

# Геометричні застосування визначеного інтеграла

## 1. Обчислення площ плоских фігур

З геометричного змісту визначеного інтеграла випливає методика його застосування до обчислення площ плоских фігур, заданих різноманітними способами, що була наведена у теоретичній частині. Розглянемо приклади знаходження площ за допомогою визначеного інтеграла.

**Приклад 1.** Обчислити площу фігури, обмеженої прямими  $x = 0$ ,  $x = 2$  та кривими  $y = 2^x$ ,  $y = 2x - x^2$ .

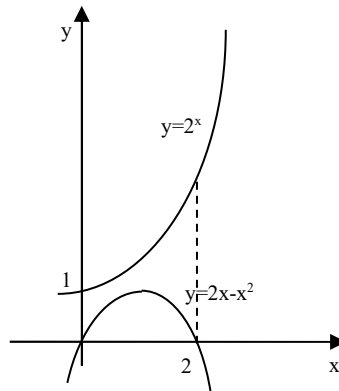


Рис. 1

**Розв'язання.** Побудуємо задану фігуру (рис. 1). Виходячи з розташування графіків кривих  $y = 2^x$  та  $y = 2x - x^2$  при  $x \in [0; 1]$ , знаходимо площу криволінійної трапеції, обмеженої заданими лініями:

$$S = \int_0^2 (2^x - (2x - x^2)) dx = \left. \frac{2^x}{\ln 2} \right|_0^2 - \left. x^2 \right|_0^2 + \left. \frac{x^3}{3} \right|_0^2 = \frac{3}{\ln 2} - 4 + \frac{8}{3} = \frac{3}{\ln 2} - \frac{4}{3}.$$

**Приклад 2.** Знайти площу області, обмеженої лініями  $y = x - 1$  та  $y^2 = x + 1$ .

**Розв'язання.** Дана область зображена на рис.2. Вона є об'єднанням двох криволінійних трапецій  $D_1$  та  $D_2$ , що визначаються нерівностями:

$$D_1 : \begin{cases} -1 \leq x \leq 0, \\ -\sqrt{x+1} \leq y \leq \sqrt{x+1} \end{cases}; \quad D_2 : \begin{cases} 0 \leq x \leq 3, \\ x-1 \leq y \leq \sqrt{x+1} \end{cases}.$$

Знайдемо площу  $s$  заданої області як суму площ  $S_1$  та  $S_2$  областей  $D_1$  та  $D_2$ .

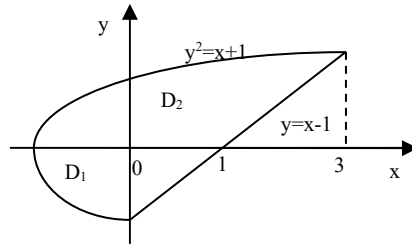


Рис. 2

$$S_1 = \int_{-1}^0 \left( \sqrt{x+1} - (-\sqrt{x+1}) \right) dx = 2 \int_{-1}^0 \sqrt{x+1} \cdot dx = \frac{4}{3} (x+1)^{\frac{3}{2}} \Big|_{-1}^0 = \frac{4}{3}.$$

$$S_2 = \int_0^3 \left( \sqrt{x+1} - (x-1) \right) dx = \frac{2}{3} (x+1)^{\frac{3}{2}} \Big|_0^3 - \frac{(x-1)^2}{2} \Big|_0^3 = \frac{16}{3} - \frac{2}{3} - 2 + \frac{1}{2} = \frac{19}{6}.$$

Для площі  $S$  заданої області знаходимо:

$$S = S_1 + S_2 = \frac{19}{6} + \frac{4}{3} = \frac{9}{2}.$$

**Приклад 3.** Знайти площу фігури, обмеженої параболою  $y = -x^2 - 2x + 3$ , дотичною до неї, проведеної у точці з абсцисою  $x = 2$  та віссю ординат.

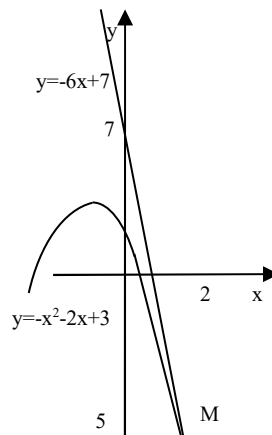


Рис. 3

**Розв'язання.** Знайдемо рівняння вказаної дотичної. Оскільки  $y(2) = -5$ ,  $y'(2) = -6$ , то рівняння дотичної має вигляд  $y + 5 = -6(x - 2)$ , або  $y = -6x + 7$ . Знаходимо точку перетину параболи та дотичної:

$$\begin{aligned} -x^2 - 2x + 3 &= -6x + 7, \\ x^2 - 4x + 4 &= 0 \Rightarrow x = 2. \end{aligned}$$

Фігура, визначена в умові задачі, побудована на рис.3. Парабола розташована під дотичною на  $[0; 2]$ . Звідси випливає, що площа фігури:

$$S = \int_0^2 [7 - 6x - (-x^2 - 2x + 3)] dx = \int_0^2 (x - 2)^2 dx = \frac{(x - 2)^3}{3} \Big|_0^2 = \frac{8}{3}.$$

**Приклад 4.** Знайти площу фігури, обмеженої лінією  $\rho = a \sin 3\varphi$ .

**Розв'язання.** Дана крива (трилисник) зображена на рис. 4. Вона утворює три петлі рівної площі, кожна з яких обмежує криволінійний сектор. Обчислимо площу одного такого сектора, використавши формулу

$$S = \frac{1}{2} \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \rho^2(\varphi) d\varphi.$$

Оскільки  $\rho \geq 0$  і  $a > 0$ , то  $\sin 3\varphi \geq 0$ , звідки  $2k\pi \leq 3\varphi \leq \pi + 2k\pi$ , отже,

$$\frac{2k\pi}{3} \leq \varphi \leq \frac{\pi + 2k\pi}{3}.$$

У нашому випадку для сектора у першій чверті координатної площини при  $k = 0$   $0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{3}$ . Тому його площа дорівнює:

$$\begin{aligned} S_1 &= \frac{1}{2} \int_0^{\pi/3} a^2 \sin^2 3\varphi d\varphi = \frac{a^2}{4} \int_0^{\pi/3} (1 - \cos 6\varphi) d\varphi = \\ &= \frac{a^2}{4} \left( \varphi - \frac{1}{6} \sin 6\varphi \right) \Big|_0^{\pi/3} = \frac{\pi a^2}{12}. \end{aligned}$$

Шукана площа  $S = 3S_1 = \frac{\pi a^2}{4}$ .

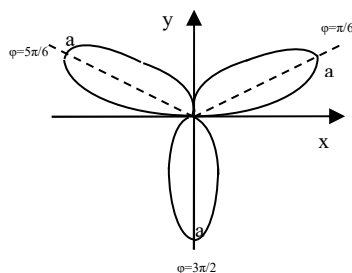


Рис. 4

### Вправи для самостійного розв'язання:

1. Знайти площу фігури, обмеженої лініями  $y = -x^2$ ,  $x + y + 2 = 0$ .  
(Відповідь: 4,5)
2. Знайти площу фігури, обмеженої лініями  $y = \frac{16}{x^2}$ ,  $y = 17 - x^2$ .  
(Відповідь: 18)
3. Знайти площу фігури, обмеженої лініями  $y = \frac{x^2}{4}$ ,  $y = 3x - \frac{x^2}{2}$ .  
(Відповідь: 8)
4. Знайти площу фігури, обмеженої лінією  $\rho = a \cos 5\varphi$ . (Відповідь:  $\frac{\pi a^2}{4}$ .)

## 2. Знаходження об'ємів тіл обертання

Розглянемо приклади, пов'язані з використанням визначеного інтеграла для знаходження об'ємів тіл обертання.

**Приклад 5.** Знайти об'єм тіла, що утворене обертанням криволінійної трапеції, обмеженої лініями  $y = \sqrt{x}$ ,  $y = \sqrt{2-x}$  та  $y = 0$ , навколо осі  $Ox$ .

**Розв'язання.** Дане тіло обертання схематично представлено на рис. 5. Абсцису точки перетину кривих  $y = \sqrt{x}$  та  $y = \sqrt{2-x}$  знаходимо з рівняння  $\sqrt{2-x} = \sqrt{x}$ , звідки  $x = 1$ . Шуканий об'єм знаходимо як суму об'ємів двох тіл. Для першого з них  $0 \leq x \leq 1$ ,  $0 \leq y \leq \sqrt{x}$ , для другого –

$1 \leq x \leq 2$ ,  $0 \leq y \leq \sqrt{2-x}$ . Використавши для обчислення кожного з цих об'ємів формулу

$$V = \pi \int_a^b y^2(x) dx,$$

отримаємо:

$$V = \pi \int_0^1 x dx + \pi \int_1^2 (2-x) dx = \frac{\pi}{2} - \pi \frac{(x-2)^2}{2} \Big|_1^2 = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} = \pi.$$

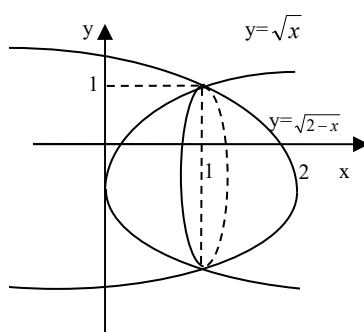


Рис. 5

**Приклад 6.** Знайти об'єм тіла, що утворене обертанням криволінійної трапеції, обмеженої лініями  $x^2 + y^2 = 16$ ,  $x = 1$ ,  $x = 3$ ,  $y = 0$  навколо осі  $Ox$ .

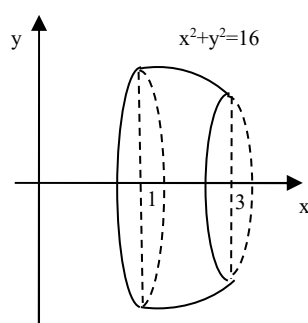


Рис. 6

**Розв'язання.** Схематичне зображення даного тіла обертання наведено на рис. 6. Для обчислення його об'єму використаємо формулу з попереднього прикладу. Маємо:

$$V = \pi \int_a^b y^2(x) dx = \pi \int_1^3 (16 - x^2) dx = \pi \left( 16x - \frac{x^3}{3} \right) \Big|_1^3 = \frac{70\pi}{3}.$$

**Приклад 7.** Знайти об'єм тіла, що утворене обертанням криволінійної трапеції, обмеженої кривими  $y = x^3$ ,  $y = 8$ ,  $x = 0$  навколо осі  $Oy$ .

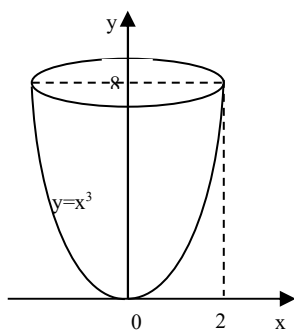


Рис. 7

**Розв'язання.** Для знаходження об'єму даного тіла, схематичне зображення якого наведене на рис. 7, використаємо формулу для об'єму тіла, утвореного обертанням криволінійної трапеції  $a \leq x \leq b$ ,  $0 \leq y \leq f(x)$  навколо осі  $Oy$ :

$$V = \pi \int_a^b x \cdot f(x) dx.$$

Знаходимо:

$$V = \pi \int_0^2 x \cdot x^3 dx = \pi \frac{x^5}{5} \Big|_0^2 = \frac{32\pi}{5}.$$

**Вправи для самостійного розв'язання:**

1. Знайти об'єм тіла, утвореного обертанням навколо осі  $Ox$  кривої  $y = 2\sqrt{x}$ ,  $0 \leq x \leq 1$ . (Відповідь:  $2\pi$ ).

2. Знайти об'єм тіла, утвореного обертанням навколо осі  $Ox$  фігури, обмеженої лініями  $y = \frac{64}{x^2 + 16}$  та  $x^2 = 8y$ . (Відповідь:  $\frac{16\pi(5\pi + 8)}{5}$ ).
3. Знайти об'єм тіла, утвореного обертанням навколо осі  $Ox$  фігури, обмеженої лініями  $y = \sqrt{x} \cdot e^x$ ,  $x = 1$ ,  $y = 0$ . (Відповідь:  $\frac{\pi(e^2 + 1)}{4}$ ).

### 3. Обчислення довжини дуги кривої

**Приклад 8.** Знайти довжину дуги кривої  $y = \operatorname{ch} x$  від точки  $A(0; 1)$  до точки  $B(b; \operatorname{ch} b)$ .

**Розв'язання.** Використаємо формулу для знаходження довжини дуги графіка функції  $y = y(x)$ , заданої у декартових координатах на відрізку  $[a; b]$ :

$$|L| = \int_a^b \sqrt{1 + y'^2} dx.$$

У нашому випадку  $y'(x) = \operatorname{sh} x$ ,  $1 + y'^2 = 1 + \operatorname{sh}^2 x = \operatorname{ch}^2 x$ , тому

$$|L| = \int_0^b \sqrt{1 + y'^2} dx = \int_0^b \operatorname{ch} x dx = \operatorname{sh} x \Big|_0^b = \operatorname{sh} b.$$

**Приклад 9.** Знайти довжину дуги  $L$  кривої, заданої у параметричній формі:  $x = a \cos^4 t$ ,  $y = a \sin^4 t$ ,  $a > 0$ .

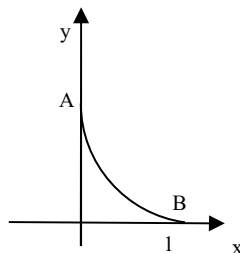


Рис. 8

**Розв'язання.** Дана крива у декартовій системі координат наведена на рис. 8. Оскільки для даної дуги  $x > 0, y > 0$ , то можна прийняти, що  $t \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ . Тоді кожному значенню  $t$  відповідає єдина точка на дузі  $L$  і можна використати формулу для обчислення довжини дуги кривої, заданої у параметричній формі:

$$|L| = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t)} dt,$$

де  $t \in [t_1; t_2]$ .

Для заданої кривої  $x'(t) = -4a \cos^3 t \cdot \sin t, y'(t) = 4a \sin^3 t \cos t$ . Тоді отримуємо:

$$\begin{aligned} x'^2(t) + y'^2(t) &= 16a^2 \cos^6 t \sin^2 t + 16a^2 \sin^6 t \cos^2 t = \\ &= 2a^2 \sin^2 2t (1 + \cos^2 2t). \end{aligned}$$

Шукана довжина дуги  $L$  дорівнює:

$$|L| = a\sqrt{2} \int_0^{\pi/2} \sqrt{1 + \cos^2 2t} \sin 2t dt = \left\| \begin{aligned} \cos 2t = z, -2 \sin 2t dt = dz, \\ t = 0 \Rightarrow z = 1, t = \pi/2 \Rightarrow z = -1 \end{aligned} \right\| = \frac{a}{\sqrt{2}} \int_{-1}^1 \sqrt{1 + z^2} dz.$$

Використаємо відомий табличний інтеграл

$$\int \sqrt{a^2 + x^2} dx = \frac{x}{2} \sqrt{x^2 \pm a^2} \pm \frac{a^2}{2} \ln \left| x + \sqrt{x^2 \pm a^2} \right| + C,$$

наведений у розширеній таблиці основних інтегралів, отримаємо:

$$|L| = \frac{a}{\sqrt{2}} \int_{-1}^1 \sqrt{1 + z^2} dz = \frac{a}{\sqrt{2}} \left( z \sqrt{1 + z^2} + \ln \left( z + \sqrt{z^2 + 1} \right) \right) \Big|_0^1 = a + \frac{a \ln(1 + \sqrt{2})}{\sqrt{2}}.$$

**Приклад 10.** Знайти довжину дуги  $L$  кривої  $r = a(1 + \cos \varphi), a > 0$  (кардіоїда), заданої у полярній системі координат.

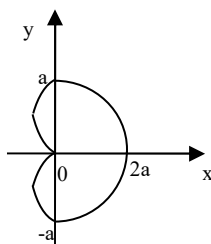


Рис. 9

**Розв'язання.** Загальний вигляд кардіоїди представлено на рис. 9. Оскільки вона є замкненою кривою, то для неї  $\varphi \in [0; 2\pi)$ . Використаємо формулу для знаходження довжини дуги кривої, заданої у полярних координатах:

$$|L| = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \sqrt{\rho^2(\varphi) + \rho'^2(\varphi)} d\varphi.$$

Для кардіоїди маємо:

$$\begin{aligned} \rho' &= -a \sin \varphi, \quad \rho^2 + \rho'^2 = a^2 (2 + 2 \cos \varphi) = 4a^2 \cos^2 \frac{\varphi}{2}. \\ |L| &= \int_0^{2\pi} 2a \left| \cos \frac{\varphi}{2} \right| d\varphi = 4a \int_0^{\pi} \cos \frac{\varphi}{2} d\varphi = 8a \sin \frac{\varphi}{2} \Big|_0^{\pi} = 8a. \end{aligned}$$

### Вправи для самостійного розв'язання.

1. Знайти довжину дуги лінії  $y = \ln x$  від  $x_1 = \sqrt{3}$  до  $x_2 = \sqrt{8}$ .  
(Відповідь:  $1 + \frac{1}{2} \ln \frac{3}{2}$ ).
2. Знайти довжину дуги кривої  $y = \ln(\sin x)$  від  $x = \frac{\pi}{3}$  до  $x = \frac{\pi}{2}$ .  
(Відповідь:  $\frac{1}{2} \ln 3$ ).
3. Знайти довжину дуги лінії  $x = \frac{t^3}{3} - t, y = t^2 + 2$  від  $t = 0$  до  $t = 3$ .  
(Відповідь: 12).