


Ризик у страховій справі (Частина 1)

- 
1. Таблична модель поведінки клієнта страхової компанії.
 2. Реакція клієнта на зміну параметрів страхування.
 3. Математична модель клієнта страхової компанії.
 4. Гранична сподівана корисність та сподівання граничної корисності.
 5. Аналіз рівноваги.
 6. Ймовірність страхового випадку та реакція клієнта страхової компанії.
 7. Прибуток страхової компанії та його корисність.
 8. Модель страхової компанії.
 9. Нейтральність до ризику страхової компанії.
 10. Розрахунок реакції клієнта страхової компанії.
 11. Оптимальна ціна страхування.
 12. Умови прибутковості страхової компанії.
 13. Параметричний аналіз взаємодії страхової компанії та її клієнта.

Таблична модель поведінки клієнта страхової компанії

Припущення моделі:

- Клієнт страхової компанії є власником певного *активу*, величина якого виражається у грошовій формі. A – величина активу.
- Можливий *страховий випадок*, коли клієнт втрачає актив, або його частку. Спрощений випадок, коли актив або *повністю недоторканий*, або *повністю вилучений*.
- Клієнт може оцінити *ймовірність* страхового випадку (π).
- Власник активу може звернутися до *страхової компанії* й *застрахувати актив або його частку*.

Таблична модель поведінки клієнта страхової компанії

Умови страхування, запропоновані страховою компанією:

- Клієнт сплачує компанії *страховий внесок*, пропорційний частці *страхованого активу*. r – *питомий страховий внесок* (ціна страхування).
- Якщо трапляється *страховий випадок*, компанії сплачує клієнтові *страхову винагороду*, яка пропорційна частці *застрахованого активу*. q – *питома страхова винагорода* (страхова винагорода, що припадає на одиницю *страхованого активу*).

Таблична модель поведінки клієнта страхової компанії

Припущення щодо поведінки страхової компанії та її клієнтів:

- Клієнт залежно від питомого страхового внеску та питомої страхової винагороди *обирає частку страхового активу*.
- Клієнт є *несхильним до ризику*.
- Моделлю системи цінностей людини, яка не байдужа до ризику, є *сподівана корисність*.
- Функція корисності за Нейманом-Моргенштерном клієнта є монотонно зростаючою.

Таблична модель поведінки клієнта страхової компанії

Числовий приклад:

Величина активу становить 20000 грн. Власник активу – особа не схильна до ризику. Гранична корисність власника задається формулою (інтервали зміни активу вказано у тисячах):

$$MU = \begin{cases} 20, & 0 \leq x \leq 5 \\ 10, & 5 < x \leq 10 \\ 5, & 10 < x \leq 15 \\ 1, & 15 < x \leq 20 \end{cases}$$

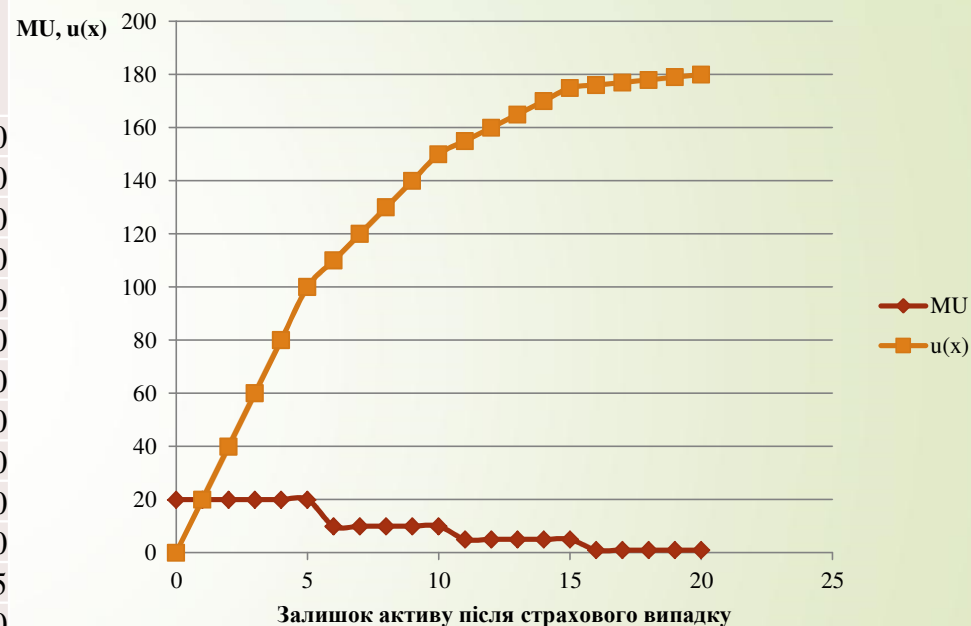
Ймовірність страхового випадку $\pi = 0,0001$.

Питомий страховий платіж $r=0,001$.

Питома страхова винагорода $q = 1$.

Таблична модель поведінки клієнта страхової компанії

Величина залишку активу (x) після страхового випадку (тис. грн)	Гранична корисність (MU)	Корисність (u(x))
0	20	0
1	20	20
2	20	40
3	20	60
4	20	80
5	20	100
6	10	110
7	10	120
8	10	130
9	10	140
10	10	150
11	5	155
12	5	160
13	5	165
14	5	170
15	5	175
16	1	176
17	1	177
18	1	178
19	1	179
20	1	180



Таблична модель поведінки клієнта страхової компанії

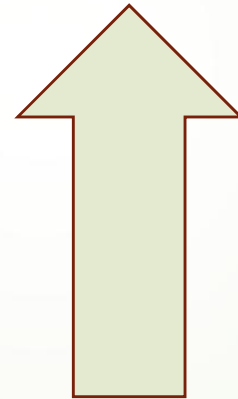
Обсяг страхування (тис. грн)	Сподівана корисність	
0	179,9820	$=0,0001*0+(1-0,0001)*(180-0,001*0)$
1	179,9830	$=0,0001*20+(1-0,0001)*(180-0,001*1)$
2	179,9840	$=0,0001*40+(1-0,0001)*(180-0,001*2)$
3	179,9850	$=0,0001*60+(1-0,0001)*(180-0,001*3)$
4	179,9860	$=0,0001*80+(1-0,0001)*(180-0,001*4)$
5	179,9870	$=0,0001*100+(1-0,0001)*(180-0,001*5)$
6	179,9870	$=0,0001*110+(1-0,0001)*(180-0,001*6)$
7	179,9870	$=0,0001*120+(1-0,0001)*(180-0,001*7)$
8	179,9870	$=0,0001*130+(1-0,0001)*(180-0,001*8)$
9	179,9870	$=0,0001*140+(1-0,0001)*(180-0,001*9)$
10	179,9870	$=0,0001*150+(1-0,0001)*(180-0,001*10)$
11	179,9865	$=0,0001*155+(1-0,0001)*(180-0,001*11)$
12	179,9860	$=0,0001*160+(1-0,0001)*(180-0,001*12)$
13	179,9855	$=0,0001*165+(1-0,0001)*(180-0,001*13)$
14	179,9850	$=0,0001*170+(1-0,0001)*(180-0,001*14)$
15	179,9845	$=0,0001*175+(1-0,0001)*(180-0,001*15)$
16	179,9836	$=0,0001*176+(1-0,0001)*(180-0,001*16)$
17	179,9827	$=0,0001*177+(1-0,0001)*(180-0,001*17)$
18	179,9818	$=0,0001*178+(1-0,0001)*(180-0,001*18)$
19	179,9809	$=0,0001*179+(1-0,0001)*(180-0,001*19)$
20	179,9800	$=0,0001*180+(1-0,0001)*(180-0,001*20)$



Таблична модель поведінки клієнта страхової компанії

Закон спадаючої граничної сподіваної корисності:

кожна додаткова одиниця застрахованого активу приносить його власнику все менший приріст сподіваної корисності.



Гранична сподівана корисність – приріст сподіваної корисності у разі збільшення обсягу страхування на одиницю (малу).

Таблична модель поведінки клієнта страхової компанії

Обсяг страхування (тис. грн)	Гранична сподівана корисність
0	
1	0,0010
2	0,0010
3	0,0010
4	0,0010
5	0,0010
6	0,0000
7	0,0000
8	0,0000
9	0,0000
10	0,0000
11	-0,0005
12	-0,0005
13	-0,0005
14	-0,0005
15	-0,0005
16	-0,0009
17	-0,0009
18	-0,0009
19	-0,0009
20	-0,0009

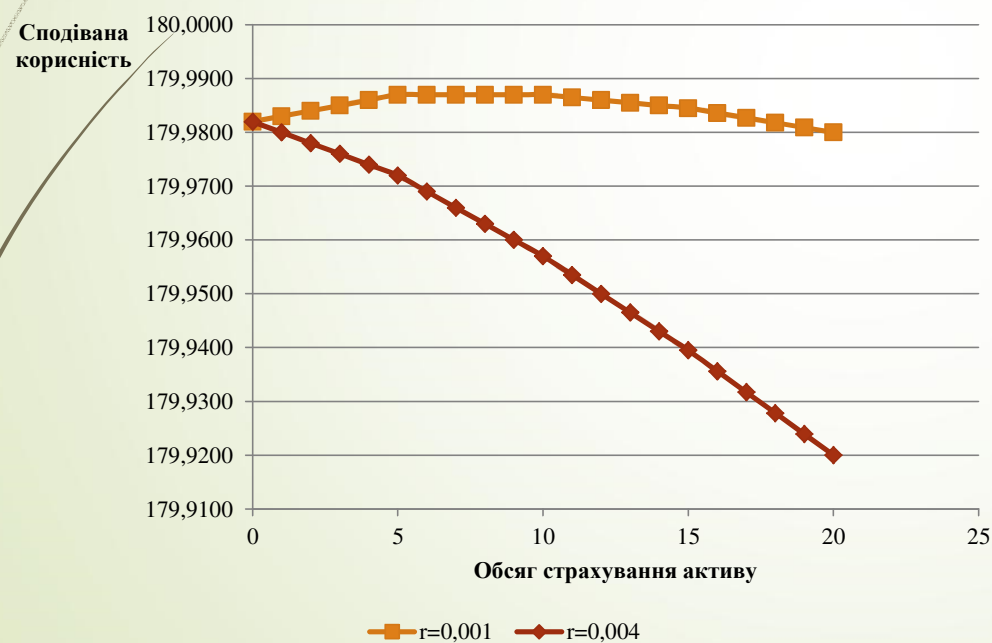
Гранична сподівана корисність



Таблична модель поведінки клієнта страхової компанії

Реакція клієнта на зміну параметрів страхування:

якщо зафіксувати страхову премію, то страховий платіж можна інтерпретувати як плату за ризик.



Обсяг страхування (тис. грн)	Сподівана корисність (r=0,001)	Сподівана корисність (r=0,004)
0	179,9820	179,982
1	179,9830	179,98
2	179,9840	179,978001
3	179,9850	179,976001
4	179,9860	179,974002
5	179,9870	179,972002
6	179,9870	179,969002
7	179,9870	179,966003
8	179,9870	179,963003
9	179,9870	179,960004
10	179,9870	179,957004
11	179,9865	179,953504
12	179,9860	179,950005
13	179,9855	179,946505
14	179,9850	179,943006
15	179,9845	179,939506
16	179,9836	179,935606
17	179,9827	179,931707
18	179,9818	179,927807
19	179,9809	179,923908
20	179,9800	179,920008

Математична модель клієнта страхової компанії

Позначення моделі:

- A – величина активу клієнта;
- π - ймовірність страхового випадку;
- r – питомий страховий внесок;
- q – питома страхова винагорода;
- x – величина страхового активу;
- $u(\cdot)$ – функція корисності за Нейманом-Моргенштерном клієнта, яка визначена на залишку активу після страхового випадку.

Математична модель клієнта страхової компанії

$$U(x) = \pi u(qx) + (1 - \pi)u(A - rx) \rightarrow \max, 0 \leq x \leq A \quad (1)$$

qx – сума відшкодування клієнтові, якщо трапився страховий випадок;

$A - rx$ – залишок активу у клієнта, якщо страховий випадок не трапився;

$u(qx)$ - корисність у разі страхового випадку;

$u(A - rx)$ - корисність за відсутності страхового випадку;

$U(x)$ - сподівана корисність за обсягу страхування x .

Гранична сподівана корисність та сподівання граничної корисності

$MU(A - rx) \times r$ – гранична корисність страхування за відсутності страхового випадку (гранична шкода);

$MU(qx) \times q$ – гранична корисність страхування за наявності страхового випадку;

Гранична сподівана корисність

$$\pi \times MU(qx) \times q + (1 - \pi) \times MU(A - rx) \times (-r) \quad (2)$$

$$U'(x) = \pi u'(qx)q + (1 - \pi)u'(A - rx)(-r) \quad (3)$$

Теорема про рівновагу

Припустимо, клієнт – несхильний до ризику й має монотонно зростаючу та диференційовану функцію корисності. У цьому разі:

$$\text{якщо } \frac{1-\pi}{\pi} \times \frac{r}{q} > \frac{u'(0)}{u'(A)}, \text{ то клієнт ухиляється від страхування;} \quad (4)$$

$$\text{якщо } \frac{1-\pi}{\pi} \times \frac{r}{q} < \frac{u'(A)}{u'((1-r)A)}, \text{ то клієнт страхує весь актив;} \quad (5)$$

$$\text{якщо } \frac{u'(A)}{u'((1-r)A)} < \frac{1-\pi}{\pi} \times \frac{r}{q} < \frac{u'(0)}{u'(A)}, \text{ то клієнт страхує частку активу } x^*,$$

причому

$$\pi u'(x^*)q = (1 - \pi)u'(A - rx^*)r \quad (6)$$

Теорема про рівновагу (окремий випадок)

Якщо страхова компанія повністю відшкодовує актив клієнтові ($q = 1$), то:

$$\text{якщо } \frac{1-\pi}{\pi} \times r > \frac{u'(0)}{u'(A)}, \text{ то } x^* = 0; \quad (7)$$

$$\text{якщо } \frac{1-\pi}{\pi} \times r < \frac{u'(A)}{u'((1-r)A)}, \text{ то } x^* = A; \quad (8)$$

$$\text{якщо } \frac{u'(A)}{u'((1-r)A)} < \frac{1-\pi}{\pi} \times r < \frac{u'(0)}{u'(A)}, \text{ то } 0 < x^* < A,$$

причому

$$\pi u'(x^*) = (1 - \pi)u'(A - rx^*)r \quad (9)$$

Ймовірність страхового випадку та реакція клієнта страхової компанії

Дослідимо простий випадок ($q = 1$).

Із несхильності до ризику особи, яка страхується, а звідси – з увігнутості її функції корисності коли $r < 1$ впливає:

$$u'(0) > u'((1-r)A) > u'(A). \quad (10)$$

Звідси:

$$\frac{u'(0)}{u'(A)} > \frac{u'((1-r)A)}{u'(A)} > 1 > \frac{u'(A)}{u'((1-r)A)}. \quad (11)$$

Величина $\frac{1-\pi}{\pi} \times r$ за фіксованого питомого платежу r спадає у разі зростання π .