e_{40}, e_{41}, e_{42}, e_{44}\} \rightarrow \{v_2, v_3, v_{31}, v_4, v_{23}, v_{20}, v_{21}, v_{22}\}$
15	$c_{14} = \{e_{14}, e_{15}, e_{16}, e_{17}, e_{19}, e_{21}\} \rightarrow \{v_7, v_8, v_{32}, v_{30}, v_9, v_{10}\}$
16	$c_{15} = \{e_{14}, e_{15}, e_{16}, e_{38}, e_{39}, e_{54}\} \rightarrow \{v_7, v_8, v_{32}, v_{30}, v_{19}, v_{28}\}$
17	$c_{28} = \{e_{18}, e_{19}, e_{34}, e_{35}, e_{37}, e_{39}, e_{41}\} \rightarrow \{v_9, v_{18}, v_{30}, v_{17}, v_{31}, v_{19}, v_{20}\}$
18	$c_{24} = \{e_1, e_3, e_4, e_7, e_{28}, e_{29}, e_{31}\} \rightarrow \{v_1, v_2, v_{29}, v_3, v_{35}, v_{14}, v_{15}\}$
19	$c_{21} = \{e_{17}, e_{18}, e_{21}, e_{26}, e_{27}, e_{28}, e_{31}, e_{36}\} \rightarrow \{v_9, v_{10}, v_{18}, v_{32}, v_{13}, v_{14}, v_{15}, v_{29}\}$
20	$c_{20} = \{e_2, e_3, e_{14}, e_{15}, e_{26}, e_{27}, e_{28}, e_{31}\} \rightarrow \{v_1, v_8, v_{29}, v_7, v_{32}, v_{13}, v_{14}, v_{15}\}$
21	$c_1 = \{e_1, e_3, e_5, e_{34}, e_{35}, e_{36}\} \rightarrow \{v_1, v_2, v_{29}, v_{31}, v_{17}, v_{18}\}$
22	$c_{26} = \{e_1, e_2, e_5, e_{16}, e_{37}, e_{39}, e_{41}\} \rightarrow \{v_1, v_2, v_8, v_{31}, v_{30}, v_{19}, v_{20}\}$
23	$c_2 = \{e_1, e_3, e_5, e_{40}, e_{41}, e_{43}\} \rightarrow \{v_1, v_2, v_{29}, v_{31}, v_{20}, v_{21}\}$
24	$c_6 = \{e_1, e_3, e_4, e_6, e_9, e_{42}, e_{43}, e_{44}\} \rightarrow \{v_1, v_2, v_{29}, v_3, v_4, v_{23}, v_{21}, v_{22}\}$
25	$c_{29} = \{e_{18}, e_{19}, e_{36}, e_{37}, e_{39}, e_{40}, e_{43}\} \rightarrow \{v_9, v_{18}, v_{30}, v_{29}, v_{19}, v_{20}, v_{21}\}$
26	$c_3 = \{e_2, e_3, e_{16}, e_{18}, e_{19}, e_{36}\} \rightarrow \{v_1, v_8, v_{29}, v_{30}, v_9, v_{18}\}$
27	$c_{13} = \{e_2, e_3, e_{12}, e_{13}, e_{14}, e_{42}, e_{43}, e_{45}\} \rightarrow \{v_1, v_8, v_{29}, v_6, v_7, v_{34}, v_{21}, v_{22}\}$
28	$c_{27} = \{e_2, e_3, e_{16}, e_{37}, e_{39}, e_{40}, e_{43}\} \rightarrow \{v_1, v_8, v_{29}, v_{30}, v_{19}, v_{20}, v_{21}\}$

Образуем следующую систему зависимых циклов:

$$\left\{ \begin{array}{l} c_{14} \oplus c_{10} \oplus c_{12} \oplus c_{17} \oplus c_{18} \oplus c_{30} \oplus c_{32} \oplus c_{19} \oplus c_{33} \oplus c_{11} = \emptyset; \\ c_{15} \oplus c_{30} \oplus c_{10} \oplus c_{12} \oplus c_{18} \oplus c_{30} \oplus c_{19} \oplus c_{33} \oplus c_{11} = \emptyset; \\ c_{26} \oplus c_{30} \oplus c_{11} \oplus c_1 \oplus c_{28} \oplus c_{21} \oplus c_{18} \oplus c_{20} \oplus c_{10} \oplus c_{12} \oplus c_{17} \oplus c_{32} \oplus c_{19} \oplus c_{33} = \emptyset; \\ c_6 \oplus c_7 \oplus c_2 = \emptyset; \\ c_{29} \oplus c_{28} \oplus c_2 \oplus c_1 = \emptyset; \\ c_3 \oplus c_{21} \oplus c_{18} \oplus c_{20} \oplus c_{10} \oplus c_{12} \oplus c_{17} \oplus c_{30} \oplus c_{32} \oplus c_{19} \oplus c_{33} \oplus c_{11} = \emptyset; \\ c_{13} \oplus c_7 \oplus c_8 \oplus c_{10} \oplus c_{24} \oplus c_2 = \emptyset; \\ c_{27} \oplus c_{28} \oplus c_{21} \oplus c_{18} \oplus c_{20} \oplus c_{10} \oplus c_{12} \oplus c_{17} \oplus c_{30} \oplus c_{32} \oplus c_{19} \oplus c_{33} \oplus c_{11} \oplus c_2 \oplus c_1 = \emptyset. \end{array} \right.$$

Формируем множество накрывающихся циклов: c_{10} и c_2 . Удаляем накрывающиеся циклы из множества изометрических циклов.

Образуем новый кортеж изометрических циклов K_r^{***} , расставляя циклы в порядке не

возвращения их весов:

№	Множество изометрических циклов графа:
1	$c_{33} = \{e_{48}, e_{49}, e_{50}, e_{53}\} \rightarrow \{v_{25}, v_{26}, v_{33}, v_{27}\}$

2	$c_{22} = \{e_{28}, e_{29}, e_{30}, e_{33}\} \rightarrow \{v_{14}, v_{15}, v_{35}, v_{16}\}$
3	$c_{19} = \{e_{24}, e_{25}, e_{27}, e_{52}, e_{53}, e_{54}\} \rightarrow \{v_{12}, v_{13}, v_{33}, v_{32}, v_{27}, v_{28}\}$
4	$c_8 = \{e_8, e_9, e_{11}, e_{46}\} \rightarrow \{v_4, v_5, v_{23}, v_{24}\}$
5	$c_{18} = \{e_{20}, e_{21}, e_{22}, e_{24}, e_{27}\} \rightarrow \{v_{10}, v_{11}, v_{32}, v_{12}, v_{13}\}$
6	$c_4 = \{e_4, e_5, e_7, e_{32}, e_{33}, e_{35}\} \rightarrow \{v_2, v_3, v_{31}, v_{35}, v_{16}, v_{17}\}$
7	$c_{30} = \{e_{38}, e_{39}, e_{50}, e_{51}, e_{52}\} \rightarrow \{v_{19}, v_{28}, v_{30}, v_{26}, v_{27}\}$
8	$c_{32} = \{e_{22}, e_{23}, e_{25}, e_{44}, e_{45}, e_{46}, e_{47}, e_{49}\} \rightarrow \{v_{11}, v_{12}, v_{34}, v_{33}, v_{22}, v_{23}, v_{24}, v_{25}\}$
9	$c_{23} = \{e_{30}, e_{31}, e_{32}, e_{34}, e_{36}\} \rightarrow \{v_{15}, v_{16}, v_{29}, v_{17}, v_{18}\}$
10	$c_{12} = \{e_{12}, e_{13}, e_{15}, e_{20}, e_{21}, e_{23}\} \rightarrow \{v_6, v_7, v_{34}, v_{32}, v_{10}, v_{11}\}$
11	$c_{17} = \{e_{17}, e_{19}, e_{21}, e_{38}, e_{39}, e_{54}\} \rightarrow \{v_9, v_{10}, v_{30}, v_{32}, v_{19}, v_{28}\}$
12	$c_{11} = \{e_{10}, e_{11}, e_{12}, e_{14}, e_{16}, e_{47}, e_{48}, e_{51}\} \rightarrow \{v_5, v_6, v_{24}, v_7, v_8, v_{30}, v_{25}, v_{26}\}$
13	$c_7 = \{e_4, e_5, e_6, e_9, e_{40}, e_{41}, e_{42}, e_{44}\} \rightarrow \{v_2, v_3, v_{31}, v_4, v_{23}, v_{20}, v_{21}, v_{22}\}$
14	$c_{14} = \{e_{14}, e_{15}, e_{16}, e_{17}, e_{19}, e_{21}\} \rightarrow \{v_7, v_8, v_{32}, v_{30}, v_9, v_{10}\}$
15	$c_{15} = \{e_{14}, e_{15}, e_{16}, e_{38}, e_{39}, e_{54}\} \rightarrow \{v_7, v_8, v_{32}, v_{30}, v_{19}, v_{28}\}$
16	$c_{28} = \{e_{18}, e_{19}, e_{34}, e_{35}, e_{37}, e_{39}, e_{41}\} \rightarrow \{v_9, v_{18}, v_{30}, v_{17}, v_{31}, v_{19}, v_{20}\}$
17	$c_{24} = \{e_1, e_3, e_4, e_7, e_{28}, e_{29}, e_{31}\} \rightarrow \{v_1, v_2, v_{29}, v_3, v_{35}, v_{14}, v_{15}\}$
18	$c_{21} = \{e_{17}, e_{18}, e_{21}, e_{26}, e_{27}, e_{28}, e_{31}, e_{36}\} \rightarrow \{v_9, v_{10}, v_{18}, v_{32}, v_{13}, v_{14}, v_{15}, v_{29}\}$
19	$c_{20} = \{e_2, e_3, e_{14}, e_{15}, e_{26}, e_{27}, e_{28}, e_{31}\} \rightarrow \{v_1, v_8, v_{29}, v_7, v_{32}, v_{13}, v_{14}, v_{15}\}$
20	$c_1 = \{e_1, e_3, e_5, e_{34}, e_{35}, e_{36}\} \rightarrow \{v_1, v_2, v_{29}, v_{31}, v_{17}, v_{18}\}$
21	$c_{26} = \{e_1, e_2, e_5, e_{16}, e_{37}, e_{39}, e_{41}\} \rightarrow \{v_1, v_2, v_8, v_{31}, v_{30}, v_{19}, v_{20}\}$
22	$c_6 = \{e_1, e_3, e_4, e_6, e_9, e_{42}, e_{43}, e_{44}\} \rightarrow \{v_1, v_2, v_{29}, v_3, v_4, v_{23}, v_{21}, v_{22}\}$
23	$c_{29} = \{e_{18}, e_{19}, e_{36}, e_{37}, e_{39}, e_{40}, e_{43}\} \rightarrow \{v_9, v_{18}, v_{30}, v_{29}, v_{19}, v_{20}, v_{21}\}$
24	$c_3 = \{e_2, e_3, e_{16}, e_{18}, e_{19}, e_{36}\} \rightarrow \{v_1, v_8, v_{29}, v_{30}, v_9, v_{18}\}$
25	$c_{13} = \{e_2, e_3, e_{12}, e_{13}, e_{14}, e_{42}, e_{43}, e_{45}\} \rightarrow \{v_1, v_8, v_{29}, v_6, v_7, v_{34}, v_{21}, v_{22}\}$
26	$c_{27} = \{e_2, e_3, e_{16}, e_{37}, e_{39}, e_{40}, e_{43}\} \rightarrow \{v_1, v_8, v_{29}, v_{30}, v_{19}, v_{20}, v_{21}\}$

Образует следующую систему зависимых циклов:

$$\left\{ \begin{array}{l} c_{15} \oplus c_{14} \oplus c_{17} = \emptyset; \\ c_{26} \oplus c_1 \oplus c_{28} \oplus c_{21} \oplus c_{20} \oplus c_{14} = \emptyset; \\ c_{29} \oplus c_6 \oplus c_1 \oplus c_7 \oplus c_{28} = \emptyset; \\ c_3 \oplus c_{21} \oplus c_{20} \oplus c_{14} = \emptyset; \\ c_{13} \oplus c_{12} \oplus c_{32} \oplus c_{19} \oplus c_{33} \oplus c_{30} \oplus c_8 \oplus c_{11} \oplus c_{24} \oplus c_6 \oplus c_{17} \oplus c_{18} \oplus c_{14} = \emptyset; \\ c_{27} \oplus c_{20} \oplus c_6 \oplus c_1 \oplus c_7 \oplus c_{28} \oplus c_{21} \oplus c_{14} = \emptyset. \end{array} \right.$$

Формируем множество накрывающихся циклов: c_{14} и c_6 . Удаляем накрывающиеся циклы из множества изометрических циклов.

Образует новый кортеж изометрических циклов, расставляя циклы в порядке не возрастания их весов:

№	Множество изометрических циклов графа:
1	$c_{33} = \{e_{48}, e_{49}, e_{50}, e_{53}\} \rightarrow \{v_{25}, v_{26}, v_{33}, v_{27}\}$
2	$c_{22} = \{e_{28}, e_{29}, e_{30}, e_{33}\} \rightarrow \{v_{14}, v_{15}, v_{35}, v_{16}\}$
3	$c_{19} = \{e_{24}, e_{25}, e_{27}, e_{52}, e_{53}, e_{54}\} \rightarrow \{v_{12}, v_{13}, v_{33}, v_{32}, v_{27}, v_{28}\}$
4	$c_8 = \{e_8, e_9, e_{11}, e_{46}\} \rightarrow \{v_4, v_5, v_{23}, v_{24}\}$
5	$c_{18} = \{e_{20}, e_{21}, e_{22}, e_{24}, e_{27}\} \rightarrow \{v_{10}, v_{11}, v_{32}, v_{12}, v_{13}\}$
6	$c_4 = \{e_4, e_5, e_7, e_{32}, e_{33}, e_{35}\} \rightarrow \{v_2, v_3, v_{31}, v_{35}, v_{16}, v_{17}\}$
7	$c_{30} = \{e_{38}, e_{39}, e_{50}, e_{51}, e_{52}\} \rightarrow \{v_{19}, v_{28}, v_{30}, v_{26}, v_{27}\}$
8	$c_{32} = \{e_{22}, e_{23}, e_{25}, e_{44}, e_{45}, e_{46}, e_{47}, e_{49}\} \rightarrow \{v_{11}, v_{12}, v_{34}, v_{33}, v_{22}, v_{23}, v_{24}, v_{25}\}$
9	$c_{23} = \{e_{30}, e_{31}, e_{32}, e_{34}, e_{36}\} \rightarrow \{v_{15}, v_{16}, v_{29}, v_{17}, v_{18}\}$
10	$c_{12} = \{e_{12}, e_{13}, e_{15}, e_{20}, e_{21}, e_{23}\} \rightarrow \{v_6, v_7, v_{34}, v_{32}, v_{10}, v_{11}\}$
11	$c_{17} = \{e_{17}, e_{19}, e_{21}, e_{38}, e_{39}, e_{54}\} \rightarrow \{v_9, v_{10}, v_{30}, v_{32}, v_{19}, v_{28}\}$
12	$c_{11} = \{e_{10}, e_{11}, e_{12}, e_{14}, e_{16}, e_{47}, e_{48}, e_{51}\} \rightarrow \{v_5, v_6, v_{24}, v_7, v_8, v_{30}, v_{25}, v_{26}\}$

13	$c_7 = \{e_4, e_5, e_6, e_9, e_{40}, e_{41}, e_{42}, e_{44}\} \rightarrow \{v_2, v_3, v_{31}, v_4, v_{23}, v_{20}, v_{21}, v_{22}\}$
14	$c_{15} = \{e_{14}, e_{15}, e_{16}, e_{38}, e_{39}, e_{54}\} \rightarrow \{v_7, v_8, v_{32}, v_{30}, v_{19}, v_{28}\}$
15	$c_{28} = \{e_{18}, e_{19}, e_{34}, e_{35}, e_{37}, e_{39}, e_{41}\} \rightarrow \{v_9, v_{18}, v_{30}, v_{17}, v_{31}, v_{19}, v_{20}\}$
16	$c_{24} = \{e_1, e_3, e_4, e_7, e_{28}, e_{29}, e_{31}\} \rightarrow \{v_1, v_2, v_{29}, v_3, v_{35}, v_{14}, v_{15}\}$
17	$c_{21} = \{e_{17}, e_{18}, e_{21}, e_{26}, e_{27}, e_{28}, e_{31}, e_{36}\} \rightarrow \{v_9, v_{10}, v_{18}, v_{32}, v_{13}, v_{14}, v_{15}, v_{29}\}$
18	$c_{20} = \{e_2, e_3, e_{14}, e_{15}, e_{26}, e_{27}, e_{28}, e_{31}\} \rightarrow \{v_1, v_8, v_{29}, v_7, v_{32}, v_{13}, v_{14}, v_{15}\}$
19	$c_1 = \{e_1, e_3, e_5, e_{34}, e_{35}, e_{36}\} \rightarrow \{v_1, v_2, v_{29}, v_{31}, v_{17}, v_{18}\}$
20	$c_{26} = \{e_1, e_2, e_5, e_{16}, e_{37}, e_{39}, e_{41}\} \rightarrow \{v_1, v_2, v_8, v_{31}, v_{30}, v_{19}, v_{20}\}$
21	$c_{29} = \{e_{18}, e_{19}, e_{36}, e_{37}, e_{39}, e_{40}, e_{43}\} \rightarrow \{v_9, v_{18}, v_{30}, v_{29}, v_{19}, v_{20}, v_{21}\}$
22	$c_3 = \{e_2, e_3, e_{16}, e_{18}, e_{19}, e_{36}\} \rightarrow \{v_1, v_8, v_{29}, v_{30}, v_9, v_{18}\}$
23	$c_{13} = \{e_2, e_3, e_{12}, e_{13}, e_{14}, e_{42}, e_{43}, e_{45}\} \rightarrow \{v_1, v_8, v_{29}, v_6, v_7, v_{34}, v_{21}, v_{22}\}$
24	$c_{27} = \{e_2, e_3, e_{16}, e_{37}, e_{39}, e_{40}, e_{43}\} \rightarrow \{v_1, v_8, v_{29}, v_{30}, v_{19}, v_{20}, v_{21}\}$

Образует следующую систему зависимых циклов:

$$\left\{ \begin{array}{l} c_{26} \oplus c_1 \oplus c_{28} \oplus c_{21} \oplus c_{20} \oplus c_{17} \oplus c_{15} = \emptyset; \\ c_3 \oplus c_{21} \oplus c_{20} \oplus c_{17} \oplus c_{15} = \emptyset; \\ c_{13} \oplus c_{12} \oplus c_{32} \oplus c_{19} \oplus c_{33} \oplus c_1 \oplus c_{30} \oplus c_7 \oplus c_8 \oplus c_{11} \oplus c_{28} \oplus c_{24} \oplus c_{29} \oplus c_{15} \oplus c_{18} = \emptyset; \\ c_{27} \oplus c_{20} \oplus c_{17} \oplus c_{29} \oplus c_{15} \oplus c_{21} = \emptyset. \end{array} \right.$$

Формируем множество накрывающихся циклов состоящее из цикла c_{15} . Удаляем накрывающиеся циклы из множества изометрических циклов.

Образует новый кортеж изометрических циклов, располагая циклы в порядке не возрастания их весов:

№	Множество изометрических циклов графа:
1	$c_{33} = \{e_{48}, e_{49}, e_{50}, e_{53}\} \rightarrow \{v_{25}, v_{26}, v_{33}, v_{27}\}$
2	$c_{22} = \{e_{28}, e_{29}, e_{30}, e_{33}\} \rightarrow \{v_{14}, v_{15}, v_{35}, v_{16}\}$
3	$c_{19} = \{e_{24}, e_{25}, e_{27}, e_{52}, e_{53}, e_{54}\} \rightarrow \{v_{12}, v_{13}, v_{33}, v_{32}, v_{27}, v_{28}\}$
4	$c_8 = \{e_8, e_9, e_{11}, e_{46}\} \rightarrow \{v_4, v_5, v_{23}, v_{24}\}$
5	$c_{18} = \{e_{20}, e_{21}, e_{22}, e_{24}, e_{27}\} \rightarrow \{v_{10}, v_{11}, v_{32}, v_{12}, v_{13}\}$
6	$c_4 = \{e_4, e_5, e_7, e_{32}, e_{33}, e_{35}\} \rightarrow \{v_2, v_3, v_{31}, v_{35}, v_{16}, v_{17}\}$
7	$c_{30} = \{e_{38}, e_{39}, e_{50}, e_{51}, e_{52}\} \rightarrow \{v_{19}, v_{28}, v_{30}, v_{26}, v_{27}\}$
8	$c_{32} = \{e_{22}, e_{23}, e_{25}, e_{44}, e_{45}, e_{46}, e_{47}, e_{49}\} \rightarrow \{v_{11}, v_{12}, v_{34}, v_{33}, v_{22}, v_{23}, v_{24}, v_{25}\}$
9	$c_{23} = \{e_{30}, e_{31}, e_{32}, e_{34}, e_{36}\} \rightarrow \{v_{15}, v_{16}, v_{29}, v_{17}, v_{18}\}$
10	$c_{12} = \{e_{12}, e_{13}, e_{15}, e_{20}, e_{21}, e_{23}\} \rightarrow \{v_6, v_7, v_{34}, v_{32}, v_{10}, v_{11}\}$
11	$c_{17} = \{e_{17}, e_{19}, e_{21}, e_{38}, e_{39}, e_{54}\} \rightarrow \{v_9, v_{10}, v_{30}, v_{32}, v_{19}, v_{28}\}$
12	$c_{11} = \{e_{10}, e_{11}, e_{12}, e_{14}, e_{16}, e_{47}, e_{48}, e_{51}\} \rightarrow \{v_5, v_6, v_{24}, v_7, v_8, v_{30}, v_{25}, v_{26}\}$
13	$c_7 = \{e_4, e_5, e_6, e_9, e_{40}, e_{41}, e_{42}, e_{44}\} \rightarrow \{v_2, v_3, v_{31}, v_4, v_{23}, v_{20}, v_{21}, v_{22}\}$
14	$c_{28} = \{e_{18}, e_{19}, e_{34}, e_{35}, e_{37}, e_{39}, e_{41}\} \rightarrow \{v_9, v_{18}, v_{30}, v_{17}, v_{31}, v_{19}, v_{20}\}$
15	$c_{24} = \{e_1, e_3, e_4, e_7, e_{28}, e_{29}, e_{31}\} \rightarrow \{v_1, v_2, v_{29}, v_3, v_{35}, v_{14}, v_{15}\}$
16	$c_{21} = \{e_{17}, e_{18}, e_{21}, e_{26}, e_{27}, e_{28}, e_{31}, e_{36}\} \rightarrow \{v_9, v_{10}, v_{18}, v_{32}, v_{13}, v_{14}, v_{15}, v_{29}\}$
17	$c_{20} = \{e_2, e_3, e_{14}, e_{15}, e_{26}, e_{27}, e_{28}, e_{31}\} \rightarrow \{v_1, v_8, v_{29}, v_7, v_{32}, v_{13}, v_{14}, v_{15}\}$
18	$c_1 = \{e_1, e_3, e_5, e_{34}, e_{35}, e_{36}\} \rightarrow \{v_1, v_2, v_{29}, v_{31}, v_{17}, v_{18}\}$
19	$c_{26} = \{e_1, e_2, e_5, e_{16}, e_{37}, e_{39}, e_{41}\} \rightarrow \{v_1, v_2, v_8, v_{31}, v_{30}, v_{19}, v_{20}\}$
20	$c_{29} = \{e_{18}, e_{19}, e_{36}, e_{37}, e_{39}, e_{40}, e_{43}\} \rightarrow \{v_9, v_{18}, v_{30}, v_{29}, v_{19}, v_{20}, v_{21}\}$
21	$c_3 = \{e_2, e_3, e_{16}, e_{18}, e_{19}, e_{36}\} \rightarrow \{v_1, v_8, v_{29}, v_{30}, v_9, v_{18}\}$
22	$c_{13} = \{e_2, e_3, e_{12}, e_{13}, e_{14}, e_{42}, e_{43}, e_{45}\} \rightarrow \{v_1, v_8, v_{29}, v_6, v_7, v_{34}, v_{21}, v_{22}\}$
23	$c_{27} = \{e_2, e_3, e_{16}, e_{37}, e_{39}, e_{40}, e_{43}\} \rightarrow \{v_1, v_8, v_{29}, v_{30}, v_{19}, v_{20}, v_{21}\}$

Образует следующую систему зависимых циклов:

$$\left\{ \begin{array}{l} c_3 \oplus c_{26} \oplus c_1 \oplus c_{28} = \emptyset; \\ c_{13} \oplus c_{12} \oplus c_{32} \oplus c_{19} \oplus c_{33} \oplus c_{24} \oplus c_{30} \oplus c_7 \oplus c_8 \oplus c_{11} \oplus c_{21} \oplus c_{29} \oplus c_{20} \oplus c_{17} \oplus c_{26} \oplus c_{18} = \emptyset; \\ c_{27} \oplus c_{29} \oplus c_{26} \oplus c_1 \oplus c_{28} = \emptyset. \end{array} \right.$$

Формируем множество накрывающихся циклов состоящее из цикла c_{26} . Удаляем накрывающиеся циклы из множества изометрических циклов.

Образуем новый кортеж изометрических циклов, расставляя циклы в порядке не возрастания их весов:

№	Множество изометрических циклов графа:
1	$c_{33} = \{e_{48}, e_{49}, e_{50}, e_{53}\} \rightarrow \{v_{25}, v_{26}, v_{33}, v_{27}\}$
2	$c_{22} = \{e_{28}, e_{29}, e_{30}, e_{33}\} \rightarrow \{v_{14}, v_{15}, v_{35}, v_{16}\}$
3	$c_{19} = \{e_{24}, e_{25}, e_{27}, e_{52}, e_{53}, e_{54}\} \rightarrow \{v_{12}, v_{13}, v_{33}, v_{32}, v_{27}, v_{28}\}$
4	$c_8 = \{e_8, e_9, e_{11}, e_{46}\} \rightarrow \{v_4, v_5, v_{23}, v_{24}\}$
5	$c_{18} = \{e_{20}, e_{21}, e_{22}, e_{24}, e_{27}\} \rightarrow \{v_{10}, v_{11}, v_{32}, v_{12}, v_{13}\}$
6	$c_4 = \{e_4, e_5, e_7, e_{32}, e_{33}, e_{35}\} \rightarrow \{v_2, v_3, v_{31}, v_{35}, v_{16}, v_{17}\}$
7	$c_{30} = \{e_{38}, e_{39}, e_{50}, e_{51}, e_{52}\} \rightarrow \{v_{19}, v_{28}, v_{30}, v_{26}, v_{27}\}$
8	$c_{32} = \{e_{22}, e_{23}, e_{25}, e_{44}, e_{45}, e_{46}, e_{47}, e_{49}\} \rightarrow \{v_{11}, v_{12}, v_{34}, v_{33}, v_{22}, v_{23}, v_{24}, v_{25}\}$
9	$c_{23} = \{e_{30}, e_{31}, e_{32}, e_{34}, e_{36}\} \rightarrow \{v_{15}, v_{16}, v_{29}, v_{17}, v_{18}\}$
10	$c_{12} = \{e_{12}, e_{13}, e_{15}, e_{20}, e_{21}, e_{23}\} \rightarrow \{v_6, v_7, v_{34}, v_{32}, v_{10}, v_{11}\}$
11	$c_{17} = \{e_{17}, e_{19}, e_{21}, e_{38}, e_{39}, e_{54}\} \rightarrow \{v_9, v_{10}, v_{30}, v_{32}, v_{19}, v_{28}\}$
12	$c_{11} = \{e_{10}, e_{11}, e_{12}, e_{14}, e_{16}, e_{47}, e_{48}, e_{51}\} \rightarrow \{v_5, v_6, v_{24}, v_7, v_8, v_{30}, v_{25}, v_{26}\}$
13	$c_7 = \{e_4, e_5, e_6, e_9, e_{40}, e_{41}, e_{42}, e_{44}\} \rightarrow \{v_2, v_3, v_{31}, v_4, v_{23}, v_{20}, v_{21}, v_{22}\}$
14	$c_{28} = \{e_{18}, e_{19}, e_{34}, e_{35}, e_{37}, e_{39}, e_{41}\} \rightarrow \{v_9, v_{18}, v_{30}, v_{17}, v_{31}, v_{19}, v_{20}\}$
15	$c_{24} = \{e_1, e_3, e_4, e_7, e_{28}, e_{29}, e_{31}\} \rightarrow \{v_1, v_2, v_{29}, v_3, v_{35}, v_{14}, v_{15}\}$
16	$c_{21} = \{e_{17}, e_{18}, e_{21}, e_{26}, e_{27}, e_{28}, e_{31}, e_{36}\} \rightarrow \{v_9, v_{10}, v_{18}, v_{32}, v_{13}, v_{14}, v_{15}, v_{29}\}$
17	$c_{20} = \{e_2, e_3, e_{14}, e_{15}, e_{26}, e_{27}, e_{28}, e_{31}\} \rightarrow \{v_1, v_8, v_{29}, v_7, v_{32}, v_{13}, v_{14}, v_{15}\}$
18	$c_1 = \{e_1, e_3, e_5, e_{34}, e_{35}, e_{36}\} \rightarrow \{v_1, v_2, v_{29}, v_{31}, v_{17}, v_{18}\}$
19	$c_{29} = \{e_{18}, e_{19}, e_{36}, e_{37}, e_{39}, e_{40}, e_{43}\} \rightarrow \{v_9, v_{18}, v_{30}, v_{29}, v_{19}, v_{20}, v_{21}\}$
20	$c_3 = \{e_2, e_3, e_{16}, e_{18}, e_{19}, e_{36}\} \rightarrow \{v_1, v_8, v_{29}, v_{30}, v_9, v_{18}\}$
21	$c_{13} = \{e_2, e_3, e_{12}, e_{13}, e_{14}, e_{42}, e_{43}, e_{45}\} \rightarrow \{v_1, v_8, v_{29}, v_6, v_7, v_{34}, v_{21}, v_{22}\}$
22	$c_{27} = \{e_2, e_3, e_{16}, e_{37}, e_{39}, e_{40}, e_{43}\} \rightarrow \{v_1, v_8, v_{29}, v_{30}, v_{19}, v_{20}, v_{21}\}$

Образуем следующую систему зависимых циклов:

$$\left\{ \begin{array}{l} c_{13} \oplus c_{12} \oplus c_{32} \oplus c_{19} \oplus c_{33} \oplus c_{24} \oplus c_1 \oplus c_{28} \oplus c_{30} \oplus c_7 \oplus c_8 \oplus c_{11} \oplus c_{21} \oplus c_3 \oplus c_{18} \oplus c_{29} \oplus c_{20} \oplus c_{17} = \emptyset; \\ c_{27} \oplus c_3 \oplus c_{29} = \emptyset. \end{array} \right.$$

Формируем множество накрывающихся циклов: c_3 . Удаляем накрывающиеся циклы из множества изометрических циклов.

Образуем новый кортеж изометрических циклов, расставляя циклы в порядке не возрастания их весов:

№	Множество изометрических циклов графа:
1	$c_{33} = \{e_{48}, e_{49}, e_{50}, e_{53}\} \rightarrow \{v_{25}, v_{26}, v_{33}, v_{27}\}$
2	$c_{22} = \{e_{28}, e_{29}, e_{30}, e_{33}\} \rightarrow \{v_{14}, v_{15}, v_{35}, v_{16}\}$
3	$c_{19} = \{e_{24}, e_{25}, e_{27}, e_{52}, e_{53}, e_{54}\} \rightarrow \{v_{12}, v_{13}, v_{33}, v_{32}, v_{27}, v_{28}\}$
4	$c_8 = \{e_8, e_9, e_{11}, e_{46}\} \rightarrow \{v_4, v_5, v_{23}, v_{24}\}$
5	$c_{18} = \{e_{20}, e_{21}, e_{22}, e_{24}, e_{27}\} \rightarrow \{v_{10}, v_{11}, v_{32}, v_{12}, v_{13}\}$
6	$c_4 = \{e_4, e_5, e_7, e_{32}, e_{33}, e_{35}\} \rightarrow \{v_2, v_3, v_{31}, v_{35}, v_{16}, v_{17}\}$
7	$c_{30} = \{e_{38}, e_{39}, e_{50}, e_{51}, e_{52}\} \rightarrow \{v_{19}, v_{28}, v_{30}, v_{26}, v_{27}\}$
8	$c_{32} = \{e_{22}, e_{23}, e_{25}, e_{44}, e_{45}, e_{46}, e_{47}, e_{49}\} \rightarrow \{v_{11}, v_{12}, v_{34}, v_{33}, v_{22}, v_{23}, v_{24}, v_{25}\}$

9	$c_{23} = \{e_{30}, e_{31}, e_{32}, e_{34}, e_{36}\} \rightarrow \{v_{15}, v_{16}, v_{29}, v_{17}, v_{18}\}$
10	$c_{12} = \{e_{12}, e_{13}, e_{15}, e_{20}, e_{21}, e_{23}\} \rightarrow \{v_6, v_7, v_{34}, v_{32}, v_{10}, v_{11}\}$
11	$c_{17} = \{e_{17}, e_{19}, e_{21}, e_{38}, e_{39}, e_{54}\} \rightarrow \{v_9, v_{10}, v_{30}, v_{32}, v_{19}, v_{28}\}$
12	$c_{11} = \{e_{10}, e_{11}, e_{12}, e_{14}, e_{16}, e_{47}, e_{48}, e_{51}\} \rightarrow \{v_5, v_6, v_{24}, v_7, v_8, v_{30}, v_{25}, v_{26}\}$
13	$c_7 = \{e_4, e_5, e_6, e_9, e_{40}, e_{41}, e_{42}, e_{44}\} \rightarrow \{v_2, v_3, v_{31}, v_4, v_{23}, v_{20}, v_{21}, v_{22}\}$
14	$c_{28} = \{e_{18}, e_{19}, e_{34}, e_{35}, e_{37}, e_{39}, e_{41}\} \rightarrow \{v_9, v_{18}, v_{30}, v_{17}, v_{31}, v_{19}, v_{20}\}$
15	$c_{24} = \{e_1, e_3, e_4, e_7, e_{28}, e_{29}, e_{31}\} \rightarrow \{v_1, v_2, v_{29}, v_3, v_{35}, v_{14}, v_{15}\}$
16	$c_{21} = \{e_{17}, e_{18}, e_{21}, e_{26}, e_{27}, e_{28}, e_{31}, e_{36}\} \rightarrow \{v_9, v_{10}, v_{18}, v_{32}, v_{13}, v_{14}, v_{15}, v_{29}\}$
17	$c_{20} = \{e_2, e_3, e_{14}, e_{15}, e_{26}, e_{27}, e_{28}, e_{31}\} \rightarrow \{v_1, v_8, v_{29}, v_7, v_{32}, v_{13}, v_{14}, v_{15}\}$
18	$c_1 = \{e_1, e_3, e_5, e_{34}, e_{35}, e_{36}\} \rightarrow \{v_1, v_2, v_{29}, v_{31}, v_{17}, v_{18}\}$
19	$c_{29} = \{e_{18}, e_{19}, e_{36}, e_{37}, e_{39}, e_{40}, e_{43}\} \rightarrow \{v_9, v_{18}, v_{30}, v_{29}, v_{19}, v_{20}, v_{21}\}$
20	$c_{13} = \{e_2, e_3, e_{12}, e_{13}, e_{14}, e_{42}, e_{43}, e_{45}\} \rightarrow \{v_1, v_8, v_{29}, v_6, v_7, v_{34}, v_{21}, v_{22}\}$
21	$c_{27} = \{e_2, e_3, e_{16}, e_{37}, e_{39}, e_{40}, e_{43}\} \rightarrow \{v_1, v_8, v_{29}, v_{30}, v_{19}, v_{20}, v_{21}\}$

Образует следующую систему зависимых циклов:

$$c_{27} \oplus c_{18} \oplus c_{20} \oplus c_{17} \oplus c_{13} \oplus c_{12} \oplus c_{32} \oplus c_{19} \oplus c_{33} \oplus c_{24} \oplus c_1 \oplus c_{28} \oplus c_{30} \oplus c_7 \oplus c_8 \oplus c_{11} \oplus c_{21} = \emptyset.$$

Удаление любого цикла из последнего зависимого множества циклов образует независимую систему циклов равно цикломатическому числу графа.

Рассмотрим случай удаления цикла c_{27} . Значение функционала Понтрягина-Куратовского равно для базиса = 222.

Удаляем циклы, сохраняя закон Эйлера - при удалении цикла удаляем одно и только одно ребро.

Рассмотрим вектор циклов по ребрам P_e для выделенного базиса. Вектор циклов по ребрам будем представлять в табличном виде, с указанием количества циклов проходящих по ребрам.

e ₁	e ₂	e ₃	e ₄	e ₅	e ₆	e ₇	e ₈	e ₉	e ₁₀	e ₁₁	e ₁₂	e ₁₃	e ₁₄	e ₁₅	e ₁₆	e ₁₇	e ₁₈	e ₁₉	e ₂₀
2	4	4	3	3	2	1	2	2	2	2	4	2	4	2	2	2	3	3	2

e ₂₁	e ₂₂	e ₂₃	e ₂₄	e ₂₅	e ₂₆	e ₂₇	e ₂₈	e ₂₉	e ₃₀	e ₃₁	e ₃₂	e ₃₃	e ₃₄	e ₃₅	e ₃₆	e ₃₇	e ₃₈	e ₃₉	e ₄₀
4	2	2	2	2	2	4	3	1	2	3	2	2	3	3	4	1	2	3	1

e ₄₁	e ₄₂	e ₄₃	e ₄₄	e ₄₅	e ₄₆	e ₄₇	e ₄₈	e ₄₉	e ₅₀	e ₅₁	e ₅₂	e ₅₃	e ₅₄	= 222
2	2	1	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	

Удаляем цикл c_{13} с одновременным удалением ребра e_{43} , при этом значение функционала Понтрягина-Куратовского равно 150.

e ₁	e ₂	e ₃	e ₄	e ₅	e ₆	e ₇	e ₈	e ₉	e ₁₀	e ₁₁	e ₁₂	e ₁₃	e ₁₄	e ₁₅	e ₁₆	e ₁₇	e ₁₈	e ₁₉	e ₂₀
2	3	3	3	3	2	1	2	2	2	2	3	1	3	2	2	2	3	3	2

e ₂₁	e ₂₂	e ₂₃	e ₂₄	e ₂₅	e ₂₆	e ₂₇	e ₂₈	e ₂₉	e ₃₀	e ₃₁	e ₃₂	e ₃₃	e ₃₄	e ₃₅	e ₃₆	e ₃₇	e ₃₈	e ₃₉	e ₄₀
4	2	2	2	2	2	4	3	1	2	3	2	2	3	3	4	1	2	3	1

e ₄₁	e ₄₂	e ₄₃	e ₄₄	e ₄₅	e ₄₆	e ₄₇	e ₄₈	e ₄₉	e ₅₀	e ₅₁	e ₅₂	e ₅₃	e ₅₄	= 150
2	1	0	2	1	2	2	2	2	2	2	2	2	2	

Удаляем цикл c_{28} с одновременным удалением ребра e_{37} , при этом значение функционала Понтрягина-Куратовского равно 120.

e ₁	e ₂	e ₃	e ₄	e ₅	e ₆	e ₇	e ₈	e ₉	e ₁₀	e ₁₁	e ₁₂	e ₁₃	e ₁₄	e ₁₅	e ₁₆	e ₁₇	e ₁₈	e ₁₉	e ₂₀	
2	3	3	3	3	2	1	2	2	2	2	3	1	3	2	2	2	2	2	2	2

e ₂₁	e ₂₂	e ₂₃	e ₂₄	e ₂₅	e ₂₆	e ₂₇	e ₂₈	e ₂₉	e ₃₀	e ₃₁	e ₃₂	e ₃₃	e ₃₄	e ₃₅	e ₃₆	e ₃₇	e ₃₈	e ₃₉	e ₄₀
4	2	2	2	2	2	4	3	1	2	3	2	2	2	2	4	0	2	2	1

e ₄₁	e ₄₂	e ₄₃	e ₄₄	e ₄₅	e ₄₆	e ₄₇	e ₄₈	e ₄₉	e ₅₀	e ₅₁	e ₅₂	e ₅₃	e ₅₄	= 120
1	1	0	2	1	2	2	2	2	2	2	2	2	2	

Удаляем цикл c_{22} с одновременным удалением ребра e_{13} , при этом значение функционала Понтрягина-Куратовского равно 96.

Удаляем цикл c_{20} с одновременным удалением ребра e_{15} , при этом значение функционала Понтрягина-Куратовского равно 48.

Удаляем цикл c_{16} с одновременным удалением ребра e_{26} , при этом значение функционала Понтрягина-Куратовского равно 18.

Удаляем цикл c_4 с одновременным удалением ребра e_7 , при этом значение функционала Понтрягина-Куратовского равно 6.

Удаляем цикл c_1 с одновременным удалением ребра e_{35} , при этом значение функционала Понтрягина-Куратовского равно 0.

Таким образом, выделена плоская часть непланарного графа (см. рис. 3.7).

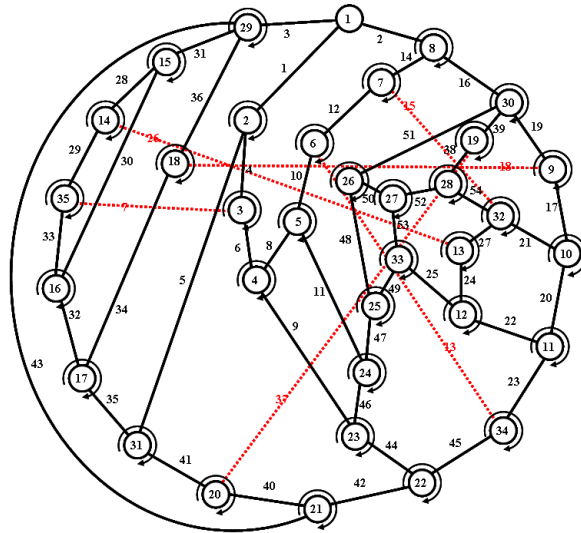


Рис. 3.7. Плоская часть непланарного суграфа.

Рассмотрим случай удаления цикла c_{21} . Значение функционала Понтрягина-Куратовского равно 246.

Удаляем циклы, сохраняя закон Эйлера - при удалении цикла удаляем одно и только одно ребро.

Удаляем цикл c_{20} с одновременным удалением ребра e_{26} , при этом значение функционала Понтрягина-Куратовского равно 150.

Удаляем цикл c_{12} с одновременным удалением ребра e_{15} , при этом значение функционала Понтрягина-Куратовского равно 126.

Удаляем цикл c_{13} с одновременным удалением ребра e_{13} , при этом значение функционала Понтрягина-Куратовского равно 78.

Удаляем цикл c_{27} с одновременным удалением ребра e_{43} , при этом значение функционала Понтрягина-Куратовского равно 42.

Удаляем цикл c_4 с одновременным удалением ребра e_7 , при этом значение функционала Понтрягина-Куратовского равно 24.

Удаляем цикл c_{28} с одновременным удалением ребра e_{37} , при этом значение функционала Понтрягина-Куратовского равно 6.

Удаляем цикл c_1 с одновременным удалением ребра e_{35} , при этом значение функционала Понтрягина-Куратовского равно 0.

Таким образом, выделена плоская часть непланарного графа (см. рис. 3.8).

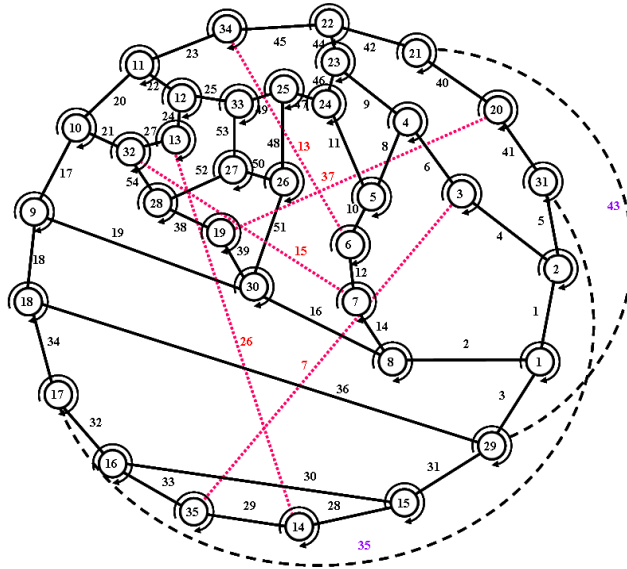


Рис. 3.8. Плоская часть непланарного суграфа.

Обобщим результат вычисления плоской части графа.

Для нашего примера, количество базисов изометрических циклов можно определить равным количеству циклов в последней системе зависимых циклов равное 17. Различные базисы характеризуют различные рисунки плоской части, и в зависимости от обода возможны различные варианты дальнейшего подключения простых циклов. Например, на рис. 6 можно подключить только ребро e_{43} , на рисунке 7 можно подключить или ребро e_{43} или ребро e_{35} . Подключение ребер формирует подключающие к рисунку простые циклы. Например, подключение ребра e_{43} для плоской части рисунка 7 формирует цикл $c_2 = \{e_1, e_3, e_5, e_{40}, e_{41}, e_{43}\}$. А вот подключение ребра e_{35} формирует простой неизометрический цикл $\{e_1, e_3, e_5, e_{28}, e_{29}, e_{31}, e_{32}, e_{33}, e_{35}\}$.

Выводы

Рассмотрен метод сужающихся отображений для построения плоской части топологического рисунка непланарного графа состоящий из трех этапов выделения плоского суграфа.

Глава 4. ДОБАВЛЕНИЕ ПРОСТЫХ ЦИКЛОВ

4.1. Основы векторной алгебры пересечений ребер графа

Рассмотрим методы векторной алгебры для описания пересечений в топологическом рисунке графа, описанные в работах [42-44]. Описание начнем с описания векторов и тензоров. Векторы отличаются от скаляров тем, что имеют не только величину, но и *направление*. Но они являются не единственными величинами, для изучения которых приходится выйти за область скаляров. Векторы можно изучать в какой-либо системе координат и задавать с помощью их координат. Так, например, в пространстве трех измерений вектор a имеет координаты a_1, a_2, a_3 и записывается в виде формулы

$$\bar{a} = a_1i + a_2j + a_3k \text{ или, в иной форме } \bar{a} = (a_1, a_2, a_3).$$

Эта запись является кратким указанием на то, что три числа a_1, a_2, a_3 называемые координатами вектора, однозначно характеризуют вектор \bar{a} .

В процессе развития естественных наук в XIX веке было обнаружено, что векторы представляют собой лишь очень узкий класс не скалярных величин, так называемых «тензоров». Векторы являются простейшим классом тензоров, а именно тех тензоров, которые могут быть охарактеризованы системой чисел a_i с одним индексом. В общем случае индексов может быть два, три или более: a_{ij}, a_{ijk}, \dots

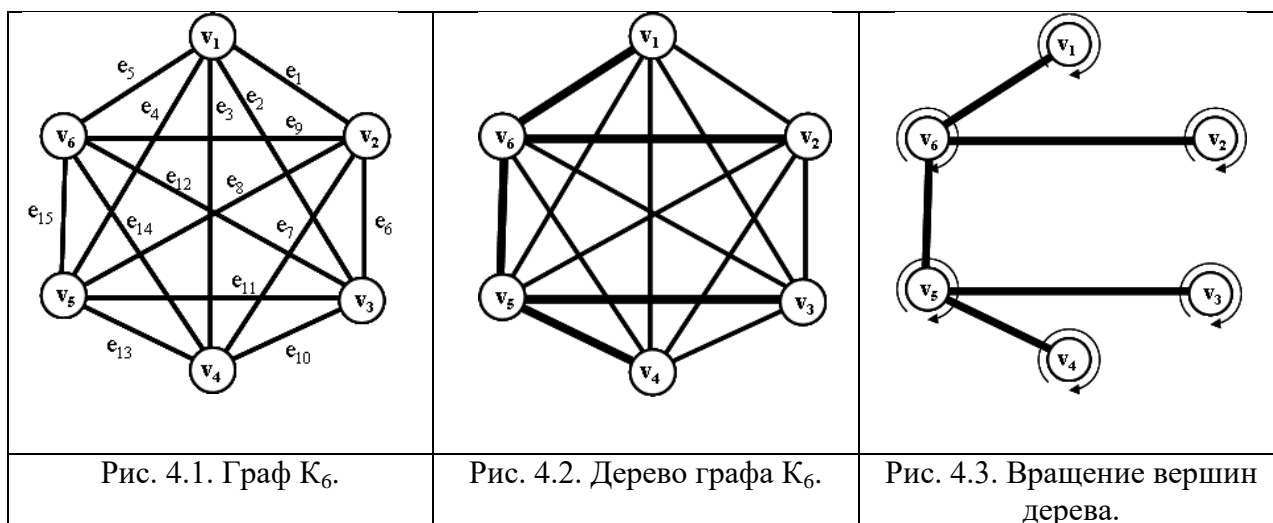
Среди этих тензоров наиболее важны тензоры *второго ранга*. Тензор второго ранга характеризуется двумя индексами: a_{ik} . Составляющие (или координаты) такого тензора могут быть расположены в следующей двумерной квадратной таблице [18]:

a_{11}	a_{12}	a_{13}	\dots	a_{1n}
a_{21}	a_{22}	a_{23}	\dots	a_{2n}
\dots	\dots	\dots	\dots	\dots
a_{n1}	a_{n2}	a_{n3}	\dots	a_{nn}

Таким образом, первый индекс указывает строку, а второй индекс - столбец, которому принадлежит составляющая a_{ik} . Закрывая схему в скобки, мы хотим показать, что *всю совокупность* этих составляющих мы должны рассматривать как одно целое. Ни одна из этих составляющих не имеет самостоятельного значения. Только совокупность всех составляющих определяет тензор подобно тому, как только вся совокупность координат образует вектор.

При построении рисунка графа анализ отношения пересечения ребер производится в топологическом пространстве, в котором метрические свойства не определены. Поэтому для полного и непротиворечивого описания рисунка нужно определить координатно-базисную

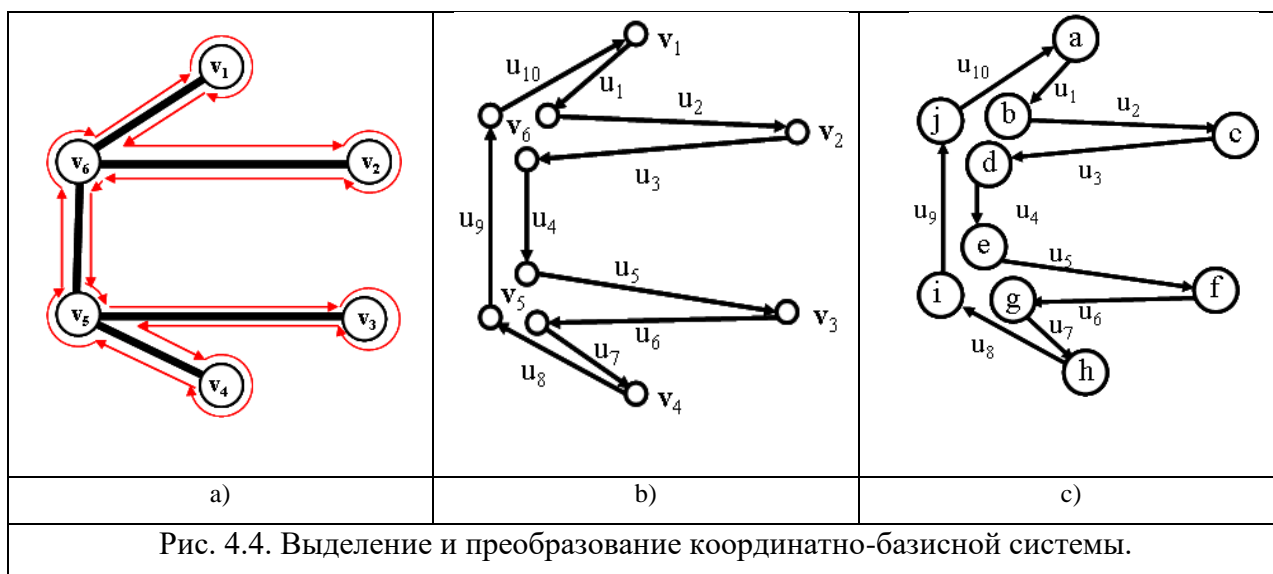
систему и установить проекции всех соединений на координатно-базисную систему с целью определения пересечения ребер по их проекциям.



Пример 4.1. Рассмотрим граф K_6 (см. рис. 4.1). Выделим дерево в графе (см. рис. 4.2), которое можно описать вращением вершин. Например, для неориентированного графа K_6 рисунок дерева (см. рис. 4.3) можно записать диаграммой вращения вершин:

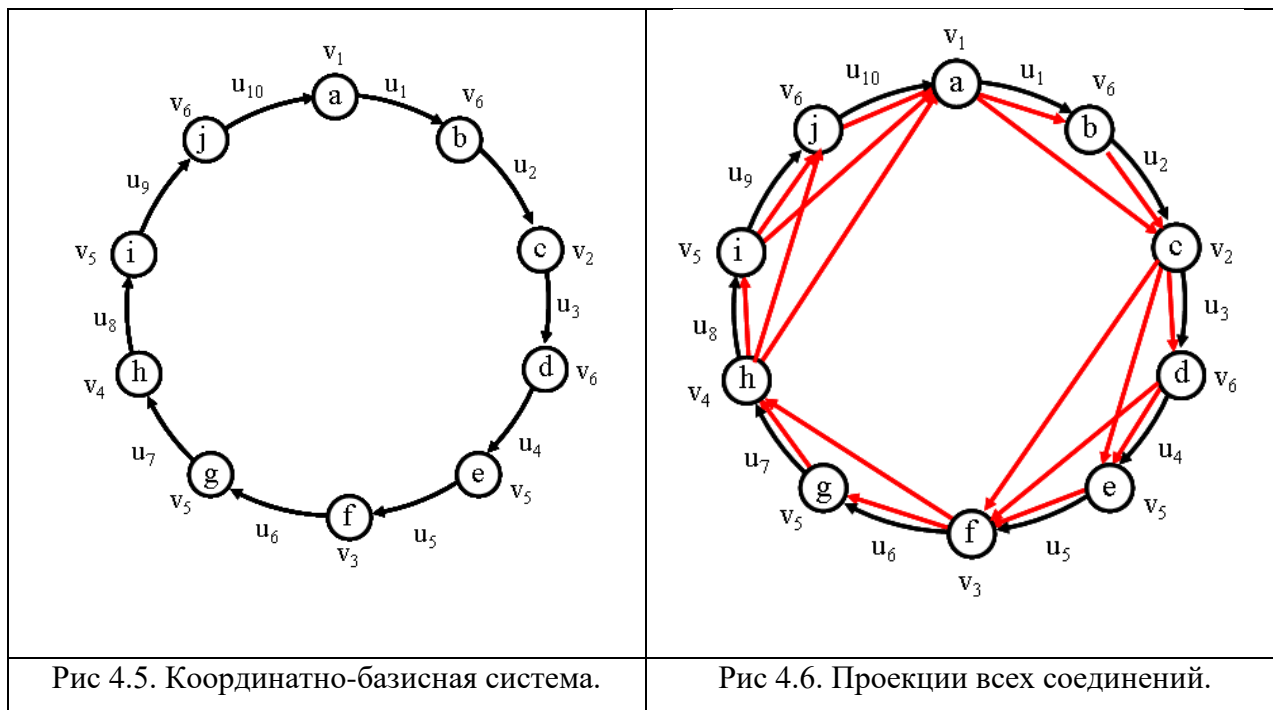
- v_1 : v_6
- v_2 : v_6
- v_3 : v_5
- v_4 : v_5
- v_5 : v_6 v_3 v_4
- v_6 : v_1 v_2 v_5

Тогда за координатно-базисную систему можно принять циклический обход любого дерева связного неориентированного графа (см. рис. 4.4).



Координатно-базисная система представляет собой замкнутую последовательность векторов, образованную циклическим обходом ветвей дерева и расщеплением вершин. Координатно-базисная система может быть описана как замкнутый кортеж векторов. Например, в

нашем примере: $КБС = \langle u_1, u_2, u_3, u_4, u_5, u_6, u_7, u_8, u_9, u_{10} \rangle$ или в виде ориентированных ребер $КБС = (a,b) + (b,c) + (c,d) + (d,e) + (e,f) + (f,g) + (g,h) + (h,i) + (i,j) + (j,a)$.



Введем необходимые определения

Определение 4.1 Топологической *координатно-базисной системой (КБС)* будем называть систему базисных топологических векторов, полученную в результате циклического обхода ребер произвольно выбранного дерева с учетом расщепления вершин графа G .

Определение 4.2 Прообраз вершин в координатно-базисной системе будем называть *полюсом*.

Определение 4.3 *Базисным топологическим вектором* будем называть помеченную дугу ориентированного суграфа принадлежащую *координатно-базисной системе (КБС)*.

Определение 4.4 *Топологическим вектором* будем называть множество базовых топологических векторов.

Топологическую координатно-базисную систему удобно представлять в виде цикла (см. рис. 4.5).

Для нашего примера запишем проекции ребер на координатно-базисную систему в виде таблицы. При этом будем учитывать, что неориентированное ребро исходного графа G можно представлять двумя разнонаправленными ориентированными дугами q_1 и q_2 . Составим таблицу проекций ориентированных ребер (см. таб. 4.1).

Таблица 4.1.

№	базовые вектора		u ₁	u ₂	u ₃	u ₄	u ₅	u ₆	u ₇	u ₈	u ₉	u ₁₀
			(a,b)	(b,c)	(c,d)	(d,e)	(e,f)	(f,g)	(g,h)	(h,i)	(i,j)	(j,a)
q ₁	e ₁	(v ₁ ,v ₂)	1	1								
q ₂		(v ₂ ,v ₁)			1	1	1	1	1	1	1	1
q ₃	e ₂	(v ₁ ,v ₃)	1	1	1	1	1					
q ₄		(v ₃ ,v ₁)					1	1	1	1	1	1
q ₅	e ₃	(v ₁ ,v ₄)	1	1	1	1	1	1	1			
q ₆		(v ₄ ,v ₁)								1	1	1
q ₇	e ₄	(v ₁ ,v ₅)	1	1	1	1						
q ₈		(v ₅ ,v ₁)					1	1	1	1	1	1
q ₉	e ₅	(v ₁ ,v ₆)	1									
q ₁₀		(v ₆ ,v ₁)		1	1	1	1	1	1	1	1	1
q ₁₁	e ₆	(v ₂ ,v ₃)			1	1	1					
q ₁₂		(v ₃ ,v ₂)	1	1				1	1	1	1	1
q ₁₃	e ₇	(v ₂ ,v ₄)			1	1	1	1				
q ₁₄		(v ₄ ,v ₂)	1	1						1	1	1
q ₁₅	e ₈	(v ₂ ,v ₅)			1	1						
q ₁₆		(v ₅ ,v ₂)	1	1			1	1	1	1	1	1
q ₁₇	e ₉	(v ₂ ,v ₆)			1							
q ₁₈		(v ₆ ,v ₂)	1	1		1	1	1	1	1	1	1
q ₁₉	e ₁₀	(v ₃ ,v ₄)						1	1			
q ₂₀		(v ₄ ,v ₃)	1	1	1	1	1			1	1	1
q ₂₁	e ₁₁	(v ₃ ,v ₅)						1				
q ₂₂		(v ₅ ,v ₃)	1	1	1	1	1		1	1	1	1
q ₂₃	e ₁₂	(v ₃ ,v ₆)						1	1	1	1	
q ₂₄		(v ₆ ,v ₃)	1	1	1	1	1					1
q ₂₅	e ₁₃	(v ₄ ,v ₅)								1		
q ₂₆		(v ₅ ,v ₄)	1	1	1	1	1	1	1		1	1
q ₂₇	e ₁₄	(v ₄ ,v ₆)								1	1	
q ₂₈		(v ₆ ,v ₄)	1	1	1	1	1	1	1			1
q ₂₉	e ₁₅	(v ₅ ,v ₆)									1	
q ₃₀		(v ₆ ,v ₅)	1	1	1	1	1	1	1	1		1

Удалим, проекции ориентированных петель. Под *ориентированной петлей* будем понимать два ориентированных вектора, соединяющие одноименную вершину. Например, для нашего примера, последовательность векторов $\langle u_4, u_5, u_6, u_7, u_8, u_9 \rangle$ представляет собой проек-

цию петли между полюсами d и j , принадлежащими вершине v_6 . Последовательность векторов $\langle u_2, u_3 \rangle$, представляет собой проекцию петли между полюсами b и d принадлежащими вершине v_6 . Последовательность векторов $\langle u_{10}, u_1 \rangle$, представляет собой проекцию петли между полюсами j и b принадлежащими вершине v_6 . Последовательность векторов $\langle u_5, u_6 \rangle$ представляет собой проекцию петли между полюсами e и g принадлежащими вершине v_5 . Последовательность векторов $\langle u_7, u_8 \rangle$ представляет собой проекцию дуги между полюсами g и i принадлежащими вершине v_5 . Наконец, последовательность векторов $\langle u_9, u_{10}, u_1, u_2, u_3, u_4 \rangle$ представляет собой проекцию петли между полюсами i и e принадлежащими вершине v_5 .

Таблица 4.2. Таблица проекций соединений без петель.

			u_1	u_2	u_3	u_4	u_5	u_6	u_7	u_8	u_9	u_{10}	
q_1	e_1	(v_1, v_2)	1	1									u_1, u_2
q_2		(v_2, v_1)			1							1	u_3, u_{10}
q_3	e_2	(v_1, v_3)	1			1	1						u_1, u_4, u_5
q_4		(v_3, v_1)					1	1				1	1
q_5	e_3	(v_1, v_4)	1			1			1				u_1, u_4, u_7
q_6		(v_4, v_1)									1	1	1
q_7	e_4	(v_1, v_5)	1			1							u_1, u_4
q_8		(v_5, v_1)										1	1
q_9	e_5	(v_1, v_6)	1										u_1
q_{10}		(v_6, v_1)											1
q_{11}	e_6	(v_2, v_3)			1	1	1						u_3, u_4, u_5
q_{12}		(v_3, v_2)		1					1			1	
q_{13}	e_7	(v_2, v_4)			1	1			1				u_3, u_4, u_7
q_{14}		(v_4, v_2)		1							1	1	
q_{15}	e_8	(v_2, v_5)			1	1							u_3, u_4
q_{16}		(v_5, v_2)		1								1	
q_{17}	e_9	(v_2, v_6)			1								u_3
q_{18}		(v_6, v_2)		1									
q_{19}	e_{10}	(v_3, v_4)						1	1				u_6, u_7
q_{20}		(v_4, v_3)					1			1			
q_{21}	e_{11}	(v_3, v_5)					1						u_6
q_{22}		(v_5, v_3)					1						
q_{23}	e_{12}	(v_3, v_6)						1			1		u_6, u_9
q_{24}		(v_6, v_3)				1	1						
q_{25}	e_{13}	(v_4, v_5)								1			u_8

q ₂₆		(v ₅ ,v ₄)							1							u ₇
q ₂₇	e ₁₄	(v ₄ ,v ₆)								1	1					u ₈ ,u ₉
q ₂₈		(v ₆ ,v ₄)				1			1							u ₄ ,u ₇
q ₂₉	e ₁₅	(v ₅ ,v ₆)									1					u ₉
q ₃₀		(v ₆ ,v ₅)				1										

На основании выделенного множества проекций построим координатно-базисную систему с проекциями соединений (см. рис. 4.6).

Обозначим базисный топологический вектор как

$$a = (x_i, x_j) \tag{4.1}$$

где a - индекс базисного топологического вектора, x_i - начальный полюс (начальная вершина) базового топологического вектора, x_j - конечный полюс базового топологического вектора.

Топологические вектора обладают следующим свойством:

$$(x_i, x_j) + (x_j, x_i) = 0; \tag{4.2}$$

если обозначить a = (x_i, x_j), b = (x_j, x_i) то

$$a + b = 0. \tag{4.3}$$

Определение 4.5. Будем говорить, что существует *пересечение двух топологических векторов* в рисунке неориентированного графа, если существует непустое пересечение (в множественном смысле) проекций их двух топологических векторов на топологическую координатно-базисную систему и не одно из этих двух проекций не является подмножеством другого

$$U_i \cap U_j \neq \emptyset; U_i \not\subset U_j \vee U_j \not\subset U_i. \tag{4.4}$$

Здесь U_i - множество базисных топологических векторов одного топологического вектора u_i, U_j - множество базисных топологических векторов другого топологического вектора u_j.

Для координатно-базисной системы, в нашего примера графа K₆ выделим плоскую часть, удаляя минимальное количество топологических векторов. Процесс будем проводить, последовательно удаляя на каждом шаге топологический вектор, имеющий максимальное количество пересечений.

Таблица 4.3. Последовательное удаление ориентированных дуг

№	дуги	пересечения	кол.	шаги															
				0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	
q ₁	e ₁	u ₁ ,u ₂	q ₃ ,q ₅ ,q ₇ ,q ₁₂ ,q ₁₄ ,q ₁₆	6	5	5	5	5	5	5	5	4	3	2	2	2	*	*	*
q ₂		u ₃ ,u ₁₀	q ₄ ,q ₈ ,q ₁₁ ,q ₁₃ ,q ₁₅	5	5	4	4	3	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	1
q ₃	e ₂	u ₁ ,u ₄ ,u ₅	q ₁ ,q ₅ ,q ₁₁ ,q ₁₃ ,q ₁₅ ,q ₂₀ ,q ₂₄ ,q ₂₈	8	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*
q ₄		u ₆ ,u ₉ ,u ₁₀	q ₂ ,q ₆ ,q ₁₂ ,q ₁₄ ,q ₁₆ ,q ₁₉ ,q ₂₇	7	7	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*

q ₅	e ₃	u ₁ ,u ₄ ,u ₇	q ₁ ,q ₃ ,q ₁₁ ,q ₁₅ ,q ₁₉ ,q ₂₄	6	5	5	4	4	4	4	4	*	*	*	*	*	*	*
q ₆		u ₈ ,u ₉ ,u ₁₀	q ₄ ,q ₁₂ ,q ₁₄ ,q ₁₆ ,q ₂₀ ,q ₂₃ ,q ₂₄	7	7	6	5	5	5	*	*	*	*	*	*	*	*	*
q ₇	e ₄	u ₁ ,u ₄	q ₁ ,q ₁₁ ,q ₁₃ ,q ₁₅ ,q ₂₄ ,q ₂₈	6	6	6	5	4	4	4	4	4	*	*	*	*	*	*
q ₈		u ₉ ,u ₁₀	q ₂ ,q ₁₂ ,q ₁₄ ,q ₁₆ ,q ₂₃ ,q ₂₇	6	6	6	6	6	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*
q ₉	e ₅	u ₁		0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
q ₁₀		u ₁₀		0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
q ₁₁	e ₆	u ₃ ,u ₄ ,u ₅	q ₂ ,q ₃ ,q ₅ ,q ₇ ,q ₁₃ ,q ₂₀ ,q ₂₄ ,q ₂₈	8	7	7	6	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*
q ₁₂		u ₂ ,u ₆ ,u ₉	q ₁ ,q ₄ ,q ₆ ,q ₈ ,q ₁₄ ,q ₂₇	6	6	5	5	4	4	3	2	2	2	2	1	0	0	0
q ₁₃	e ₇	u ₃ ,u ₄ ,u ₇	q ₂ ,q ₃ ,q ₇ ,q ₁₁ ,q ₁₉ ,q ₂₄	6	5	5	4	3	3	3	3	3	2	1	1	1	*	*
q ₁₄		u ₂ ,u ₈ ,u ₉	q ₁ ,q ₄ ,q ₆ ,q ₈ ,q ₁₂ ,q ₂₀ ,q ₂₃	7	7	6	6	6	5	4	*	*	*	*	*	*	*	*
q ₁₅	e ₈	u ₃ ,u ₄	q ₂ ,q ₃ ,q ₅ ,q ₇	4	3	3	3	3	3	3	2	2	1	1	1	1	1	*
q ₁₆		u ₂ ,u ₉	q ₁ ,q ₄ ,q ₆ ,q ₈	4	4	3	3	3	2	1	1	1	1	1	1	0	0	0
q ₁₇	e ₉	u ₃		0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
q ₁₈		u ₂		0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
q ₁₉	e ₁₀	u ₆ ,u ₇	q ₄ ,q ₅ ,q ₁₃ ,q ₂₃ ,q ₂₈	5	5	4	4	4	4	4	4	3	3	*	*	*	*	*
q ₂₀		u ₅ ,u ₈	q ₃ ,q ₆ ,q ₁₁ ,q ₁₄ ,q ₂₄ ,q ₂₇	6	5	5	4	3	3	2	1	1	1	1	0	0	0	0
q ₂₁	e ₁₁	u ₆		0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
q ₂₂		u ₅		0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
q ₂₃	e ₁₂	u ₆ ,u ₉	q ₆ ,q ₈ ,q ₁₄ ,q ₁₉ ,q ₂₇	5	5	5	5	5	4	3	2	2	2	1	0	0	0	0
q ₂₄		u ₄ ,u ₅	q ₃ ,q ₅ ,q ₆ ,q ₇ ,q ₁₁ ,q ₁₃ ,q ₂₀ ,q ₂₇	8	7	7	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*
q ₂₅	e ₁₃	u ₈		0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
q ₂₆		u ₇		0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
q ₂₇	e ₁₄	u ₈ ,u ₉	q ₄ ,q ₈ ,q ₁₂ ,q ₂₀ ,q ₂₃ ,q ₂₄	6	6	5	4	4	3	3	3	3	3	3	*	*	*	*
q ₂₈		u ₄ ,u ₇	q ₃ ,q ₇ ,q ₁₁ ,q ₁₉	4	3	3	3	2	2	2	2	2	1	0	0	0	0	0
q ₂₉	e ₁₅	u ₉		0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
q ₃₀		u ₄		0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

Для определения очередности удаления дуг составим список весов ребер, понимая под весом ребра суммарное количество пересечений его двух ориентированных дуг (веса ориентированных дуг расположены в таблице 4.3 в столбце имеющим индекс 0). Будем обозначать вес ребра или дуги латинской буквой w .

$$\begin{aligned}
 w(e_1) &= w(q_1)+w(q_2) = 6 + 5 = 11; \\
 w(e_2) &= w(q_3)+w(q_4) = 8 + 7 = 15; \\
 w(e_3) &= w(q_6)+w(q_5) = 7 + 6 = 13; \\
 w(e_4) &= w(q_7)+w(q_8) = 6 + 6 = 12; \\
 w(e_6) &= w(q_{11})+w(q_{12}) = 8 + 6 = 14; \\
 w(e_7) &= w(q_{14})+w(q_{13}) = 7 + 6 = 13; \\
 w(e_8) &= w(q_{15})+w(q_{16}) = 4 + 4 = 8; \\
 w(e_{10}) &= w(q_{20})+w(q_{19}) = 6 + 5 = 11;
 \end{aligned}$$

$$w(e_{12}) = w(q_{24}) + w(q_{23}) = 8 + 5 = 13;$$

$$w(e_{14}) = w(q_{27}) + w(q_{28}) = 6 + 4 = 10.$$

Весы ребер $e_5, e_9, e_{11}, e_{13}, e_{15}$ равны нулю, так как это ветви дерева.

Рассматривая рис. 4.6, обратим внимание на пересечение соединений имеющих координаты $\{u_8, u_9\} \cap \{u_9, u_{10}\} \neq \emptyset$ и соединений имеющих координаты $\{u_3, u_4\} \cap \{u_4, u_5\} \neq \emptyset$. Часть проекций ориентированных дуг $\{u_9, u_{10}\}$ и $\{u_4, u_5\}$ принадлежат ребру e_2 , а часть проекций ориентированных дуг $\{u_3, u_4\}$ и $\{u_8, u_9\}$ принадлежат ребру e_7 . Вес ребра e_2 больше веса ребра e_7 графа K_6 , поэтому удаление дуг $q_4 = \{u_6, u_9, u_{10}\}$ и $q_3 = \{u_1, u_4, u_5\}$ является приоритетным.

Процесс пошагового удаления дуг представлен в таблице 8.3, номера столбцов соответствуют шагу удаления дуги.

На первом шаге удалим дугу q_3 принадлежащую ребру e_2 имеющему больший суммарный вес (альтернативными дугами для удаления, являются дуги q_3, q_{11}, q_{24} с весами равными 8).

На втором шаге удалим дугу q_4 принадлежащую ребру e_2 имеющему больший суммарный вес (альтернативными дугами для удаления, являются дуги q_4, q_6, q_{11}, q_{24} с весами равными 7).

На третьем шаге удалим дугу q_{24} принадлежащую ребру e_{12} имеющему больший суммарный вес (альтернативными дугами для удаления, являются дуги q_8, q_{11}, q_{24} с весами равными 6).

На четвертом шаге удалим дугу q_{11} принадлежащую ребру e_6 имеющему больший суммарный вес (альтернативными дугами для удаления, являются дуги q_8, q_{11}, q_{14} с весами равными 6).

На пятом шаге удалим дугу q_8 принадлежащую ребру e_4 имеющему больший суммарный вес (альтернативными дугами для удаления, являются дуги q_8, q_{14} с весами равными 6).

На шестом шаге удалим дугу q_6 принадлежащую ребру e_3 имеющему больший суммарный вес (альтернативными дугами для удаления, являются дуги q_4, q_6, q_{14} с весами равными 5).

На седьмом шаге удалим дугу q_{14} принадлежащую ребру e_7 имеющему больший суммарный вес (альтернативными дугами для удаления, являются дуги $q_1, q_5, q_7, q_{14}, q_{19}$ с весами равными 4).

На восьмом шаге удалим дугу q_5 принадлежащую ребру e_3 имеющему больший суммарный вес (альтернативными дугами для удаления, являются дуги q_1, q_5, q_7, q_{19} с весами равными 4).

На девятом шаге удалим дугу q_7 принадлежащую ребру e_3 имеющему больший суммарный вес (альтернативными дугами для удаления, являются дуги q_7 с весами равными 4).

На десятом шаге удалим дугу q_{19} принадлежащую ребру e_{10} имеющему больший суммарный вес (альтернативными дугами для удаления, являются дуги q_{19}, q_{27} с весами равными 3).

На одиннадцатом шаге удалим дугу q_{27} принадлежащую ребру e_{14} имеющему больший суммарный вес (альтернативными дугами для удаления, являются дуги q_{27} с весами равными 3).

На двенадцатом шаге удалим дугу q_1 принадлежащую ребру e_1 имеющему больший суммарный вес (альтернативными дугами для удаления, являются дуги q_1, q_2 с весами равными 2).

На тринадцатом шаге удалим дугу q_{13} принадлежащую ребру e_7 имеющему больший суммарный вес (альтернативными дугами для удаления, являются дуги q_{13}, q_{15} с весами равными 1). Здесь невозможно удаление дуги q_2 ребра e_1 имеющей вес 2, так как её удаление приведет к удалению последней хорды для вершины v_1 (образование «висячей вершины»).

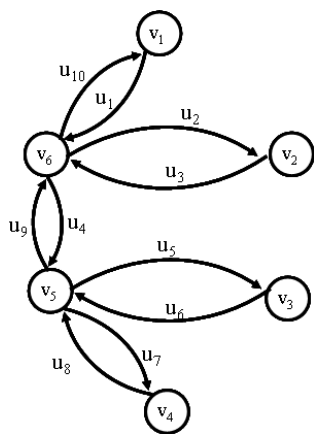


Рис. 4.7. Рисунок дерева графа в виде цветка.

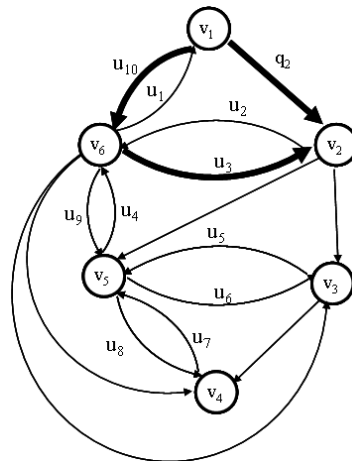


Рис. 4.8. Проведение дуги q_2 .

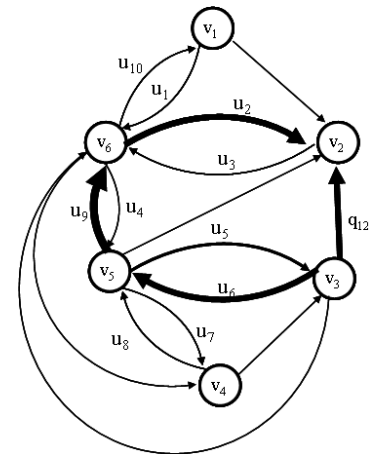


Рис. 4.9. Проведение дуги q_{12} .

На последнем четырнадцатом шаге удалим дугу q_{15} принадлежащую ребру e_8 имеющему больший суммарный вес (альтернативными дугами для удаления, являются дуги q_{15} с весами равными 1). Здесь невозможно удаление дуги q_2 ребра e_1 имеющей вес 1, так как её удаление приведет к удалению последней хорды для вершины v_1 (образование «висячей вершины»).

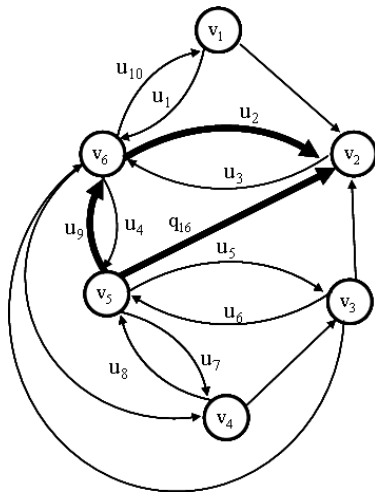


Рис. 4.10. Проведение дуги q_{16} .

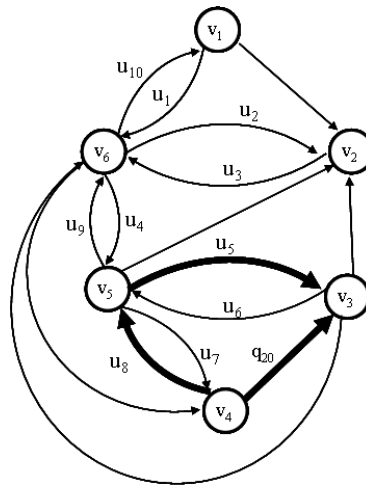


Рис. 4.11. Проведение дуги q_{20} .

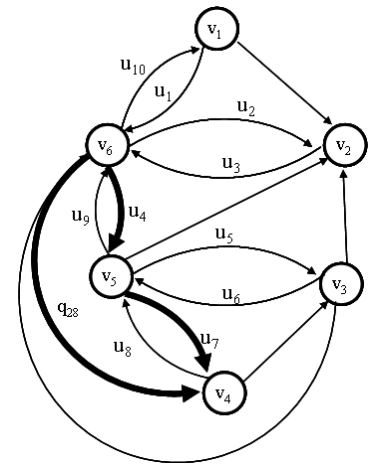


Рис. 4.12. Проведение дуги q_{28} .

В результате процесса удаления соединений, выделены дуги характеризующие плоскую часть графа K_6 и имеющие веса равные нулю $\{q_2, q_{12}, q_{16}, q_{20}, q_{23}, q_{28}\}$, а также симметрические дуги $\{q_9, q_{10}, q_{17}, q_{18}, q_{21}, q_{22}, q_{25}, q_{26}, q_{29}, q_{30}\}$ с изначально нулевым весом. На основе выделенных дуг, строим плоскую часть графа (см. рисунки 4.7-4.15). Для простоты обозначений будем называть рисунок дерева графа, при замене ребра двумя разнонаправленными ориентированными дугами, *цветком*.

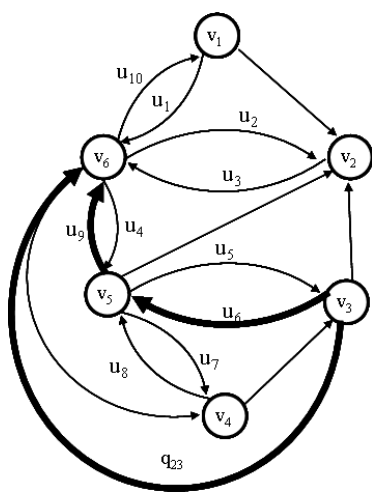


Рис. 4.13. Проведение дуги q_{23} .

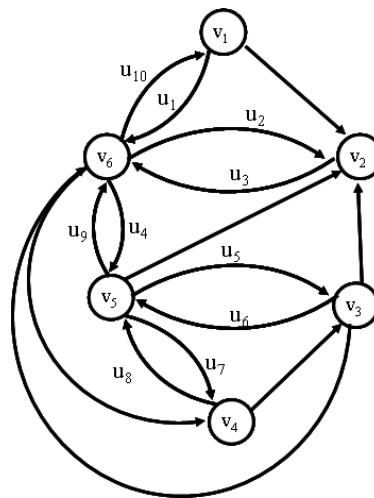


Рис. 4.14. Рисунок цветка с дугами.

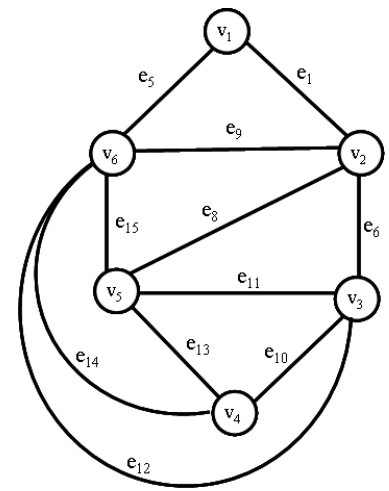


Рис. 4.15. Рисунок плоского графа.

Будем называть симметричные дуги в цветке, характеризующим дерево графа, лепестками. В данном примере лепестками являются следующие пары базовых топологических векторов $(u_1, u_{10}), (u_2, u_3), (u_4, u_9), (u_5, u_6), (u_7, u_8)$. Так как дуги в лепестках. Естественно, что при построении рисунка графа относительно координатно-базисной системы дуги в лепестках могут меняться местами, учитывая свойство симметрии. Например: дуга $q_2 = \{u_3, u_{10}\}$ может быть преобразована в $\{u_1, u_2\}$ (см. рис. 4.8 и рис. 4.16). Дуга $q_{12} = \{u_2, u_6, u_9\}$ может быть преоб-

разована в $\{u_3, u_4, u_5\}$ (см. рис. 4.9 и рис. 4.16). Дуга $q_{16} = \{u_2, u_9\}$ может быть преобразована в $\{u_3, u_4\}$ (см. рис. 4.10 и рис. 4.16). Дуга $q_{20} = \{u_5, u_8\}$ может быть преобразована в $\{u_6, u_7\}$ (см. рис. 4.11 и рис. 4.16). Дуга $q_{28} = \{u_4, u_7\}$ может быть преобразована в $\{u_8, u_9\}$ (см. рис. 4.12 и рис. 4.16). А вот к дуге $q_{23} = \{u_6, u_9\}$ необходимо присоединить петлю $\{u_7, u_8\}$, и тогда $q_{23} = \{u_6, u_7, u_8, u_9\}$ (см. рис. 4.13 и рис. 4.16).

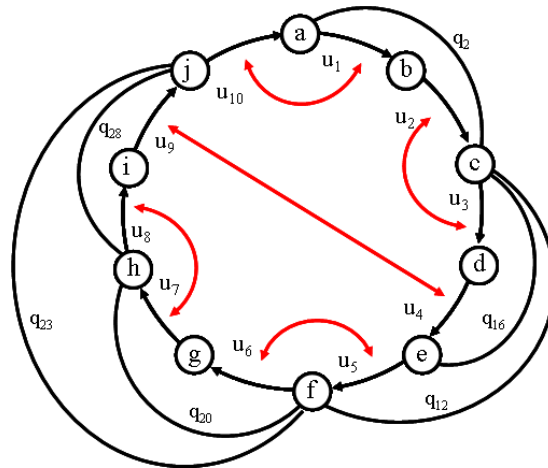
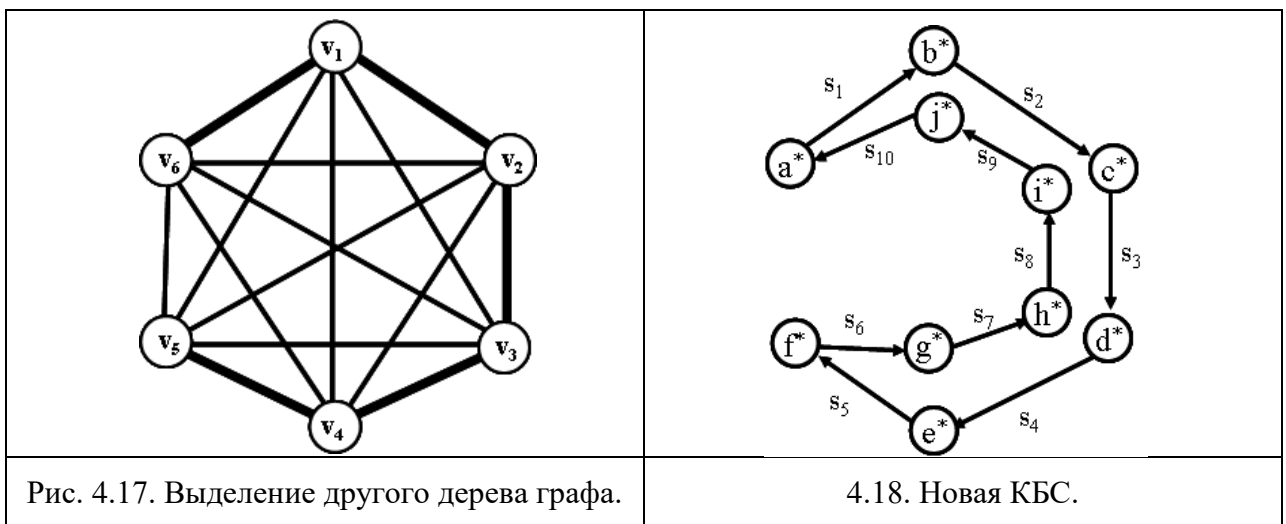


Рис. 4.16. Проекция выделенных дуг, для плоского рисунка графа с учетом симметрии лепестков.

4.2. Преобразование координат векторов при смене топологической координатно-базисной системы

При смене топологической координатно-базисной системы преобразование координат осуществляется как преобразование тензоров 2-рода.



Построим топологическую координатно-базисную систему и проекцию соединений для графа K_6 при смене топологической координатно-базисной системы. В качестве основы новой топологической координатно-базисной системы положим дерево $T = \{e_1, e_5, e_6, e_{10}, e_{13}\}$.

Матрица проекций старой топологической координатно-базисной системы на новую топологическую координатно-базисную систему имеет вид:

	S ₁	S ₂	S ₃	S ₄	S ₅	S ₆	S ₇	S ₈	S ₉	S ₁₀
u ₁										1
u ₂	1	1						1		
u ₃					1				1	1
u ₄	1	1	1	1	1					
u ₅						1	1			
u ₆				1	1					
u ₇						1				
u ₈					1					
u ₉						1	1	1	1	1
u ₁₀	1									1

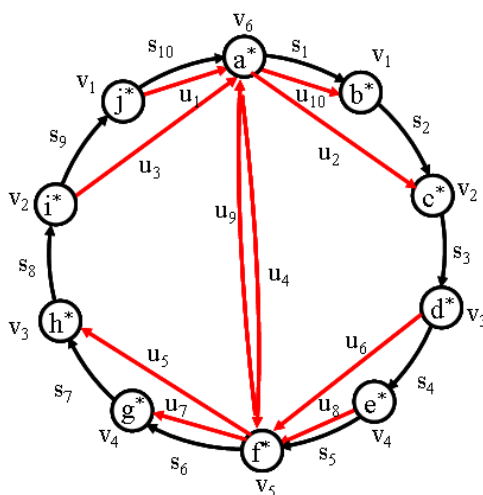


Рис. 4.17. Проекции базовых топологических векторов старой КБС на новую КБС.

Рассмотрим матрицу проекций соединений U старой КБС.

	u ₁	u ₂	u ₃	u ₄	u ₅	u ₆	u ₇	u ₈	u ₉	u ₁₀	
q ₁	1	1									u ₁ , u ₂
q ₂			1							1	u ₃ , u ₁₀
q ₃	1			1	1						u ₁ , u ₄ , u ₅
q ₄						1			1	1	u ₆ , u ₉ , u ₁₀
q ₅	1			1			1				u ₁ , u ₄ , u ₇
q ₆								1	1	1	u ₈ , u ₉ , u ₁₀

$$\mathbf{U} =$$

q7	1			1							u ₁ ,u ₄
q8								1	1		u ₉ ,u ₁₀
q9	1										u ₁
q10									1		u ₁₀
q11			1	1	1						u ₃ ,u ₄ ,u ₅
q12		1				1			1		u ₂ ,u ₆ ,u ₉
q13			1	1			1				u ₃ ,u ₄ ,u ₇
q14		1						1	1		u ₂ ,u ₈ ,u ₉
q15			1	1							u ₃ ,u ₄
q16		1							1		u ₂ ,u ₉
q17			1								u ₃
q18		1									u ₂
q19						1	1				u ₆ ,u ₇
q20					1			1			u ₅ ,u ₈
q21						1					u ₆
q22					1						u ₅
q23						1			1		u ₆ ,u ₉
q24				1	1						u ₄ ,u ₅
q25								1			u ₈
q26							1				u ₇
q27								1	1		u ₈ ,u ₉
q28				1			1				u ₄ ,u ₇
q29									1		u ₉
q30				1							u ₄

По законам алгебры тензоров 2-го рода, в результате умножения матрицы \mathbf{U} на матрицу \mathbf{P} получим матрицу проекций соединений новой КБС.

$$\mathbf{S} = \mathbf{U} \times \mathbf{P} \quad (4.5)$$

	s ₁	s ₂	s ₃	s ₄	s ₅	s ₆	s ₇	s ₈	s ₉	s ₁₀	
q1		1									s ₂
q2									1		s ₉

S =	q ₃	1	1							S ₂ ,S ₃		
	q ₄						1	1		S ₈ ,S ₉		
	q ₅	1	1	1						S ₂ ,S ₃ ,S ₄		
	q ₆						1	1	1	S ₇ ,S ₈ ,S ₉		
	q ₇	1	1	1	1					S ₂ ,S ₃ ,S ₄ ,S ₅		
	q ₈					1	1	1	1	S ₆ ,S ₇ ,S ₈ ,S ₉		
	q ₉								1	S ₁₀		
	q ₁₀	1								S ₁		
	q ₁₁			1						S ₃		
	q ₁₂	1						1	1	S ₂ ,S ₈ ,S ₉		
	q ₁₃			1	1					S ₃ ,S ₄		
	q ₁₄						1	1		S ₇ ,S ₈		
	q ₁₅			1	1	1				S ₃ ,S ₄ ,S ₅		
	q ₁₆						1	1	1	S ₆ ,S ₇ ,S ₈		
	q ₁₇								1	1	S ₉ ,S ₁₀	
	q ₁₈	1	1								S ₁ ,S ₂	
	q ₁₉				1						S ₄	
	q ₂₀						1				S ₇	
	q ₂₁				1	1					S ₄ ,S ₅	
	q ₂₂						1	1			S ₆ ,S ₇	
	q ₂₃							1	1	1	S ₈ ,S ₉ ,S ₁₀	
	q ₂₄	1	1	1							S ₁ ,S ₂ ,S ₃	
	q ₂₅					1					S ₅	
	q ₂₆						1				S ₆	
	q ₂₇							1	1	1	1	S ₇ ,S ₈ ,S ₉ ,S ₁₀
	q ₂₈	1	1	1	1							S ₁ ,S ₂ ,S ₃ ,S ₄
	q ₂₉						1	1	1	1	1	S ₆ ,S ₇ ,S ₈ ,S ₉ ,S ₁₀
	q ₃₀	1	1	1	1	1						S ₁ ,S ₂ ,S ₃ ,S ₄ ,S ₅

Результат получения проекций на новую КБС представлен на рис. 4.18.

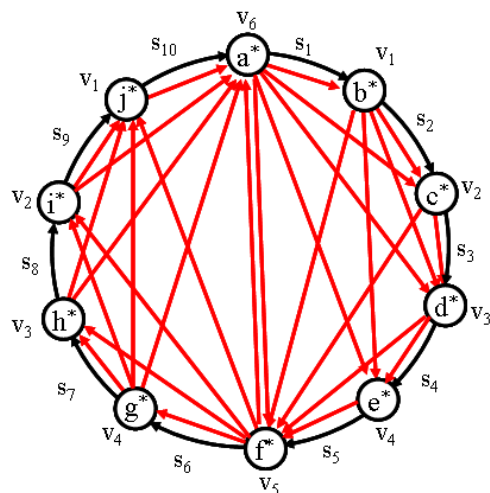


Рис. 4.18. Проекция соединений в новой топологической координатно-базисной системе.

Таким образом, координатно-базисная система (КБС) служит визуальной основой для построения рисунка графа на плоскости. Преобразование координат векторов при смене координатно-базисной системы производится по законам преобразования тензоров 2-го рода. Отсюда можно определить систему простых циклов для построения диаграммы вращения вершин и получить описание топологического рисунка графа.

4.3. Введение дополнительных ребер

Третьей этап осуществляет подключение дополнительных ребер к топологическому рисунку плоской части непланарного графа, созданного двумя первыми этапами. Данный этап характерен применением методов векторной алгебры пересечений для построения топологического рисунка плоской части непланарного графа.

Пример 4.2. Третий этап рассмотрим на примере построения следующего графа, заданного инцидентором P .

Элементы матрицы инциденций:

- ребро 1: (v_1, v_{19}) или (v_{19}, v_1) ;
- ребро 3: (v_1, v_{30}) или (v_{30}, v_1) ;
- ребро 5: (v_1, v_{44}) или (v_{44}, v_1) ;
- ребро 7: (v_2, v_{24}) или (v_{24}, v_2) ;
- ребро 9: (v_2, v_{33}) или (v_{33}, v_2) ;
- ребро 11: (v_3, v_{18}) или (v_{18}, v_3) ;
- ребро 13: (v_3, v_{23}) или (v_{23}, v_3) ;
- ребро 15: (v_3, v_{42}) или (v_{42}, v_3) ;
- ребро 17: (v_4, v_{18}) или (v_{18}, v_4) ;
- ребро 19: (v_4, v_{30}) или (v_{30}, v_4) ;
- ребро 21: (v_5, v_{21}) или (v_{21}, v_5) ;
- ребро 23: (v_5, v_{26}) или (v_{26}, v_5) ;
- ребро 25: (v_6, v_{18}) или (v_{18}, v_6) ;
- ребро 27: (v_6, v_{24}) или (v_{24}, v_6) ;
- ребро 29: (v_7, v_{30}) или (v_{30}, v_7) ;
- ребро 31: (v_8, v_{29}) или (v_{29}, v_8) ;
- ребро 33: (v_8, v_{35}) или (v_{35}, v_8) ;
- ребро 35: (v_9, v_{26}) или (v_{26}, v_9) ;
- ребро 37: (v_{10}, v_{31}) или (v_{31}, v_{10}) ;

- ребро 2: (v_1, v_{28}) или (v_{28}, v_1) ;
- ребро 4: (v_1, v_{35}) или (v_{35}, v_1) ;
- ребро 6: (v_2, v_{23}) или (v_{23}, v_2) ;
- ребро 8: (v_2, v_{26}) или (v_{26}, v_2) ;
- ребро 10: (v_2, v_{41}) или (v_{41}, v_2) ;
- ребро 12: (v_3, v_{19}) или (v_{19}, v_3) ;
- ребро 14: (v_3, v_{25}) или (v_{25}, v_3) ;
- ребро 16: (v_3, v_{45}) или (v_{45}, v_3) ;
- ребро 18: (v_4, v_{24}) или (v_{24}, v_4) ;
- ребро 20: (v_5, v_{20}) или (v_{20}, v_5) ;
- ребро 22: (v_5, v_{25}) или (v_{25}, v_5) ;
- ребро 24: (v_6, v_{13}) или (v_{13}, v_6) ;
- ребро 26: (v_6, v_{21}) или (v_{21}, v_6) ;
- ребро 28: (v_7, v_{27}) или (v_{27}, v_7) ;
- ребро 30: (v_7, v_{31}) или (v_{31}, v_7) ;
- ребро 32: (v_8, v_{32}) или (v_{32}, v_8) ;
- ребро 34: (v_9, v_{11}) или (v_{11}, v_9) ;
- ребро 36: (v_9, v_{27}) или (v_{27}, v_9) ;
- ребро 38: (v_{10}, v_{32}) или (v_{32}, v_{10}) ;

ребро 39: (v_{10}, v_{34}) или (v_{34}, v_{10}) ;
 ребро 41: (v_{11}, v_{43}) или (v_{43}, v_{11}) ;
 ребро 43: (v_{12}, v_{31}) или (v_{31}, v_{12}) ;
 ребро 45: (v_{13}, v_{32}) или (v_{32}, v_{13}) ;
 ребро 47: (v_{14}, v_{28}) или (v_{28}, v_{14}) ;
 ребро 49: (v_{14}, v_{39}) или (v_{39}, v_{14}) ;
 ребро 51: (v_{15}, v_{42}) или (v_{42}, v_{15}) ;
 ребро 53: (v_{16}, v_{37}) или (v_{37}, v_{16}) ;
 ребро 55: (v_{16}, v_{45}) или (v_{45}, v_{16}) ;
 ребро 57: (v_{17}, v_{41}) или (v_{41}, v_{17}) ;
 ребро 59: (v_{19}, v_{41}) или (v_{41}, v_{19}) ;
 ребро 61: (v_{20}, v_{43}) или (v_{43}, v_{20}) ;
 ребро 63: (v_{22}, v_{36}) или (v_{36}, v_{22}) ;
 ребро 65: (v_{22}, v_{40}) или (v_{40}, v_{22}) ;
 ребро 67: (v_{25}, v_{44}) или (v_{44}, v_{25}) ;
 ребро 69: (v_{29}, v_{34}) или (v_{34}, v_{29}) ;
 ребро 71: (v_{34}, v_{38}) или (v_{38}, v_{34}) ;

ребро 40: (v_{11}, v_{35}) или (v_{35}, v_{11}) ;
 ребро 42: (v_{12}, v_{29}) или (v_{29}, v_{12}) ;
 ребро 44: (v_{12}, v_{33}) или (v_{33}, v_{12}) ;
 ребро 46: (v_{13}, v_{39}) или (v_{39}, v_{13}) ;
 ребро 48: (v_{14}, v_{36}) или (v_{36}, v_{14}) ;
 ребро 50: (v_{15}, v_{38}) или (v_{38}, v_{15}) ;
 ребро 52: (v_{15}, v_{44}) или (v_{44}, v_{15}) ;
 ребро 54: (v_{16}, v_{39}) или (v_{39}, v_{16}) ;
 ребро 56: (v_{17}, v_{37}) или (v_{37}, v_{17}) ;
 ребро 58: (v_{17}, v_{43}) или (v_{43}, v_{17}) ;
 ребро 60: (v_{20}, v_{40}) или (v_{40}, v_{20}) ;
 ребро 62: (v_{21}, v_{36}) или (v_{36}, v_{21}) ;
 ребро 64: (v_{22}, v_{37}) или (v_{37}, v_{22}) ;
 ребро 66: (v_{23}, v_{27}) или (v_{27}, v_{23}) ;
 ребро 68: (v_{28}, v_{40}) или (v_{40}, v_{28}) ;
 ребро 70: (v_{33}, v_{38}) или (v_{38}, v_{33}) ;
 ребро 72: (v_{42}, v_{45}) или (v_{45}, v_{42}) .

Выделим в данном графе плоскую часть графа, например следующую:

c_1	$\{e_{42}, e_{44}, e_{69}, e_{70}, e_{71}\}$	$\{v_{29}, v_{34}, v_{38}, v_{33}, v_{12}\}$	$\langle v_{29}, v_{34}, v_{38}, v_{33}, v_{12} \rangle$
c_2	$\{e_{17}, e_{18}, e_{25}, e_{27}\}$	$\{v_{18}, v_6, v_{24}, v_4\}$	$\langle \{v_4, v_{24}, v_6, v_{18}\} \rangle$
c_3	$\{e_3, e_4, e_{29}, e_{30}, e_{31}, e_{33}, e_{42}, e_{43}\}$	$\{v_{30}, v_7, v_{31}, v_{12}, v_{29}, v_8, v_{35}, v_1\}$	$\langle \{v_1, v_{35}, v_8, v_{29}, v_{12}, v_{31}, v_7, v_{30}\} \rangle$
c_4	$\{e_{15}, e_{16}, e_{72}\}$	$\{v_{42}, v_{45}, v_3\}$	$\langle v_{42}, v_{45}, v_3 \rangle$
c_5	$\{e_{31}, e_{32}, e_{38}, e_{39}, e_{69}\}$	$\{v_{29}, v_{34}, v_{10}, v_{32}, v_8\}$	$\langle v_8, v_{32}, v_{10}, v_{34}, v_{29} \rangle$
c_6	$\{e_1, e_3, e_{12}, e_{13}, e_{28}, e_{29}, e_{66}\}$	$\{v_{19}, v_3, v_{23}, v_{27}, v_7, v_{30}, v_1\}$	$\langle v_1, v_{30}, v_7, v_{27}, v_{23}, v_3, v_{19} \rangle$
c_7	$\{e_{24}, e_{26}, e_{46}, e_{48}, e_{49}, e_{62}\}$	$\{v_{13}, v_{39}, v_{14}, v_{36}, v_{21}, v_6\}$	$\langle v_6, v_{21}, v_{36}, v_{14}, v_{39}, v_{13} \rangle$
c_8	$\{e_6, e_8, e_{35}, e_{36}, e_{66}\}$	$\{v_{23}, v_{27}, v_9, v_{26}, v_2\}$	$\langle v_{23}, v_{27}, v_9, v_{26}, v_2 \rangle$
c_9	$\{e_{12}, e_{16}, e_{53}, e_{55}, e_{56}, e_{57}, e_{59}\}$	$\{v_{19}, v_{41}, v_{17}, v_{37}, v_{16}, v_{45}, v_3\}$	$\langle v_3, v_{45}, v_{16}, v_{37}, v_{17}, v_{41}, v_{19} \rangle$
c_{10}	$\{e_{14}, e_{15}, e_{51}, e_{52}, e_{67}\}$	$\{v_{25}, v_{44}, v_{15}, v_{42}, v_3\}$	$\langle v_{25}, v_{44}, v_{15}, v_{42}, v_3 \rangle$
c_{11}	$\{e_1, e_4, e_{40}, e_{41}, e_{57}, e_{58}, e_{59}\}$	$\{v_{19}, v_{41}, v_{17}, v_{43}, v_{11}, v_{35}, v_1\}$	$\langle v_{19}, v_{41}, v_{17}, v_{43}, v_{11}, v_{35}, v_1 \rangle$
c_{12}	$\{e_{20}, e_{21}, e_{60}, e_{62}, e_{63}, e_{65}\}$	$\{v_{20}, v_{40}, v_{22}, v_{36}, v_{21}, v_5\}$	$\langle v_{20}, v_{40}, v_{22}, v_{36}, v_{21}, v_5 \rangle$
c_{13}	$\{e_7, e_8, e_{21}, e_{23}, e_{26}, e_{27}\}$	$\{v_{24}, v_6, v_{21}, v_5, v_{26}, v_2\}$	$\langle v_2, v_{26}, v_5, v_{21}, v_6, v_{24} \rangle$
c_{14}	$\{e_{47}, e_{48}, e_{63}, e_{65}, e_{68}\}$	$\{v_{28}, v_{40}, v_{22}, v_{36}, v_{14}\}$	$\langle v_{14}, v_{36}, v_{22}, v_{40}, v_{28} \rangle$
обод	$\{e_{44}, e_{70}, e_{71}, e_{17}, e_{18}, e_{25}, e_{30}, e_{33}, e_{43}, e_{72}, e_{32}, e_{38}, e_{39}, e_{13}, e_{28}, e_{24}, e_{46}, e_{49}, e_6, e_{35}, e_{36}, e_{53}, e_{55}, e_{56}, e_{14}, e_{51}, e_{52}, e_{67}, e_{40}, e_{41}, e_{58}, e_{20}, e_{60}, e_7, e_{23}, e_{47}, e_{68}\}$	$\{v_{33}, v_{38}, v_{34}, v_{10}, v_{32}, v_8, v_{35}, v_{11}, v_{43}, v_{17}, v_{37}, v_{16}, v_{45}, v_{42}, v_{15}, v_{44}, v_{25}, v_3, v_{23}, v_2, v_{24}, v_4, v_{18}, v_6, v_{13}, v_{39}, v_{14}, v_{28}, v_{40}, v_{20}, v_5, v_{26}, v_9, v_{27}, v_7, v_{31}, v_{12}\}$	$\langle v_{33}, v_{38}, v_{34}, v_{10}, v_{32}, v_8, v_{35}, v_{11}, v_{43}, v_{17}, v_{37}, v_{16}, v_{45}, v_{42}, v_{15}, v_{44}, v_{25}, v_3, v_{23}, v_2, v_{24}, v_4, v_{18}, v_6, v_{13}, v_{39}, v_{14}, v_{28}, v_{40}, v_{20}, v_5, v_{26}, v_9, v_{27}, v_7, v_{31}, v_{12} \rangle$

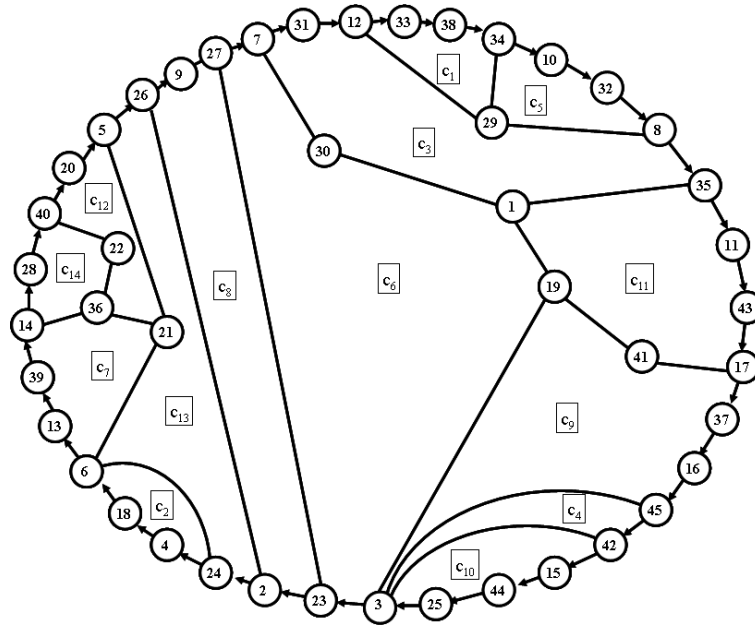


Рис. 4.19. Топологический рисунок плоской части графа.

Рассмотрим обод данной плоской конфигурации как замкнутую последовательность ориентированных ребер. Назовём такое построение координатно-базисной системой КБС [10,11]. Проведем ребра, удаленные в процессе планаризации, которые имеют две концевые вершины совместимые с вершинами обода (см. рис. 4.20).

Запишем КБС в виде замкнутого кортежа, состоящего из ориентированных ребер $\langle e_{44}, e_{70}, e_{71}, e_{39}, e_{38}, e_{32}, e_{33}, e_{40}, e_{41}, e_{58}, e_{56}, e_{53}, e_{55}, e_{72}, e_{51}, e_{52}, e_{67}, e_{14}, e_{13}, e_6, e_7, e_{18}, e_{17}, e_{25}, e_{24}, e_{46}, e_{49}, e_{47}, e_{68}, e_{60}, e_{20}, e_{23}, e_{35}, e_{36}, e_{28}, e_{30}, e_{43}, e_{44} \rangle$. Неориентированное ребро можно представить в виде двух разнонаправленных ориентированных дуг. Тогда для каждого ориентированного ребра существует проекция (в теоретико-множественном смысле) на координатно-базисную систему.

Например:

проекция $e_9(v_{21}, v_{33}) = \langle e_7, e_{18}, e_{17}, e_{25}, e_{24}, e_{46}, e_{49}, e_{47}, e_{68}, e_{60}, e_{20}, e_{23}, e_{35}, e_{36}, e_{28}, e_{30}, e_{43}, e_{44} \rangle$;

проекция $e_9(v_{33}, v_2) = \langle e_{70}, e_{71}, e_{39}, e_{38}, e_{32}, e_{33}, e_{40}, e_{41}, e_{58}, e_{56}, e_{53}, e_{55}, e_{72}, e_{51}, e_{52}, e_{67}, e_{14}, e_{13}, e_6 \rangle$;

проекция $e_{50}(v_{38}, v_{15}) = \langle e_{71}, e_{39}, e_{38}, e_{32}, e_{33}, e_{40}, e_{41}, e_{58}, e_{56}, e_{53}, e_{55}, e_{72}, e_{51} \rangle$;

проекция $e_{50}(v_{15}, v_{38}) = \langle e_{52}, e_{67}, e_{14}, e_{13}, e_6, e_7, e_{18}, e_{17}, e_{25}, e_{24}, e_{46}, e_{49}, e_{47}, e_{68}, e_{60}, e_{20}, e_{23}, e_{35}, e_{36}, e_{28}, e_{30}, e_{43}, e_{44}, e_{70} \rangle$;

проекция $e_{61}(v_{20}, v_{43}) = \langle e_{20}, e_{23}, e_{35}, e_{36}, e_{28}, e_{30}, e_{43}, e_{44}, e_{70}, e_{71}, e_{39}, e_{38}, e_{32}, e_{33}, e_{40}, e_{41} \rangle$;

проекция $e_{61}(v_{43}, v_{20}) = \langle e_{58}, e_{56}, e_{53}, e_{55}, e_{72}, e_{51}, e_{52}, e_{67}, e_{14}, e_{13}, e_6, e_7, e_{18}, e_{17}, e_{25}, e_{24}, e_{46}, e_{49}, e_{47}, e_{68}, e_{60} \rangle$;

проекция $e_{45}(v_{13}, v_{32}) = \langle e_{46}, e_{49}, e_{47}, e_{68}, e_{60}, e_{20}, e_{23}, e_{35}, e_{36}, e_{28}, e_{30}, e_{43}, e_{44}, e_{70}, e_{71}, e_{39}, e_{38} \rangle$;

проекция $e_{45}(v_{32}, v_{13}) = \langle e_{32}, e_{33}, e_{40}, e_{41}, e_{58}, e_{56}, e_{53}, e_{55}, e_{72}, e_{51}, e_{52}, e_{67}, e_{14}, e_{13}, e_6, e_7, e_{18}, e_{17}, e_{25}, e_{24} \rangle$;

проекция $e_{54}(v_{16}, v_{39}) = \langle e_{55}, e_{72}, e_{51}, e_{52}, e_{67}, e_{14}, e_{13}, e_6, e_7, e_{18}, e_{17}, e_{25}, e_{24}, e_{46} \rangle$;

проекция $e_{54}(v_{39}, v_{16}) = \langle e_{49}, e_{47}, e_{68}, e_{60}, e_{20}, e_{23}, e_{35}, e_{36}, e_{28}, e_{30}, e_{43}, e_{44}, e_{70}, e_{71}, e_{39}, e_{38}, e_{32}, e_{33}, e_{40} \rangle$;

$e_{41}, e_{58}, e_{56}, e_{53}$ >;

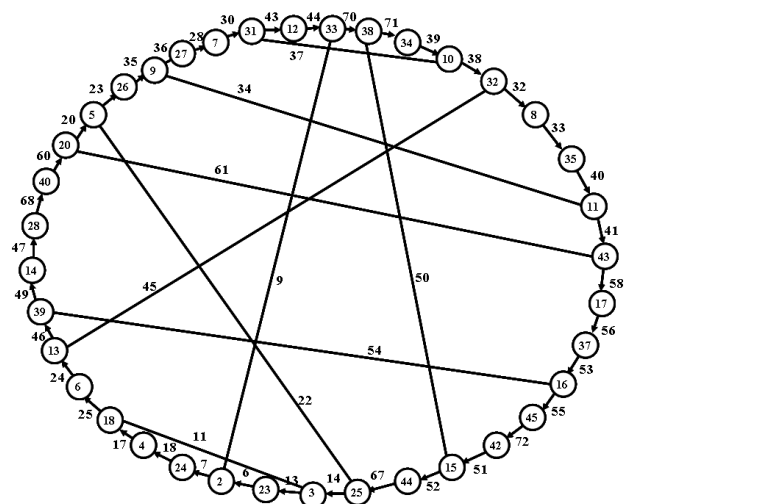


Рис. 4.20. Координатно-базисная система и проведенные ребра.

проекция $e_{22}(v_{25}, v_5) = \langle e_{14}, e_{13}, e_6, e_7, e_{18}, e_{17}, e_{25}, e_{24}, e_{46}, e_{49}, e_{47}, e_{68}, e_{60}, e_{20} \rangle$;

проекция $e_{22}(v_5, v_{25}) = \langle e_{23}, e_{35}, e_{36}, e_{28}, e_{30}, e_{43}, e_{44}, e_{70}, e_{71}, e_{39}, e_{38}, e_{32}, e_{33}, e_{40}, e_{41}, e_{58}, e_{56}, e_{53}, e_{55}, e_{72}, e_{51}, e_{52}, e_{67} \rangle$;

проекция $e_{11}(v_3, v_{18}) = \langle e_{13}, e_6, e_7, e_{18}, e_{17} \rangle$;

проекция $e_{11}(v_{18}, v_3) = \langle e_{25}, e_{24}, e_{46}, e_{49}, e_{47}, e_{68}, e_{60}, e_{20}, e_{23}, e_{35}, e_{36}, e_{28}, e_{30}, e_{43}, e_{44}, e_{70}, e_{71}, e_{39}, e_{38}, e_{32}, e_{33}, e_{40}, e_{41}, e_{58}, e_{56}, e_{53}, e_{55}, e_{72}, e_{51}, e_{52}, e_{67}, e_{14} \rangle$;

проекция $e_{37}(v_{31}, v_{10}) = \langle e_{43}, e_{44}, e_{70}, e_{71}, e_{39} \rangle$;

проекция $e_{37}(v_{10}, v_{31}) = \langle e_{38}, e_{32}, e_{33}, e_{40}, e_{41}, e_{58}, e_{56}, e_{53}, e_{55}, e_{72}, e_{51}, e_{52}, e_{67}, e_{14}, e_{13}, e_6, e_7, e_{18}, e_{17}, e_{25}, e_{24}, e_{46}, e_{49}, e_{47}, e_{68}, e_{60}, e_{20}, e_{23}, e_{35}, e_{36}, e_{28}, e_{30} \rangle$;

проекция $e_{34}(v_9, v_{11}) = \langle e_{36}, e_{28}, e_{30}, e_{43}, e_{44}, e_{70}, e_{71}, e_{39}, e_{38}, e_{32}, e_{33}, e_{40} \rangle$;

проекция $e_{34}(v_{11}, v_9) = \langle e_{41}, e_{58}, e_{56}, e_{53}, e_{55}, e_{72}, e_{51}, e_{52}, e_{67}, e_{14}, e_{13}, e_6, e_7, e_{18}, e_{17}, e_{25}, e_{24}, e_{46}, e_{49}, e_{47}, e_{68}, e_{60}, e_{20}, e_{23}, e_{35} \rangle$.

Запишем КБС в виде замкнутого кортежа состоящего из ориентированных ребер $\langle e_{44}, e_{70}, e_{71}, e_{39}, e_{38}, e_{32}, e_{33}, e_{40}, e_{41}, e_{58}, e_{56}, e_{53}, e_{55}, e_{72}, e_{51}, e_{52}, e_{67}, e_{14}, e_{13}, e_6, e_7, e_{18}, e_{17}, e_{25}, e_{24}, e_{46}, e_{49}, e_{47}, e_{68}, e_{60}, e_{20}, e_{23}, e_{35}, e_{36}, e_{28}, e_{30}, e_{43} \rangle$. Неориентированное ребро можно представить в виде двух разнонаправленных ориентированных дуг. Тогда для каждого ориентированного ребра существует проекция (в множественном смысле) на координатно-базисную систему. Например:

Из двух проекций ребра, выделим одну проекцию, но минимальную по длине.

проекция $e_9(v_2, v_{33}) = \langle e_7, e_{18}, e_{17}, e_{25}, e_{24}, e_{46}, e_{49}, e_{47}, e_{68}, e_{60}, e_{20}, e_{23}, e_{35}, e_{36}, e_{28}, e_{30}, e_{43}, e_{44} \rangle$;

проекция $e_{50}(v_{38}, v_{15}) = \langle e_{71}, e_{39}, e_{38}, e_{32}, e_{33}, e_{40}, e_{41}, e_{58}, e_{56}, e_{53}, e_{55}, e_{72}, e_{51} \rangle$;

проекция $e_{61}(v_{20}, v_{43}) = \langle e_{20}, e_{23}, e_{35}, e_{36}, e_{28}, e_{30}, e_{43}, e_{44}, e_{70}, e_{71}, e_{39}, e_{38}, e_{32}, e_{33}, e_{40}, e_{41} \rangle$;

проекция $e_{45}(v_{13}, v_{32}) = \langle e_{46}, e_{49}, e_{47}, e_{68}, e_{60}, e_{20}, e_{23}, e_{35}, e_{36}, e_{28}, e_{30}, e_{43}, e_{44}, e_{70}, e_{71}, e_{39}, e_{38} \rangle$;

проекция $e_{54}(v_{16}, v_{39}) = \langle e_{55}, e_{72}, e_{51}, e_{52}, e_{67}, e_{14}, e_{13}, e_6, e_7, e_{18}, e_{17}, e_{25}, e_{24}, e_{46} \rangle$;

проекция $e_{22}(v_{25}, v_5) = \langle e_{14}, e_{13}, e_6, e_7, e_{18}, e_{17}, e_{25}, e_{24}, e_{46}, e_{49}, e_{47}, e_{68}, e_{60}, e_{20} \rangle$;

проекция $e_{11}(v_3, v_{18}) = \langle e_{13}, e_6, e_7, e_{18}, e_{17} \rangle$;

проекция $e_{37}(v_{31}, v_{10}) = \langle e_{43}, e_{44}, e_{70}, e_{71}, e_{39} \rangle$;

проекция $e_{34}(v_9, v_{11}) = \langle e_{36}, e_{28}, e_{30}, e_{43}, e_{44}, e_{70}, e_{71}, e_{39}, e_{38}, e_{32}, e_{33}, e_{40} \rangle$;

В соответствии с законами векторной алгебры пересечений будем считать, что ребра пересекаются, если пересекаются их проекции (в терминах пересечения теории множеств). Ре-

бра не пересекаются, если результат пересечения проекций есть пустое множество или одна проекция полностью включается в другую.

Рассмотрим пересечения ребра e_9 . Пересечение ребер будем обозначать символом \perp . Проекцию ребра на координатно-базисную систему будем обозначать двумя символами пр .

$$e_9 \perp e_{50} = \text{пр}(e_9) \cap \text{пр}(e_{50}) = \{e_7, e_{18}, e_{17}, e_{25}, e_{24}, e_{46}, e_{49}, e_{47}, e_{68}, e_{60}, e_{20}, e_{23}, e_{35}, e_{36}, e_{28}, e_{30}, e_{43}, e_{44}\} \cap \{e_{38}, e_{32}, e_{33}, e_{40}, e_{41}, e_{58}, e_{56}, e_{53}, e_{55}, e_{72}, e_{51}\} = \emptyset;$$

$$e_9 \perp e_{61} = \text{пр}(e_9) \cap \text{пр}(e_{61}) = \{e_7, e_{18}, e_{17}, e_{25}, e_{24}, e_{46}, e_{49}, e_{47}, e_{68}, e_{60}, e_{20}, e_{23}, e_{35}, e_{36}, e_{28}, e_{30}, e_{43}, e_{44}\} \cap \{e_{20}, e_{23}, e_{35}, e_{36}, e_{28}, e_{30}, e_{43}, e_{44}, e_{70}, e_{71}, e_{39}, e_{38}, e_{32}, e_{33}, e_{40}, e_{41}\} = \{e_{20}, e_{23}, e_{35}, e_{36}, e_{28}, e_{30}, e_{43}, e_{44}\};$$

$$e_9 \perp e_{45} = \text{пр}(e_9) \cap \text{пр}(e_{45}) = \{e_7, e_{18}, e_{17}, e_{25}, e_{24}, e_{46}, e_{49}, e_{47}, e_{68}, e_{60}, e_{20}, e_{23}, e_{35}, e_{36}, e_{28}, e_{30}, e_{43}, e_{44}\} \cap \{e_{46}, e_{49}, e_{47}, e_{68}, e_{60}, e_{20}, e_{23}, e_{35}, e_{36}, e_{28}, e_{30}, e_{43}, e_{44}, e_{70}, e_{71}, e_{39}, e_{38}\} = \{e_{49}, e_{47}, e_{68}, e_{60}, e_{20}, e_{23}, e_{35}, e_{36}, e_{28}, e_{30}, e_{43}, e_{44}\};$$

$$e_9 \perp e_{54} = \text{пр}(e_9) \cap \text{пр}(e_{54}) = \{e_7, e_{18}, e_{17}, e_{25}, e_{24}, e_{46}, e_{49}, e_{47}, e_{68}, e_{60}, e_{20}, e_{23}, e_{35}, e_{36}, e_{28}, e_{30}, e_{43}, e_{44}\} \cap \{e_{55}, e_{72}, e_{51}, e_{52}, e_{67}, e_{14}, e_{13}, e_6, e_7, e_{18}, e_{17}, e_{25}, e_{24}, e_{46}\} = \{e_7, e_{18}, e_{17}, e_{25}, e_{24}, e_{46}\};$$

$$e_9 \perp e_{22} = \text{пр}(e_9) \cap \text{пр}(e_{22}) = \{e_7, e_{18}, e_{17}, e_{25}, e_{24}, e_{46}, e_{49}, e_{47}, e_{68}, e_{60}, e_{20}, e_{23}, e_{35}, e_{36}, e_{28}, e_{30}, e_{43}, e_{44}\} \cap \{e_{14}, e_{13}, e_6, e_7, e_{18}, e_{17}, e_{25}, e_{24}, e_{46}, e_{49}, e_{47}, e_{68}, e_{60}, e_{20}\} = \{e_7, e_{18}, e_{17}, e_{25}, e_{24}, e_{46}, e_{49}, e_{47}, e_{68}, e_{60}, e_{20}\};$$

$$e_9 \perp e_{11} = \text{пр}(e_9) \cap \text{пр}(e_{11}) = \{e_7, e_{18}, e_{17}, e_{25}, e_{24}, e_{46}, e_{49}, e_{47}, e_{68}, e_{60}, e_{20}, e_{23}, e_{35}, e_{36}, e_{28}, e_{30}, e_{43}, e_{44}\} \cap \{e_{13}, e_6, e_7, e_{18}, e_{17}\} = \{e_7, e_{18}, e_{17}\};$$

$$e_9 \perp e_{37} = \text{пр}(e_9) \cap \text{пр}(e_{37}) = \{e_7, e_{18}, e_{17}, e_{25}, e_{24}, e_{46}, e_{49}, e_{47}, e_{68}, e_{60}, e_{20}, e_{23}, e_{35}, e_{36}, e_{28}, e_{30}, e_{43}, e_{44}\} \cap \{e_{43}, e_{44}, e_{70}, e_{71}, e_{39}\} = \{e_{43}, e_{44}\};$$

$$e_9 \perp e_{34} = \text{пр}(e_9) \cap \text{пр}(e_{34}) = \{e_7, e_{18}, e_{17}, e_{25}, e_{24}, e_{46}, e_{49}, e_{47}, e_{68}, e_{60}, e_{20}, e_{23}, e_{35}, e_{36}, e_{28}, e_{30}, e_{43}, e_{44}\} \cap \{e_{36}, e_{28}, e_{30}, e_{43}, e_{44}, e_{70}, e_{71}, e_{39}, e_{38}, e_{32}, e_{33}, e_{40}\} = \{e_{36}, e_{28}, e_{30}, e_{43}, e_{44}\}.$$

Таким образом, ребро e_9 пересекается со всеми ребрами кроме ребра e_{50} .

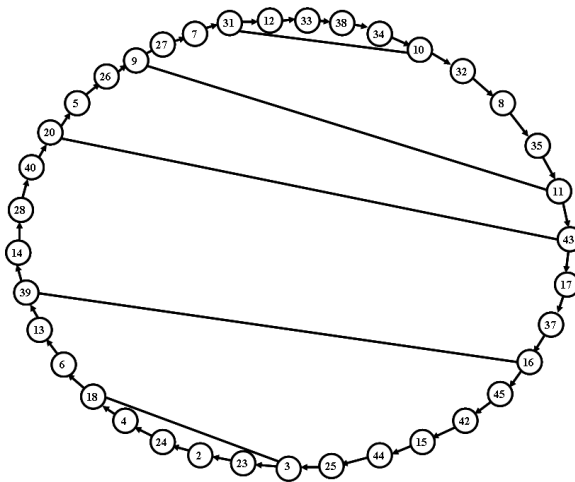


Рис. 4.21.. Непересекающиеся соединения.

Для определения удаления ребер необходимо рассмотреть все случаи парного пересечения ребер. После этого будем последовательно удалять ребра, максимально пересекающиеся с другими. В конце процесса выделится множество непересекающихся ребер. В нашем случае непересекающиеся соединения представлены на рис. 4.22.

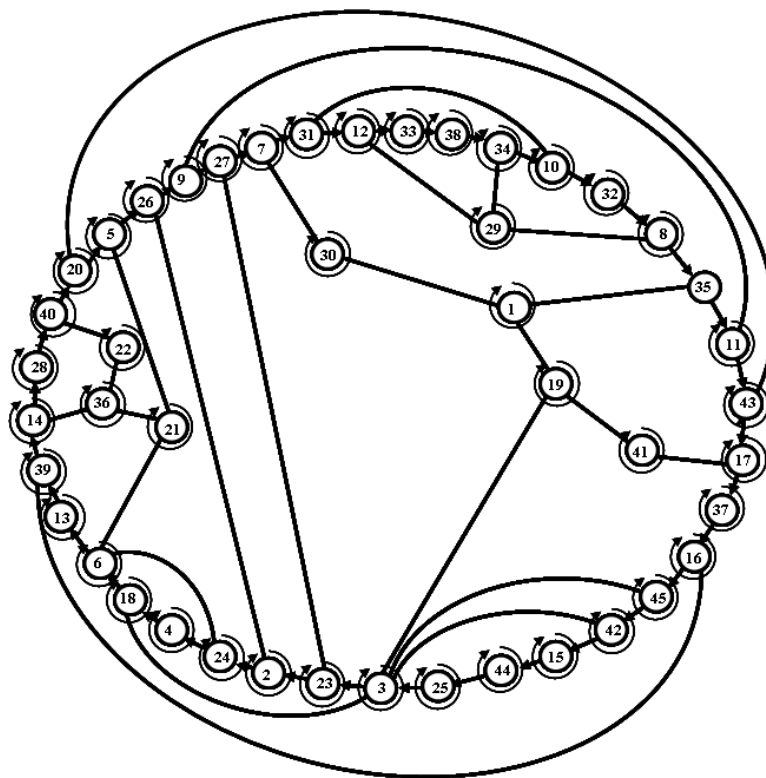


Рис. 4.22. Топологический рисунок плоского суграфа.

В результате выделяются новые простые циклы, которые можно добавить к существующим.

$$\begin{aligned}
 c_{15} &= \{e_{37}, e_{43}, e_{41}, e_{70}, e_{71}, e_{39}\}; \\
 c_{16} &= \{e_{37}, e_{38}, e_{32}, e_{33}, e_{40}, e_{34}, e_{36}, e_{28}, e_{30}\}; \\
 c_{17} &= \{e_{34}, e_{41}, e_{61}, e_{20}, e_{23}, e_{35}\}; \\
 c_{18} &= \{e_{54}, e_{55}, e_{72}, e_{51}, e_{52}, e_{67}, e_{11}, e_{25}, e_{24}, e_{46}\}; \\
 c_{19} &= \{e_{11}, e_{17}, e_{18}, e_6, e_7, e_{15}\}; \\
 c_0 &= \{e_{61}, e_{58}, e_{56}, e_{53}, e_{54}, e_{49}, e_{47}, e_{68}, e_{60}\}.
 \end{aligned}$$

Множество простых и изометрических циклов образует топологический рисунок плоского суграфа (см. рис.4.22).

Возможен путь решения задачи выделения плоской части начиная с этапа выделения базиса подпространства циклов. В этом случае выделенный базис не обязательно обладает минимальным значением функционала Маклейна. Рассмотрим данный процесс на следующем примере.

Пример 4.3. Пусть задан граф с количеством вершин = 21 и количеством ребер = 33. Граф задан инцидентором P:

ребро 1: (v_1, v_5) или (v_5, v_1) ;
 ребро 3: (v_1, v_{11}) или (v_{11}, v_1) ;
 ребро 5: (v_2, v_{12}) или (v_{12}, v_2) ;
 ребро 7: (v_2, v_{19}) или (v_{19}, v_2) ;
 ребро 9: (v_3, v_7) или (v_7, v_3) ;
 ребро 11: (v_3, v_{16}) или (v_{16}, v_3) ;
 ребро 13: (v_4, v_{13}) или (v_{13}, v_4) ;
 ребро 15: (v_4, v_{20}) или (v_{20}, v_4) ;
 ребро 17: (v_5, v_{20}) или (v_{20}, v_5) ;
 ребро 19: (v_6, v_{14}) или (v_{14}, v_6) ;
 ребро 21: (v_7, v_{10}) или (v_{10}, v_7) ;
 ребро 23: (v_8, v_{15}) или (v_{15}, v_8) ;
 ребро 25: (v_9, v_{13}) или (v_{13}, v_9) ;
 ребро 27: (v_9, v_{18}) или (v_{18}, v_9) ;
 ребро 29: (v_{11}, v_{15}) или (v_{15}, v_{11}) ;
 ребро 31: (v_{13}, v_{21}) или (v_{21}, v_{13}) ;
 ребро 33: (v_{16}, v_{19}) или (v_{19}, v_{16}) .

ребро 2: (v_1, v_8) или (v_8, v_1) ;
 ребро 4: (v_1, v_{21}) или (v_{21}, v_1) ;
 ребро 6: (v_2, v_{16}) или (v_{16}, v_2) ;
 ребро 8: (v_2, v_{21}) или (v_{21}, v_2) ;
 ребро 10: (v_3, v_{12}) или (v_{12}, v_3) ;
 ребро 12: (v_4, v_{12}) или (v_{12}, v_4) ;
 ребро 14: (v_4, v_{14}) или (v_{14}, v_4) ;
 ребро 16: (v_5, v_{17}) или (v_{17}, v_5) ;
 ребро 18: (v_6, v_{10}) или (v_{10}, v_6) ;
 ребро 20: (v_6, v_{15}) или (v_{15}, v_6) ;
 ребро 22: (v_7, v_{18}) или (v_{18}, v_7) ;
 ребро 24: (v_8, v_{18}) или (v_{18}, v_8) ;
 ребро 26: (v_9, v_{17}) или (v_{17}, v_9) ;
 ребро 28: (v_{10}, v_{20}) или (v_{20}, v_{10}) ;
 ребро 30: (v_{11}, v_{17}) или (v_{17}, v_{11}) ;
 ребро 32: (v_{14}, v_{19}) или (v_{19}, v_{14}) .

Множество изометрических циклов:

	ребра	вершины
цикл 1:	$\{e_1, e_3, e_{16}, e_{30}\}$	$\{v_1, v_5, v_{11}, v_{17}\}$
цикл 2:	$\{e_1, e_4, e_{13}, e_{15}, e_{17}, e_{31}\}$	$\{v_1, v_4, v_5, v_{13}, v_{20}, v_{21}\}$
цикл 3:	$\{e_1, e_2, e_{16}, e_{24}, e_{26}, e_{27}\}$	$\{v_1, v_5, v_8, v_9, v_{17}, v_{18}\}$
цикл 4:	$\{e_2, e_3, e_{23}, e_{29}\}$	$\{v_1, v_8, v_{11}, v_{15}\}$
цикл 5:	$\{e_2, e_4, e_{24}, e_{25}, e_{27}, e_{31}\}$	$\{v_1, v_8, v_9, v_{13}, v_{18}, v_{21}\}$
цикл 6:	$\{e_1, e_4, e_{16}, e_{25}, e_{26}, e_{31}\}$	$\{v_1, v_5, v_9, v_{13}, v_{17}, v_{21}\}$
цикл 7:	$\{e_3, e_4, e_{25}, e_{26}, e_{30}, e_{31}\}$	$\{v_1, v_9, v_{11}, v_{13}, v_{17}, v_{21}\}$
цикл 8:	$\{e_5, e_6, e_{10}, e_{11}\}$	$\{v_2, v_3, v_{12}, v_{16}\}$
цикл 9:	$\{e_5, e_7, e_{12}, e_{14}, e_{32}\}$	$\{v_2, v_4, v_{12}, v_{14}, v_{19}\}$
цикл 10:	$\{e_5, e_8, e_{12}, e_{13}, e_{31}\}$	$\{v_2, v_4, v_{12}, v_{13}, v_{21}\}$
цикл 11:	$\{e_6, e_7, e_{33}\}$	$\{v_2, v_{16}, v_{19}\}$
цикл 12:	$\{e_9, e_{10}, e_{12}, e_{15}, e_{21}, e_{28}\}$	$\{v_3, v_4, v_7, v_{10}, v_{12}, v_{20}\}$
цикл 13:	$\{e_{13}, e_{15}, e_{16}, e_{17}, e_{25}, e_{26}\}$	$\{v_4, v_5, v_9, v_{13}, v_{17}, v_{20}\}$
цикл 14:	$\{e_{14}, e_{15}, e_{18}, e_{19}, e_{28}\}$	$\{v_4, v_6, v_{10}, v_{14}, v_{20}\}$
цикл 15:	$\{e_{18}, e_{20}, e_{21}, e_{22}, e_{23}, e_{24}\}$	$\{v_6, v_7, v_8, v_{10}, v_{15}, v_{18}\}$
цикл 16:	$\{e_9, e_{10}, e_{12}, e_{13}, e_{22}, e_{25}, e_{27}\}$	$\{v_3, v_4, v_7, v_9, v_{12}, v_{13}, v_{18}\}$
цикл 17:	$\{e_2, e_3, e_{24}, e_{26}, e_{27}, e_{30}\}$	$\{v_1, v_8, v_9, v_{11}, v_{17}, v_{18}\}$
цикл 18:	$\{e_{23}, e_{24}, e_{26}, e_{27}, e_{29}, e_{30}\}$	$\{v_8, v_9, v_{11}, v_{15}, v_{17}, v_{18}\}$

Длина элемента структурного числа = 13.

Количество элементов структурного числа = 1.

Усеченные однострочные структурные числа:

циклы, проходящие по хорде e_{17} : $[c_2]$;

циклы, проходящие по хорде e_{30} : $[c_1]$;

циклы, проходящие по хорде e_{33} : $[c_{11}]$;

циклы, проходящие по хорде e_3 : $[c_1, c_4]$;

циклы, проходящие по хорде e_4 : $[c_2, c_5]$;

циклы, проходящие по хорде e_7 : $[c_9, c_{11}]$;

циклы, проходящие по хорде e_{14} : $[c_9, c_{14}]$;

циклы, проходящие по хорде e_{22} : $[c_{15}, c_{16}]$;

циклы, проходящие по хорде e_2 : $[c_3, c_4, c_5]$;

циклы, проходящие по хорде e_{10} : $[c_8, c_{12}, c_{16}]$;

циклы, проходящие по хорде e_{15} : $[c_2, c_{12}, c_{14}]$;

циклы, проходящие по хорде e_{27} : $[c_3, c_5, c_{16}]$;

циклы, проходящие по хорде e_{31} : $[c_2, c_5, c_{10}]$;

1 - элемент структурного числа = $\{c_2, c_1, c_{11}, c_4, c_5, c_9, c_{14}, c_{15}, c_3, c_8, c_{12}, c_{16}, c_{10}\}$.

Как видно количество элементов структурного числа нечетно, следовательно система не зависима.

	ребра	вершины
цикл 1:	{e ₁ ,e ₃ ,e ₁₆ ,e ₃₀ }	{v ₁ ,v ₅ ,v ₁₁ ,v ₁₇ }
цикл 2:	{e ₁ ,e ₄ ,e ₁₃ ,e ₁₅ ,e ₁₇ ,e ₃₁ }	{v ₁ ,v ₄ ,v ₅ ,v ₁₃ ,v ₂₀ ,v ₂₁ }
цикл 3:	{e ₁ ,e ₂ ,e ₁₆ ,e ₂₄ ,e ₂₆ ,e ₂₇ }	{v ₁ ,v ₅ ,v ₈ ,v ₉ ,v ₁₇ ,v ₁₈ }
цикл 4:	{e ₂ ,e ₃ ,e ₂₃ ,e ₂₉ }	{v ₁ ,v ₈ ,v ₁₁ ,v ₁₅ }
цикл 5:	{e ₂ ,e ₄ ,e ₂₄ ,e ₂₅ ,e ₂₇ ,e ₃₁ }	{v ₁ ,v ₈ ,v ₉ ,v ₁₃ ,v ₁₈ ,v ₂₁ }
цикл 8:	{e ₅ ,e ₆ ,e ₁₀ ,e ₁₁ }	{v ₂ ,v ₃ ,v ₁₂ ,v ₁₆ }
цикл 9:	{e ₅ ,e ₇ ,e ₁₂ ,e ₁₄ ,e ₃₂ }	{v ₂ ,v ₄ ,v ₁₂ ,v ₁₄ ,v ₁₉ }
цикл 10:	{e ₅ ,e ₈ ,e ₁₂ ,e ₁₃ ,e ₃₁ }	{v ₂ ,v ₄ ,v ₁₂ ,v ₁₃ ,v ₂₁ }
цикл 11:	{e ₆ ,e ₇ ,e ₃₃ }	{v ₂ ,v ₁₆ ,v ₁₉ }
цикл 12:	{e ₉ ,e ₁₀ ,e ₁₂ ,e ₁₅ ,e ₂₁ ,e ₂₈ }	{v ₃ ,v ₄ ,v ₇ ,v ₁₀ ,v ₁₂ ,v ₂₀ }
цикл 14:	{e ₁₄ ,e ₁₅ ,e ₁₈ ,e ₁₉ ,e ₂₈ }	{v ₄ ,v ₆ ,v ₁₀ ,v ₁₄ ,v ₂₀ }
цикл 15:	{e ₁₈ ,e ₂₀ ,e ₂₁ ,e ₂₂ ,e ₂₃ ,e ₂₄ }	{v ₆ ,v ₇ ,v ₈ ,v ₁₀ ,v ₁₅ ,v ₁₈ }
цикл 16:	{e ₉ ,e ₁₀ ,e ₁₂ ,e ₁₃ ,e ₂₂ ,e ₂₅ ,e ₂₇ }	{v ₃ ,v ₄ ,v ₇ ,v ₉ ,v ₁₂ ,v ₁₃ ,v ₁₈ }

Алгоритмом наискорейшего спуска выделим плоскую часть графа

	ребра	вершины
цикл 1:	{e ₁ ,e ₃ ,e ₁₆ ,e ₃₀ }	{v ₁ ,v ₅ ,v ₁₁ ,v ₁₇ }
цикл 4:	{e ₂ ,e ₃ ,e ₂₃ ,e ₂₉ }	{v ₁ ,v ₈ ,v ₁₁ ,v ₁₅ }
цикл 5:	{e ₂ ,e ₄ ,e ₂₄ ,e ₂₅ ,e ₂₇ ,e ₃₁ }	{v ₁ ,v ₈ ,v ₉ ,v ₁₃ ,v ₁₈ ,v ₂₁ }
цикл 9:	{e ₅ ,e ₇ ,e ₁₂ ,e ₁₄ ,e ₃₂ }	{v ₂ ,v ₄ ,v ₁₂ ,v ₁₄ ,v ₁₉ }
цикл 11:	{e ₆ ,e ₇ ,e ₃₃ }	{v ₂ ,v ₁₆ ,v ₁₉ }
цикл 12:	{e ₉ ,e ₁₀ ,e ₁₂ ,e ₁₅ ,e ₂₁ ,e ₂₈ }	{v ₃ ,v ₄ ,v ₇ ,v ₁₀ ,v ₁₂ ,v ₂₀ }
цикл 14:	{e ₁₄ ,e ₁₅ ,e ₁₈ ,e ₁₉ ,e ₂₈ }	{v ₄ ,v ₆ ,v ₁₀ ,v ₁₄ ,v ₂₀ }
цикл 15:	{e ₁₈ ,e ₂₀ ,e ₂₁ ,e ₂₂ ,e ₂₃ ,e ₂₄ }	{v ₆ ,v ₇ ,v ₈ ,v ₁₀ ,v ₁₅ ,v ₁₈ }

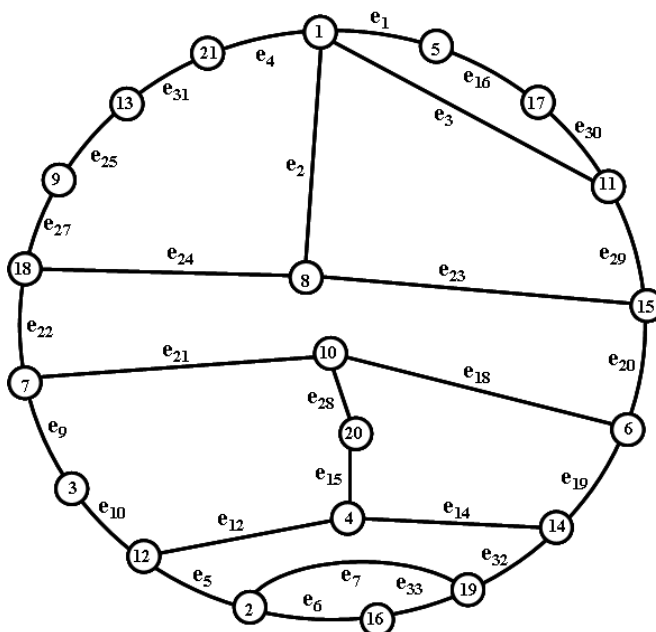


Рис. 4.23. Рисунок плоской части графа.

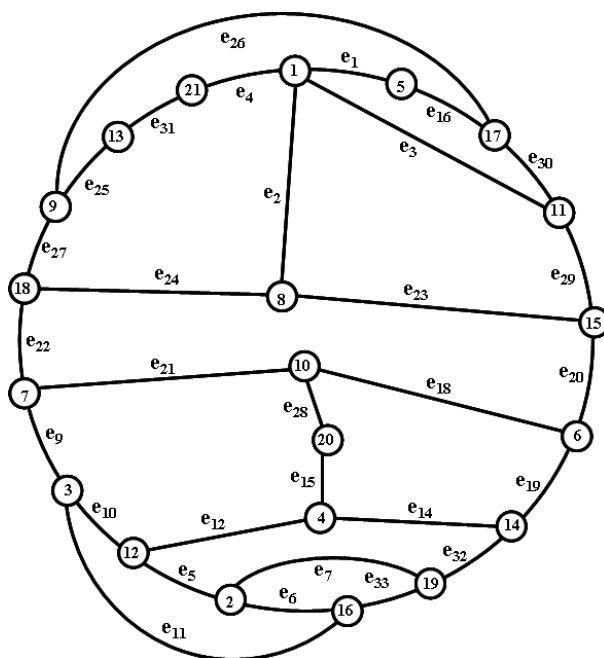


Рис. 4.24. Рисунок плоской части графа с добавлением ребер.

Окончанием процесса служит определение подмножества простых циклов для вновь введенных ребер. Далее производится включение данного подмножества циклов во множество циклов описывающих плоский суграф и определение обода суграфа.

Последним этапом является построение вращения вершин графа для выбранного множества циклов.

4.4. Алгоритм сжимающихся отображений

шаг 1. [Выделение множества изометрических циклов графа]. Выделяем множества изометрических циклов графа [23,55].

шаг 2. [Построение базисов подпространства циклов]. Последовательно удаляем накрывающиеся циклы из множества изометрических циклов. Накрывающие циклы формируются модифицированным алгоритмом Гаусса на каждом шаге исключения.. Последовательное исключение накрывающихся циклов производится до достижения количества циклов равное цикломатическому числу графа плюс один.

шаг 3. [Формирование базисов изометрических циклов]. Используя $m-n+2$ запись последней системы нелинейных циклов формируем множество базисов подпространства циклов.

шаг 4. [Выделение плоского суграфа]. Используя изменения значения функционала Понтрягина–Куратовского и соблюдая правило Эйлера, последовательным исключением циклов определяем для каждого базиса плоский суграф.

шаг 5. [Добавление ребер в плоский суграф]. Методами векторной алгебры пересечений добавляем в каждый плоский суграф дополнительные ребра. В результате добавления ребер образуются новые плоские суграфы. Производим формирование циклов и обода для новых плоских суграфов.

шаг 6. [Формирование плоских топологических рисунков]. Для множества плоских суграфов вычисляем вращение вершин, тем самым производим построение плоского топологического рисунка.

шаг 7. [Выбор топологических рисунков с минимальным числом удаленных ребер]. Среди топологических рисунков плоского суграфа выбираем суграфы с минимальным количеством удаленных ребер.

Определим вычислительную сложность алгоритма. Основой для вычисления является количество изометрических циклов графа $n(n-1)(n-2)/6 = m(n-2)/3 \approx mn \approx n^3$. Множество изометрических циклов будем считать заданным. Тогда для построения кортежа K_τ придется перебрать все элементы кортежа циклов каждый раз удаляя цикл, это потребует выполнения $mn \times m$ операций. Так как каждый цикл - это суграф состоящий из ребер. Далее в процесс включается модифицированный метод Гаусса с вычислительной сложностью сложения всех циклов для определения независимости одной строки. Очевидно, что это будет величина порядка $mn(mn \times m) = m^3 n^2$. В общем случае таких операций будет не больше чем количество изометрических циклов в графе. Поэтому вычислительную сложность получения базиса, состоящего из изометрических циклов, можно рассчитать как $p_1 = mn(m^3 n^2) = m^4 n^3$.

Процесс удаления циклов до значения функционала Маклейна равного нулю, соблюдая правило Эйлера, из базиса можно рассматривать как подсчет операций вычисления функционала Маклейна для каждого цикла с удалением одного и только одного ребра $p_2 = (m-n+1) \times m \approx m^2$. Окончательно имеем, что количество операций для выделения плоской части графа равно $p_1 + p_2 = m^4 n^3 + m^2$. Вычислительная сложность алгоритма может быть записана в виде: $O(m^4 n^3)$.

Выводы

Рассматриваются окончательные этапы построения топологического рисунка плоской части непланарного графа. Методами векторной алгебры пересечений строится дополнительная система простых циклов графа. Выделенная система циклов индуцирует (порождает) вращение вершин графа. Описан алгоритм построения топологического рисунка плоской части непланарного графа с минимальным числом удаленных ребер с полиномиальной вычислительной сложностью.

Заключение

В работе рассматривается один из методов решения задачи построения топологического рисунка плоской части непланарного графа с минимальным числом удаленных ребер – метод сжатых отображений. Представлен алгоритм с полиномиальной вычислительной сложностью.

В последнее время разработано большое количество разнообразных методов решения задач дискретной оптимизации, что отражено в многочисленной литературе по этой проблематике [15,35,39].

Потребности практики диктуют необходимость создания общих схем решения [11]. Однако каждая сложная задача дискретной оптимизации специфична. Это находит отражение в методах разбиения задачи на подзадачи, определения последовательности этапов решения. Требуется увязка нескольких математических моделей их представления и описания.

Решение задачи построения топологического рисунка плоской части непланарного графа с минимальным числом удаленных ребер относится к сложно решаемым задачам. Здесь решение предполагает не только выделения плоской части графа во множественно-теоретическом представлении, но и создание топологического рисунка графа требующего своеобразного абстрактного представления.

Процесс решения разбит на четыре этапа:

На первом этапе производится выделение базиса состоящего из изометрических циклов графа с применением метода Гаусса.

Второй этап предназначен для выделения из базиса подмножество циклов с нулевым значением функционала Маклейна и соблюдения условий Эйлера.

на третьем этапе, методами векторной алгебры пересечений производится введение дополнительных ребер и формирование дополнительного подмножества циклов.

Последний четвертый этап осуществляет преобразование подмножества циклов во вращение вершин графа, тем самым создается описание топологического рисунка плоского су-графа.

СПИСОК ИСПОЛЬЗУЕМОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Алексеев В.В. Графы. Модели вычислений. Структуры данных. / В.В. Алексеев, В.А. Таланов - Нижний Новгород, 2005. – 307 с.
2. Апанович З.В. Средства для работы с графами большого объема: построение и оптимизация компоновочных планов / З.В. Апанович // Системная информатика: Сб. науч. тр. – Новосибирск: Изд-во СОРАН, 2006. – Вып. 10. Методы и модели современного программирования. – С. 7–58.
3. Апанович З.В. От рисования графов к визуализации информации. / З.В. Апанович - Новосибирск, РАН, 2007. – 24 с.
4. Асанов М.О. Дискретная математика: графы, матроиды, алгоритмы / М.О. Асанов, В.А. Баранский, В.В. Расин Ижевск: Регулярная и хаотическая динамика, 2001. – 288 с.
5. Беллерт С. Анализ и синтез электрических цепей методом структурных чисел / С. Беллерт, Г. Возняцки - М.: Мир, 1972. - 332 с.
6. Берж К. Теория графов и её применения / К. Берж - М.: ИЛ, 1962. – 320 с.
7. Гельфанд И.М. Лекции по линейной алгебре / И.М. Гельфанд М.: Наука, 1999. – 319 с.
8. Гэри М. Вычислительные машины и труднорешаемые задачи: Пер. с англ. / М. Гэри., Д. Джонсон - М.: Мир.- 1982. – 416 с.
9. Емеличев В.А. Многогранники, графы и оптимизация./ В.А. Емеличев., М.М. Ковалев, М.К. Кравцов. - М.: Наука, 1981.– 344 с.
10. Емеличев В.А. Лекции по теории графов / В.А. Емеличев, О.И. Мельников, В.И.Сарванов, Р.И. Тышкевич - М.: Наука. ГРФМЛ.-1990. – 384 с.
11. Емеличев В.А., Комлик В.И. Метод построения последовательности планов для решения задач дискретной оптимизации.-М.: Наука. ГРФМЛ, 1981.-208 с.
12. Зыков А.А. Теория конечных графов. / А.А. Зыков - Новосибирск: ГРФМЛ.- 1963.- 542 с.
13. Зыков А.А. Основы теории графов. / А.А. Зыков – М.: Наука, ГРФМЛ, 1987. – 384 с.
14. Касьянов В.Н. Графы в программировании: обработка, визуализация и применение. / В.Н. Касьянов, В.А. Евстигнеев - СПб.: БХВ-Петербург, 2003. – 1104 с.
15. Ковалев М. М. Дискретная оптимизаций (целочисленное программирование). Изд. 2-е, стереотипное. — М.: Едиториал УРСС, 2003. — 192 с.
16. **И.В.Козин**, Фрагментарные модели для некоторых экстремальных задач на графах / Козин И.В., Полюга С.И. // Математические машины и системы. – 2014. – № 1. – С. 143 – 150.

17. Кристофидес Н. Теория графов. Алгоритмический подход. / Н. Кристофидес - М.:Мир.- 1978. – 432 с.
18. Курош А.Г. Курс высшей алгебры (9-е издание). / А.Г. Курош М.: Наука, 1968 – 431 с.
19. Курош А.Г. Теория групп. / А.Г. Курош - М.: Наука, 1967. – 648 с.
20. Курапов С.В. Топологические методы построения рисунка графа / С.В. Курапов, В.А. Чеченя //Научный журнал Запорізького національного технічного університету: Радіоелектроніка, Інформатика, управління. - Запоріжжя: ЗНТУ, 2013, № 1(18). - С.72-81.
21. Курапов С.В. Методы построения топологического рисунка графа. / С.В. Курапов, А.В.Толок // Автоматика и телемеханика - № 9. - 2013.- С.78-97.
22. Курапов С.В., Давидовский М.В. Проверка планарности и построение топологического рисунка плоского графа (поиском в глубину) //Прикладная дискретная математика. - 2016. № 2(32). С.100 - 114.
23. Курапов С.В., Давидовский М.В., Клиценко А.А. Изометрические циклы графа // Вісник Запорізького національного університету: Збірник наук. статей. Фіз.-мат. науки. - № 1. - Запоріжжя: ЗНУ. - 2016.- С.121-137.
24. Курапов С.В., Давидовский М.В. Алгоритмы построения топологического и геометрического рисунков графа СЭП // Компоненты и технологии. - 2017. № 7. с. 92 - 96.
25. Курапов С.В., Давидовский М.В. Алгоритмы построения топологического и геометрического рисунков графа СЭП. Распределение вершин по уровням // Компоненты и технологии. - 2017. № 8. с. 120 - 123.
26. Курапов С.В., Давидовский М.В. Единичные и изометрические циклы в графе // Вісник Запорізького національного університету: Збірник наук. статей. Фіз.-мат. науки. - № 2. - Запоріжжя: ЗНУ. - 2017.- С.116-130.
27. С.В.Курапов, А.В.Толок, “Построение топологического рисунка максимально плоского суграфа не планарного графа”, *Автомат. и телемех.*, 2018, № 5, 24–45с; *Autom. Remote Control*, **79**:5 (2018), 793–810
S. V. Kurapov and A. V. Tolok. Construction of a Topological Drawing of the Most Planar Subgraph of the Non-planar Graph / *AUTOMATION AND REMOTE CONTROL* Vol. 79. - No. 5. - 2018. – 793-810p.
28. Курапов С.В., Давидовский М.В., Сгадов С.А. Выделение плоской части графа. Матроиды и алгебра структурных чисел // Компоненты и технологии. - 2018. № 9. с. 56 - 59.

29. Курапов С.В., Давидовский М.В., Толоч А.В. [Модифицированный алгоритм проверки планарности графа и построение топологического рисунка. Метод нитей.](#) / Научная визуализация, 2018, том 10, номер 4, страницы 53 - 74, DOI: [10.26583/sv.10.4.05](#)
30. Курапов С.В., Давидовский М.В., Толоч А.В. [Метод визуализации рисунка непланарного графа.](#) / Научная визуализация, 2019, том 11, номер 2, страницы 126 - 142, DOI: [10.26583/sv.10.4.05](#)
31. Курапов С.В., Давидовский М.В., Толоч А.В. Генерация топологического рисунка плоской части непланарного графа. / Научная визуализация, 2020, том 12, номер 1, страницы 90 - 102, DOI: [10.26583/sv.12.1.08](#)
32. Липский В. Комбинаторика для программистов: Пер. с польс. / В. Липский -М.:Мир.-1988.- 213 с.
33. Мак-Лейн С. Комбинаторное условие для плоских графов / С. Мак-Лейн //В кн.: Кибернетический сборник. Новая серия. - 1970.-вып. 7.- С.68-77.
34. Мелихов А.Н. Применение графов для проектирования дискретных устройств. / А.Н.Мелихов, Л.С. Берштейн, В.М. Курейчик - М.: Наука. ГРФМЛ.-1974. – 304 с.
35. Михалевич В. С. Последовательные алгоритмы оптимизации и их применение. I, II.— Кибернетика, 1965, № 1, с. 45—56; № 2, с. 85—88.
36. Носов В.А. Комбинаторика и теория графов / В.А. Носов - М.: МИЭМ, 1999
37. Нечепуренко М.И. Алгоритмы и программы решения задач на графах и сетях / М.И. Нечепуренко, В.К. Попков, С.М. Майнагашев и др. - Новосибирск: Наука. Сиб. отд-ние.-1990. – 515 с.
38. Оре О. Теория графов / О.Оре - М.: Наука, ГРФМЛ.- 1980. – 336 с.
39. Пападимитриу Х. Комбинаторная оптимизация. Алгоритмы и сложность.: Пер. с англ. / Х. Пападимитриу, К. Стайглиц - М.: Мир.- 1985. – 512 с.
40. Перепелица В.А. Дискретная математика и моделирование в условиях неопределенности данных./ В.А. Перепелица, Ф.Б. Тебуева. – Издательство «АкадемияЕстествознания», 2007. – 151 с.
41. Пупырев С.Н., Тихонов А.В. Визуализация динамических графов для анализа сложных сетей // Моделирование и анализ информационных систем. – 2010. – № 1.
42. Раппопорт Л.И. Координатно-базисная система представления топологии электронных схем. / Л.И. Раппопорт, Б.Н. Мороговский, С.А. Поливцев // В кн.: Системы и средства автоматизации очистного и проходческого оборудования - М. :Недра. - 1980. - С.56-64.

43. Раппопорт Л.И. Векторная алгебра и проектирование топологии соединений / Л.И. Раппопорт, Б.Н. Мороговский, С.А. Поливцев // В кн.: Вопросы автоматизации проектирования интегральных схем. - Киев:ИК УССР.- 1976.- С.107-124.
44. Раппопорт Л.И. Векторная алгебра пересечений / Л.И. Раппопорт, Б.Н. Мороговский, С.А. Поливцев // В кн.: Многопроцессорные вычислительные структуры.- Таганрог.- 1982. - вып.2(11).- С.53-56.
45. Рейнгольд Э. Комбинаторные алгоритмы, теория и практика. / Э. Рейнгольд, Ю. Нивергельт, Н. Дер - М.: Мир.- 1980. – 480 с.
46. Рингель Г. Теорема о раскраске карт./ Г. Рингель - М.: Мир.- 1977. – 126 с.
47. Свами М. Графы, сети и алгоритмы: Пер. с англ. / М. Свами, К. Тхуласираман - М.: Мир.- 1984. – 455 с.
48. Татт Т. Теория графов: Пер. с англ. / Т. Татт - М.: Мир.- 1988, - 424 с., ил. ISBN 5-03-001001-7.
49. Тараканов В.Е. Комбинаторные задачи и (0,1)-матрицы / В.Е. Тараканов - М.:Наука. ГРФМЛ.- 1985. – 192 с.
50. Трохименко Я. К. Метод обобщенных чисел и анализ линейных цепей, М., Изд-во «Советское радио», 1972, - 314 с.
51. Харари Ф. Теория графов. - пер. с англ. Козырева В.П. / под ред. Гаврилова В.Г. / Ф. Харари – М.: Мир. – 1973. – 300 с.
52. Хопкрофт Дж.Е., Тарьян Р.Е. Изоморфизм планарных графов / Дж.Е. Хопкрофт, Р.Е. Тарьян //В кн.: Кибернетический сборник. Новая серия.- 1975.-вып. 12.- С.39-61.
53. Di Battista G. Algorithms for Drawing Graphs: an Annotated Bibliography / G. Di Battista, P. Eades, R. Tamassia, I.G. Tollis // Computational Geometry, Theory and Applications. – 1994. – N 4. – P. 235–282.
54. Card S. K. Readings in Information Visualization: Using Vision to Think. / S. K. Card, J. D. Mackinlay, B. Shneiderman – San Francisco: Morgan Kaufmann, 1999.
55. Kavitha T., Liebchen C., Mehlhorn K., Dimitrios M., Romeo Rizzi, Ueckerdt T., Katharina A. Cycle Bases in Graphs Characterization, Algorithms, Complexity, and Applications // Comput. Sci. Rev. 2009. V. 3. P. 199–243.
56. Tamassia Roberto. Handbook of Graph Drawing and Visualization / Roberto Tamassia Chapman and Hall/CRC. – 2013.- 844 p.
57. Kron's Gabriel. Diakoptics, 1963, 166 p.

