# МЕТОД НЬЮТОНА В КЛАСИЧНІЙ (ТЕОРЕТИЧНІЙ) МЕХАНІЦІ

## Вступ.

### 1. Логічна структура сучасної фізики.

Загальновідоме визначення фізики як науки про найбільш загальні й фундаментальні закони природи. Фізика – наука експериментальна, тобто її закони базуються на фактах, встановлених дослідним шляхом. Закони фізики являють собою кількісні співвідношення й формулюються математичною мовою. Залежно від цілей дослідження й глибини розуміння сутності фізичних явищ і процесів розрізняють експериментальну й теоретичну фізику. Основна мета експериментальної фізики - постановка дослідів, проведених для виявлення нових фактів, а також для перевірки справедливості фізичних гіпотез і теорій. Мета теоретичної фізики складається у формулюванні (мовою математики) законів природи, пояснення конкретних явищ на основі цих законів й у прогнозуванні нових явищ. Розходження цілей природно породжує й істотне розходження методів дослідження в області експериментальної й в області теоретичної фізики. Однак, як показує історія розвитку фізики, успішний розвиток фізичної науки можливо тільки при тісній «взаємодії» експериментальних і теоретичних методів дослідження.

У відповідності з різноманітністю досліджуваних об'єктів і фізичних форм руху матерії можна запропонувати різні критерії для логічного структурування всієї фізики (у тому числі й теоретичній фізики), тобто оптимального (як для дослідницьких цілей, так і для цілей вивчення й викладання) підрозділу її на ряд дисциплін (розділів) і встановлення логічних зв'язків між ними. Критерій структурування в запропонованих рекомендаціях ми пов’яжемо з ретроспективним аналізом магістральної лінії в історії розвитку фізики на основі поняття про фізичну картину світу (ФКС) із урахуванням досягнень сучасної ФКС.

Сучасний методологічний аналіз розвитку фізики показує, що найзагальнішим об'єктом дослідження фізики як науки є так звана ФКС, тобто ідеальна модель природи, що визначає увесь стиль фізичного мислення на даному історичному етапі розвитку фізики. Не вдаючись у докладний аналіз, укажемо тільки, що в основі поняття ФКС лежать конкретні фізичні уявлення про матерію та її складові - простір, час, рух, причинність, взаємодія та ін.

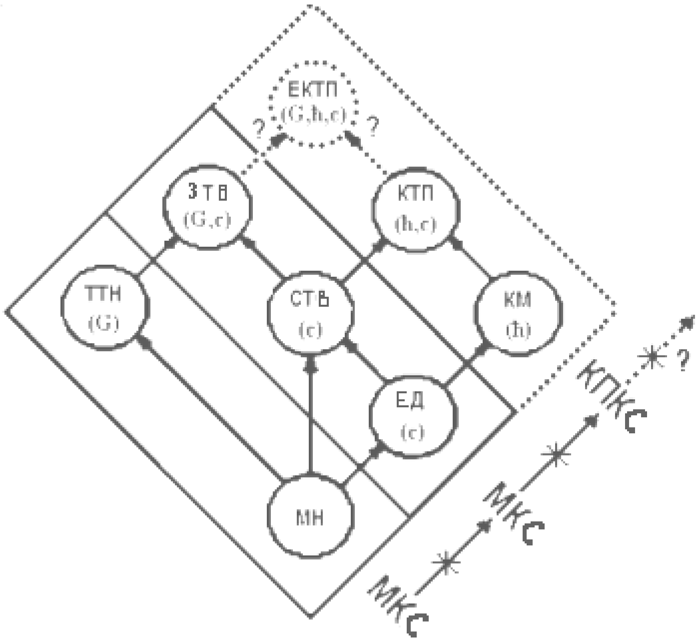
Історія фізики являє собою складний і розгалужений процес накопичення знань, емпіричних і теоретичних досліджень, випадкових і закономірних відкриттів і т.д. Але в цій простій картині є певна магістральна лінія, що визначає все інше. Ця лінія – процес формування, розвитку й зміни фізичних картин світу. Вона настільки ж важлива й суттєва для розвитку фізичного пізнання, наскільки ж, як і для розвитку людського суспільства важлива й істотна зміна суспільно-економічних формацій.

Таким чином, процес розвитку й зміни ФКС поділяє історію розвитку фізики на ряд якісно різних етапів, обумовлених, насамперед, різними уявленнями про матерію. У ході розвитку фізики можна говорити про три ФКС й, відповідно, про три етапи її розвитку. Перший етап характеризується корпускулярними, атомічними уявленнями про матерію (матерія - абсолютно дискретна, перервна) і побудованої на їхній основі механічній картині світу (МКС). Другий етап базується на континуальних уявленнях про матерію (матерія абсолютно неперервна) – такому розумінню матерії відповідає електромагнітна картина світу (ЕМКС). Третій етап характеризується сучасними квантово-польовими уявленнями про матерію (матерія й перервна й неперервна), відповідно до чого будується квантово-польова картина світу (КПКС).

Концентроване, математично строге своє вираження основні уявлення ФКС одержують в одній або декількох фундаментальних фізичних теоріях (фундаментальними ми називаємо такі теорії, які відбивають, у рамках даної ФКС, найглибшу сутність фізичної форми руху матерії й служать еталоном, базисом для побудови всіх інших фізичних теорій, що будуються на основі даної ФКС). Фундаментальними теоріями МКС є механіка Ньютона (МН) і теорія тяжіння Ньютона (ТТН). Фундаментальними теоріями ЕМКС є класична електродинаміка (ЕД), спеціальна теорія відносності (СТВ) і загальна теорія відносності (ЗТВ). У КПКС у ролі фундаментальних теорій виступають нерелятивістська квантова механіка (КМ), квантова теорія поля (КТП) і розроблювальна в цей час квантово-польова теорія всіх відомих фундаментальних взаємодій (полів) природи (сильного, слабкого, електромагнітного й гравітаційного) – назвемо її тут єдиною квантовою теорією поля (ЕКТП).

Особливу увагу варто звернути на те, що всі перераховані фундаментальні теорії (за винятком МН) містять ті або інші так звані універсальні (фундаментальні) фізичні сталі: швидкість світла у вакуумі ($c$), квантову постійну Планка ($\hbar$) і гравітаційну постійну Ньютона ($G$). Справа в тому, що саме ці фізичні сталі повинні зіграти ключову роль (на думку більшості фізиків) у завершенні побудови сучасної КПКС та її самої загальної фундаментальної теорії - ЕКТП.

Викладені міркування дозволяють представити наступну схему (див. малюнок), що наочно відбиває динаміку розвитку фундаментальних фізичних теорій і ФКС у процесі розвитку фізики (суцільні стрілки вказують напрямок побудови більше загальних теорій і ФКС, а пунктирні - незавершеність цих побудов).




Важливо підкреслити наступне. Як переконливо показує спеціальний методологічний аналіз (який ми тут опускаємо), немає (і не може бути) логічно прямого шляху побудови нових більше загальних фундаментальних теорій на базі теорій менш загальних. Так само логіка (формально) зовсім неспроможна в переході від однієї ФКС до іншої: насправді такий перехід відбувається тільки шляхом здійснення революцій у фізиці, тобто в процесі докорінної зміни старих уявлень у ФКС і заміни їх новими (на схемі ця закономірність розвитку фізики позначена «зірочками» на стрілках між різними ФКС, а також відсутністю стрілок між першими фундаментальними теоріями кожної ФКС, тобто між МН, ЕД і КМ). Тому допомогу в побудові (відкриттів) нової ФКС або принципово нової фундаментальної теорії можна «чекати» тільки від нових експериментальних фактів, тих або інших філософських ідей й інтуїції дослідника. Дане зауваження є важливим також і для «правильного» вибору методів і методик досліджень в області теоретичної фізики, що призводять до успіху (однак, це тема для окремого обговорення).

## 2. **Межі застосування фізичної теорії.**

Як показує історія розвитку фізики, будь яка фізична теорія має цілком певні межі свого застосування, тобто справедлива тільки в певній області фізичних явищ. Інакше кажучи, будь-який фізичний закон або принцип завжди є тільки відносною (але не абсолютною!) істиною. Це положення речей зовсім очевидно з погляду діалектичного матеріалізму, для якого нескінченність процесу будь-якого пізнання (у тому числі й фізичного), звідки й випливає відносність (тобто історична обмеженість) будь-яких знань (у тому числі й фізичних). Разом з тим кожна відносна істина означає крок уперед у пізнанні абсолютної істини, містить елементи абсолютної істини. Непрохідної грані між ними немає. Діалектика співвідношення абсолютної й відносної істини у фізиці конкретизується у формі методологічного принципу відповідності: будь-яка нова теорія, що претендує на більш глибокий опис фізичної реальності й на більш широку область застосування, ніж стара, повинна включати останню як свій власний (граничний) випадок. Таким чином, більш загальна фізична теорія «не відкидає» менш загальну теорію як не потрібну, а тільки встановлює її межі застосовності, що повністю зберігає значення цієї теорії, але тепер уже тільки в області її застосування. А до встановлення межі свого застосування теорія «претендує», як правило, на нічим необмежене застосування (згадаємо, наприклад, «претензії» механіки Ньютона на пояснення будь-яких фізичних явищ).

Для встановлення межі застосування фізичних теорій наведений принцип відповідності необхідно конкретизувати із урахуванням принципової важливості трьох універсальних фізичних сталих. Для цього варто врахувати, що якщо теорія містить якусь із цих сталих ($c, \hbar, G$), то вона істотно відбиває (пояснює) характеризуємі цією сталою фундаментальні властивості фізичної реальності й не враховує властивостей фізичного світу, що характеризуються іншими, що не входять у теорію універсальними сталими. Приведемо ряд прикладів, що ілюструють роль цих сталих у встановленні (з урахуванням принципу відповідності) межі застосування теорій, а, отже, і уточнення предмета дослідження кожної теорії (взагалі, предмет пізнання – це зафіксовані в досліді й включенні в процес практичної діяльності людини сторони, властивості й відносини об'єктів, досліджувані з певною метою в даних умовах та обставинах).

Наприклад, КМ, що містить тільки «$\hbar$» (див. схему вище), істотно враховує квантові властивості фізичної реальності, але не описує її релятивістських властивостей (тому що не включає сталу «$c$»!) і повністю «ігнорує» гравітацію (тому що не містить «$G$»!). А із урахуванням того, що квантові властивості органічно властиві мікрооб'єктам (електрони, протони, нейтрони, кварки, ґлюони й т.д.), то з сказаного випливає, що КМ є теорією нерелятивістського ($v << c$) руху мікрооб'єктів без врахування їхньої гравітаційної взаємодії.

Інший приклад. КТП у силу наявності в ній сталих «$\hbar$» й «$c$» описує квантово-релятивістські властивості фізичної реальності без урахування гравітації (ні «$G$»!) і є теорією мікрооб'єктів, що рухаються з будь-якими можливими швидкостями й взаємодіючих між собою за допомогою електромагнітних, сильних і слабких (але не гравітаційних!) полів. Інакше кажучи, КТП є сучасною теорією елементарних часток.

Єдиною фундаментальною фізичною теорією, що містить одночасно всі три універсальні сталі «$\hbar$», «$c$» й «$G$», є розроблювальна в цей час ЕКТП, що (якщо її вдасться побудувати) опише як фундаментальні квантово-релятивістські властивості фізичної реальності, так і всі її (відомі в цей час) фундаментальні взаємодії (сильне, електромагнітне, слабке й гравітаційне).

З врахуванням викладеного (і використовуючи наведену вище схему) легко конкретизувати принцип відповідності для встановлення межі застосування фізичних теорій і ФКС у такий спосіб:

1) у рамках даної ФКС більш загальна фундаментальна теорія (тобто теорія, що містить більше число універсальних сталих) накладає обмеження на менш загальну (з меншим числом сталих) фундаментальну теорію;

2) межі застосування найбільш загальної фундаментальної теорії даної ФКС, а, отже, і самої ФКС, не можуть бути встановлені в її рамках, а випливають із інших ФКС (і їхніх фундаментальних теорій), що включають більше число універсальних сталих $(c, \hbar, G)$.

Наприклад, на СТВ в рамках ЕМКС деякі обмеження накладаються ЗТВ. Однак повністю межі застосування СТВ можна виявити тільки в рамках КПКС.

Викладене показує, яке важливе значення має знання межі застосування теорій як у практиці досліджень, так й у практиці викладання фізики. Тому в дійсних рекомендаціях ми будемо приділяти більше уваги встановленню межі застосування понять, законів і принципів теоретичної фізики. Із цією метою вже тут згадаємо про те, що є й інші обмеження (крім викладених фундаментальних обмежень) застосування понять і законів, які випливають з модельного характеру теоретичних побудов, тому що будь-яка фізична теорія має предметом свого дослідження не реальні об'єкти (нескінченно складні), а їхні ідеальні моделі – так звані ідеалізовані об'єкти (наприклад, «матеріальна точка», «абсолютно тверде тіло», «ідеальний газ», «плоска хвиля», «елементарна частка» і т.д.). Ці модельні обмеження, застосування понять і законів (що включають ці поняття) легко випливають прямо із самих визначень ідеалізованих понять й об'єктів у процесі абстрагування від несуттєвих характеристик досліджуваного об'єкта.

На завершення відзначимо, що історія фізики XX сторіччя все більш яскраво виявляє діалектичний характер її розвитку. Тому успішному завершенню побудови КПКС буде сприяти свідоме використання фізиками всього багатства категоріального апарата й законів матеріалістичної діалектики, що служить загальною методологічною основою подальшого розвитку фізичного пізнання. Особливо важливе значення для фізики мають категорії - матерії, простору і часу (як форм існування матерії), руху, якості й кількості, причинності, взаємодії, структури та ін. У цих рекомендаціях ми будемо широко використовувати також і так звані методологічні принципи фізики, такі як принцип відповідності, принцип симетрії, принцип збереження, принцип простоти, принцип єдності ФКС та інших.

Запропоновані рекомендації відображають сучасне розуміння фундаментальних понять, законів і принципів класичної механіки Ньютона, тобто ми зосереджуємо увагу на принципових питаннях механіки як фундаментальної фізичної теорії МКС і опускаємо численні її застосування до розв’язок конкретних завдань механічного руху різних об'єктів (твердих тіл, суцільних середовищ і т.п.), докладно викладені в наявній навчальній літературі. Велику увагу ми приділяємо законам збереження енергії, імпульсу, моменту імпульсу (і їхнього зв'язку із симетріями простору й часу). Ми обираємо індуктивний метод викладання матеріалу, приймаючи за основу побудови механіки диференціальні рівняння Ньютона, які є безпосереднім узагальненням досвіду.

Матерія даних рекомендацій може бути основою для наступного вивчення методів Лагранжа, Гамільтона, Гамільтона-Якобі, а також, для чіткого з'ясування місця класичної механіки в структурі сучасного фізичного знання.

## Розділ 1. Основні поняття й закони класичної механіки.

### §1. Предмет класичної механіки.

Найбільш простою фізичною формою руху матеріальних об'єктів є механічний рух, тобто зміна із часом взаємного положення тіл або їхніх частинок у просторі. Теорією такого руху і є класична механіка.

Основу класичної механіки становлять невелике число порівняно простих гіпотез (постулатів) про властивості простору й часу, сили, маси й законах механічного руху (закони Ньютона). Ці постулати отримані як безпосереднє узагальнення дослідних даних (відзначимо тут, що теорія невиведена з емпіричного базису, від досвіду до теорії немає прямого й однозначного шляху, теорію неможливо побудувати тільки з даних досліду, тому теоретичні закони – завжди постулати, тобто більш-менш сміливе узагальнення досліду. Додамо до цього, що вже встановлена теорія не може бути зведена до її емпіричного базису, тому що охоплює незліченну кількість досліджених даних, а реальний дослід завжди кінцевий й обмежений. Теоретичне знання завжди містить деякий «поза емпіричний осад» творчого характеру, має якісну специфіку стосовно емпіричного знання).

Як будь-яка інша фізична теорія, класична механіка має певні межі застосування. Фундаментальні обмеження на її справедливість випливають із принципу відповідності та сучасної ФКС (див. Вступ). Так як МН не містить ні однієї універсальної фізичної сталої, то з погляду КПКС вона не є точною фізичною теорією, що коректно відображає відомі властивості реального фізичного світу, а є теорія виключно наближена, не враховуючих ні релятивістських, ні квантових властивостей матеріальних об'єктів. Звідси випливає особлива важливість правильного розуміння межі застосування, а, отже, і визначення місця й ролі МН у сучасній ФКС. Для цього відзначимо дві обставини: 1) хоча МН – теорія досить повільних ($v << c$) рухів макроскопічних (квантовою дією «$\hbar$» можна знехтувати, тобто формально $\hbar \to 0$) тіл, однак саме ця область рухів має «першорядне» значення для технологічної цивілізації; 2) для сучасної фізики величезне значення мають

методи фізичного пізнання, розроблені в рамках класичної механіки (особливо методи Лагранжа й Гамільтона).
Але й у рамках МКС предмет класичної механіки вимагає подальшого уточнення. Справа в тому, що навіть повільні рухи макротіл реально бувають настільки складними, що колективний (математичний) опис їх неможливий без абстрагування від багатьох несуттєвих для даного руху деталей і вивчення замість руху реальних тіл руху деяких абстрактних, ідеалізованих об'єктів. Такими об'єктами в класичній механіці є: 1) матеріальна точка – об'єкт довільно малих розмірів; 2) система матеріальних точок – сукупність тіл, кожне з яких можна розглядати як матеріальну точку; 3) абсолютно тверде тіло – така система матеріальних точок, відстані між якими в процесі руху зберігаються незмінними; 4) суцільне середовище – абстракція, застосоване при вивченні руху реального середовища (деформованого твердого тіла, рідини, газу), коли можна зневажити дискретною атомно-молекулярною структурою середовища. Всі інші поняття й закони МН є абстрактними (модельними) тією самою мірою й у тому ж змісті, що й перераховані вище абстрактні об'єкти, рух яких цими поняттями й законами описується. Тому можна стверджувати, що «точним» предметом дослідження класичної механіки є вивчення повільного $(v << c)$ руху ідеалізованих макроскопічних об'єктів, перерахованих вище (і тільки в цьому змісті її можна вважати «точною» теорією МКС).

## §2. Класичні уявлення про простір і час та їх арифметизація.

Рух матеріальних об'єктів відбувається в просторі й у часі. Тому уявлення про простір і час є основними поняттями не тільки класичної механіки, але й всієї фізики. Ці поняття відбивають порядок розташування одночасно співіснуючих об'єктів (простір) і послідовність існування явищ, що змінюють один одного (час). Матеріалізм підкреслює об'єктивний характер простору й часу, заперечує позачасову й поза-просторову реальність. Простір і час невід'ємні від матерії. У цьому проявляється їхня універсальність і загальність. Діалектичний матеріалізм визнає не просто зовнішній зв'язок часу й простору з матерією, що рухається, а вважає, що цей рух є сутністю часу й простору (тобто властивості їх повністю залежать від властивостей матерії, що рухається) і що, отже, матерія, рух, простір і час невід’ємні один від одного. Відзначимо, що саме ці ідеї одержують усе більше повне підтвердження в сучасній ФКС.

Проте, у класичній механіці (і у всієї МКС) кількісно реалізована не діалектико-матеріалістична, а метафізична концепція, відповідно до якої час і простір існують незалежно від матеріальних процесів й окремо один від одного. Інакше кажучи, в основі МН лежать найбільш примітивні уявлення про простір і час, отримані в результаті узагальнених спостережень тільки повільних рухів макроскопічних тіл в умовах Землі. Звідси випливає, що еволюція, а на деяких етапах навіть докорінної зміни цих класичних уявлень про простір і час настільки ж закономірні, як закономірний сам процес розвитку фізики.

Для кількісного опису руху тіл необхідно попередньо арифметизувати простір і час й одержати тим самим можливість виражати будь-які просторові й тимчасові співвідношення за допомогою чисел. Для цього (пам'ятаючи про те, що фізика - наука експериментальна) потрібно вказати:

1) спосіб виміру відстаней між матеріальними точками (це можна здійснити за допомогою тих або інших еталонів довжини);

2) спосіб виміру інтервалів між різними моментами часу (для цього треба мати який-небудь годинник, тобто прилад, дія якого заснована на використанні деякого періодичного процесу, що протікає рівномірно й незалежно від інших явищ природи);

3) ту або іншу систему координат, пов'язану з тілом відліку (відносно якого описується механічна форма руху). Сукупність системи координат і годин, пов'язаних з тілом відліку, називається системою відліку (СВ) у механіці. Т. ч., користуючись надалі поняттям «СВ», ми будемо завжди мати на увазі цілком певний спосіб арифметизації простору й часу й спосіб виміру просторових і часових інтервалів.

При цьому в класичній механіці постулюються наступні властивості простору й часу:

1) простір є тривимірним різноманіттям (у математичному понятті "різноманіття" закодована найважливіша постульована властивість простору - його неперервність, що дозволяє розглядати як завгодно малі, навіть нескінченно малі, інтервали в просторі й, використати всю потужність математичного аналізу; $3^x$ - мірність означає, що положення будь-якої геометричної точки в просторі можна задати в довільній системі координат трьома числами);

2) простір однорідний, тобто в ньому відсутні чим-небудь примітні точки, які можуть бути виділені серед всіх точок (всі точки простору рівноправні);

3) простір ізотропний, тобто в ньому відсутні чим-небудь примітні напрямки, які можуть бути виділені серед всіх напрямків (всі напрямки в просторі рівноправні);

4) простір є Евклідовим, тобто його метричні властивості повністю описуються системою аксіом геометрії Евкліда;

5) простір абсолютний в тому розумінні, що всі його перераховані вище властивості ніяк не пов’язані з властивостями часу й повністю незалежні від фізичних процесів, що протікають у просторі. Зокрема, цим постулатом затверджується абсолютність просторових інтервалів (тобто однаковість відстаней між двома матеріальними точками $m_1$ й $m_2$ у цей момент часу "з погляду" усіх СВ), що в декартовій системі координат можна записати так:

$$(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2 = (x'_2 - x'_1)^2 + (y'_2 - y'_1)^2 + (z'_2 - z'_1)^2 \, , \qquad (2.1)$$

або для відстаней між двома нескінченно близькими точками:

$$dx^2 + dy^2 + dz^2 = dx'^2 + dy'^2 + dz'^2 \ , \tag{2.1'}$$

де штрихами відзначені координати тих же точок в іншій СВ).

6) час є одномірним різноманіттям (тобто, він є неперервним та для завдання будь-якого моменту часу необхідно тільки одне число);

7) час однорідний, тобто немає чим-небудь примітних, виділених моментів часу (всі моменти часу рівноправні);

8) час абсолютний, тобто у всіх точках простору воно «тече» однаково рівномірно й цей його «плин» не залежить від руху матеріальних тіл і фізичних процесів. Зокрема, цим постулатом стверджується абсолютність часових інтервалів між подіями, тобто приймається, що тривалість будь-якого процесу однакова в усіх СВ, що рухаються один відносно одного довільним чином, тобто

$$t_2 - t_1 = t'_2 - t'_1 \quad \text{або} \quad \Delta t = \Delta t' \tag{2.2}$$

де $\Delta t = t_2 - t_1$ й $\Delta t' = t'_2 - t'_1$ - тривалість того самого процесу у двох різних СВ. Для процесу нескінченно малої тривалості (2.2) записується у вигляді

$$dt = dt' \tag{2.2'}$$

Згідно (2.2) в усіх СВ можна довільним чином вибрати один той самий початок відліку часу і ввести в усіх СВ єдину часову координату t, тобто фактично тут постулюється існування таких годинників, період яких не залежить від характеру їхнього руху й не змінюється при переносі з однієї СВ, що рухається довільно, в іншу.

**Зауваження.** Перераховані постулати про конкретні властивості простору й часу справедливі тільки в класичній механіці (ширше - у МКС). Сучасний розвиток фізики встановив несправедливість постулатів 2) - 5) і 7) - 8); сумніву в ЕКТП піддаються навіть постулати 1) і 6).

## §3. Кінематичні й динамічні характеристики механічного руху.

Надалі ми будемо цікавитися рухом тільки таких ідеалізованих об'єктів механіки як матеріальна точка й система матеріальних точок. Тому приведемо тут визначення тільки тих основних характеристик, якими користуються при описанні руху саме цих об'єктів. При розгляді механічного руху без урахування, викликаючих його причин, використовують кінематичні характеристики, а з урахуванням цих причин - динамічні характеристики механічного руху.

Розглянемо рух матеріальної точки M відносно якоїсь СВ із початком координат у точці O (нижче ми будемо в основному використовувати інваріантний метод опису руху; при необхідності використання конкретної системи координат перевагу будемо віддавати правогвинтовій системі декартових координат x, y, z з ортами $\vec{i},\vec{j},\vec{k}$, пов'язаних між собою співвідношенням $\vec{k}=[\vec{i},\vec{j}]$, де [,] - знак векторного добутку векторів). Положення точки М відносно зазначеної СВ однозначно визначається завданням її радіуса-вектора (вектора, проведеного з О в М) як функції часу

$$\vec{r}=\vec{r}(t), \tag{3.1}$$

що в декартовій системі координат еквівалентно трьом рівнянням

$$x=x(t), \quad y=y(t), \quad z=z(t), \tag{3.1'}$$

якщо врахувати розклад

$$\vec{r}(t)=\vec{i}\cdot x(t)+\vec{j}\cdot y(t)+\vec{k}\cdot z(t). \tag{3.2}$$

Векторну функцію (3.1) називають законом руху матеріальної точки (при кінематичному вивченні руху передбачається, що цей закон може бути встановлений експериментально). Функцію (3.1) будемо вважати неперервною і диференцюємою, що є наслідком неперервності просторових координат і часу t (див. постулати 1) і 6) з § 2).

Траєкторією матеріальної точки М називають криву, що описується в просторі кінцем її радіуса-вектора $\vec{r}(t)$.

Основними кінематичними характеристиками (мірами) руху матеріальної точки служать швидкість $\vec{v}$ і прискорення $\vec{a}$, які визначаються формулами:

$$\vec{v}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\vec{r}(t+\Delta t)-\vec{r}(t)}{\Delta t}=\frac{d\vec{r}}{dt}\equiv\dot{\vec{r}}\quad, \tag{3.3}$$

$$\vec{a}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\vec{v}(t+\Delta t)-\vec{v}(t)}{\Delta t}=\frac{d\vec{v}}{dt}=\frac{d^2\vec{r}}{dt^2}=\ddot{\vec{r}}\ . \tag{3.4}$$

Вектори швидкості й прискорення є векторними функціями часу, тобто $\vec{\upsilon}=\vec{\upsilon}(t)$ та $\vec{a}=\vec{a}(t)$.

Фундаментальними динамічними характеристиками механічного руху є поняття сили й маси.

Сила є кількісною мірою механічної взаємодії тіл. Під силою $\vec{F}_{B\to A}$, з якої на матеріальну точку А діє деяке тіло В, розуміють такий механічний вплив В на точку А, у результаті якого вона набуває прискорення $\vec{a}_{B\to A}$. Досвід показує, що сила, як і викликане нею прискорення, є вектором, причому

$$\vec{F}_{B\to A} \uparrow\uparrow \vec{a}_{B\to A} \tag{3.5}$$

Однак вище наведене твердження ще не є фізичним визначенням поняттям сили. Щоб визначити силу як фізичну величину, варто визначити спосіб її виміру. Для цього необхідно вибрати еталон сили (наприклад, силу діючу на тіло з боку динамометра з попередньо проградуйованою шкалою) і використати деякі правила додавання сил, що діють на ту саму матеріальну точку. Ці правила є узагальненням експериментально встановлених фактів і становлять суть так званого принципу суперпозиції сил, який стверджує, що:

1) дія кожної із прикладених до матеріальної точки сил не залежить від характеру її руху, а також від числа й типу інших діючих на неї сил (закон незалежної дії сил). Це означає (з урахуванням визначення сили через прискорення) математично, що

$$\vec{a}_1 = \sum_{\kappa} \vec{a}_{\kappa\to 1} \tag{3.6}$$

де $\vec{a}_1$ - результуюче прискорення матеріальної точки 1,

$\vec{a}_{\kappa\to 1}$ - прискорення, які надається їй силами $\vec{F}_{2\to 1}, \vec{F}_{3\to 1}, \vec{F}_{4\to 1}, \ldots,$ діючими з боку тіл (або матеріальних часток) з номерами до = 2, 3, 4, ... ;

2) сили є векторами, тобто складаються за правилом паралелограма (лінійність закону додавання сил):

$$\vec{F}_1 = \sum_{k} \vec{F}_{k\to 1} \tag{3.7}$$

де $\vec{F}_1$ - результуюча сила, що діє на матеріальну точку 1;

3) механічний стан руху матеріальної точки не зміниться, якщо до неї прикласти систему сил, рівну нулю, тобто якщо результуюча сила (3.7) є нуль-вектор.

Описане визначення сили, що випливає зі способу її виміру (так зване операціональне визначення), не описує всіх її властивостей (наприклад, не відповідає на запитання, від яких параметрів ці сили залежать). Такі властивості сили можна вивчити, лише з'ясувавши її співвідношення з іншими фізичними величинами й поняттями. Найважливішим з таких понять є поняття інертної маси.

Інертна маса m є кількісною мірою сприйнятливості тіла до переданого йому механічного руху. Поняття про інертну масу ґрунтується на наступних експериментальних фактах:

1) у кожній СВ відношення величини сили $\vec{F}$, що діє на деяке тіло, до прискорення $\vec{a}$, що викликається цією силою, є для цього тіла величиною постійної й називається інертною масою тіла **m**:

$$m = \frac{\vec{F}}{\vec{a}} = const \quad . \tag{3.8}$$

Цей факт вказує на <u>спосіб виміру маси</u> тіла: досить вибрати масу $m_{эт}$ деякого тіла за <u>еталон</u> і порівняти прискорення, що надається довільною, але фіксованою силою розглянутому й еталонному тілам;

2) маса є величиною <u>адитивною</u>, тобто маса **m** будь-якої складної механічної системи дорівнює сумі мас **m**$_i$, складових її частин, тобто

$$m = \sum_i m_i \tag{3.9}$$

3) інертна маса **m** будь-якого тіла <u>пропорційна</u> його <u>важкій</u> або <u>гравітаційній</u> масі **m**$_г$ (пропорційна вазі тіла):

$$\frac{m}{m_r} = \frac{m_{эт}}{(m_{эт})_r} = const \quad . \tag{3.10}$$

<u>**Зауваження**</u>. Твердження (3.8) і (3.9) спростовуються в СТВ, порушень же (3.10) <u>експериментально</u> дотепер не виявлено, більше того, твердження (3.10) покладено в основу ЗТВ.

Поняття інертної маси дозволяє ввести поняття про три найважливіші <u>динамічні міри руху</u> - імпульсу, моменту імпульсу і кінетичну енергію.

<u>Імпульс</u> (<u>кількість руху</u>) матеріальної точки визначається формулою

$$\vec{p} = m\vec{v} \quad . \tag{3.11}$$

Це <u>адитивна</u> векторна величина, тобто для імпульсу $\vec{P}$ системи матеріальних точок маємо:

$$\vec{P} = \sum_i \vec{p}_i = \sum_i m_i \vec{v}_i \quad . \tag{3.12}$$

<u>Момент імпульсу</u> (<u>кутовий момент</u>, <u>кінетичний момент</u>, <u>момент кількості руху</u>) матеріальної точки <u>відносно центра О</u> визначається співвідношенням:

$$\vec{L}_0 = [\vec{r}_0, \vec{p}] = [\vec{r}_0, m\vec{v}] \quad , \tag{3.13}$$

тобто у загальному випадку залежить від вибору початку координат. Це також <u>адитивна</u> векторна величина, тобто для системи матеріальних точок виконується співвідношення:

$$\vec{L} = \sum_i \vec{L}_i = \sum_i [\vec{r}_i, \vec{p}_i] \quad . \qquad (3.14)$$

Кінетична енергія - це скалярна адитивна міра механічного руху, що для матеріальної точки визначається формулою:

$$T = \frac{1}{2} m \vec{v}^2 \quad , \qquad (3.15)$$

а для системи матеріальних точок дорівнює:

$$T = \sum_i T_i = \frac{1}{2} \sum_i m_i \vec{v}_i^2 \quad . \qquad (3.16)$$

Найважливішою мірою дії сили є робота сили. Якщо під дією деякої сили $\vec{F}$ матеріальна точка перемістилася із точки А в точку В вздовж деякого шляху, то робота сили $\vec{F}$ визначається криволінійним інтегралом:

$$A = \int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_A^B (F_x dx + F_y dy + F_z dz) , \qquad (3.17)$$

де точкою позначений знак скалярного добутку векторів. Вираз $\vec{F} \cdot d\vec{r}$ називається елементарною роботою сили $\vec{F}$ на нескінченно малій ділянці шляху. Значення інтеграла (3.17) у загальному випадку залежить від конкретного виду кривої, що з'єднує точки А і В.

**Зауваження**. Повний фізичний зміст фізичних понять і величин неможливо виявити поза теоретичними законами (і їх наслідків), що включають ці поняття, тобто процес формування теоретичних понять невід'ємний від процесу формування теоретичних законів. У механіці такими теоретичними законами є закони динаміки Ньютона.

## §4. Закони динаміки Ньютона.

В основі класичної механіки лежать три закони Ньютона, які є теоретичним узагальненням експериментальних фактів про співвідношення між кінематичними й динамічними характеристиками механічного руху (див. § 3) і які в рамках МКС є точними законами руху матеріальних точок.

Перший закон Ньютона (або закон інерції Галілея) стверджує: матеріальна точка постійної маси зберігає стан спокою або рівномірного прямолінійного руху, доки вона не буде змушена змінити свій стан у результаті дії прикладених до неї сил, тобто

$$\text{якщо} \quad \vec{F} = 0 \quad i \quad m = const, \quad \text{то} \quad \vec{v} = const, \quad \text{тобто} \quad \vec{a} = 0 \quad . \tag{4.1}$$

Існує нескінченна безліч СВ, в яких рух матеріальної точки не підкоряється закону (4.1). Тому фактично з усіх СВ цей закон дозволяє виділити такий клас СВ, у яких (4.1) справедливо - такі СВ називаються інерціальними СВ (коротко - ІСВ). Таким чином, можна стверджувати, що об'єктивним змістом першого закону Ньютона є твердження про існування в природі ІСВ, тобто (4.1) фактично є визначення ІСВ.

**Зауваження**. Розуміння цього закону вимагає сміливої абстракції, тому що всі рухи, що зустрічаються в природі, спричиняються різними силами (наприклад, тертям або гравітацією).

Другий закон Ньютона (основний закон динаміки матеріальної точки) стверджує, що в ІСВ швидкість зміни в часі імпульсу $\vec{P}$ матеріальної точки дорівнює діючій на неї результуючій силі $\vec{F}$:

$$\frac{d\vec{P}}{dt} = \vec{F} \quad . \tag{4.2}$$

Якщо маса **m** матеріальної точки постійна, то з врахуванням (3.11) і (3.3) з (4.2) одержуємо:

$$m\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \vec{F} \quad . \tag{4.3}$$

Рівняння (4.2) і (4.3) називають диференціальними рівняннями руху матеріальної точки, тому що вони дозволяють знайти її положення й швидкість у будь-який момент часу.

**Зауваження**. Інтегруючи (4.3) при $\vec{F} = const$ по кінцевому проміжку часу $\Delta t = t_2 - t_1$ для зміни швидкості матеріальної точки $\Delta\vec{v} = \vec{v}_2 - \vec{v}_1$ одержуємо:

$$\Delta\vec{v} = \frac{\vec{F}}{m}\Delta t \quad . \tag{4.4}$$

З (4.4) видно, що чим більше маса **m**, тим більший часу $\Delta t$ потрібно для певної зміни швидкості $\Delta\vec{v}$ під дією заданої сили $\vec{F}$. Тому говорять, що всі тіла мають інерцію, а масу **m** називають мірою інерції тіла (точніше, матеріальної точки).

Третій закон Ньютона (закон рівності дії й протидії) зводиться до твердження, що в кожен момент часу дві матеріальні точки взаємодіють між собою із силами, рівними по величині й спрямованими в протилежні сторони уздовж лінії, що з'єднує ці точки, тобто:

$$\vec{F}_{1\to2} = -\vec{F}_{2\to1}, \quad \vec{F}_{1\to2}, \vec{F}_{2\to1} \uparrow\downarrow (\vec{r}_2 - \vec{r}_1) \quad , \tag{4.5}$$

де $\vec{F}_{1\to2}(\vec{F}_{2\to1})$ - сила, що діє на точку 2(1) з боку точки 1(2); $\vec{r}_1, \vec{r}_2$ - радіуси-вектори матеріальних точок. Про взаємодію матеріальних точок, що підкоряється закону (4.5), говорять як про центральну взаємодію.

**Зауваження 1**. Третій закон Ньютона справедливий тільки в припущенні справедливості так званого принципу далекодії МКС, що постулює нескінченну швидкість передачі взаємодії між тілами. Насправді, у СТВ показується, що при передачі взаємодії має місце ефект запізнювання, тому (4.5) порушується.

**Зауваження 2**.Навіть у нерелятивістському наближенні сили взаємодії між точковими частками перестають бути центральними (спрямованими по прямій, що з'єднує частки) при наявності у часток внутрішніх векторних, тензорних або спінорних характеристик (електричних мультипольних моментів, спінів і т.д.).

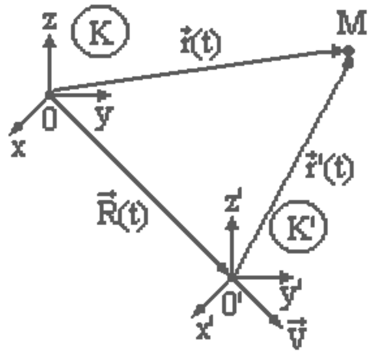
## §5. Принцип відносності Галілея.

Припустимо, що нами обрана деяка ІСВ. Після того як цей вибір зроблений, можна вказати нескінченну безліч твердих тіл, що рухаються відносно обраної ІСВ рівномірно й поступально. Приймаючи зазначені тіла за тіла відліку, ми одержимо тим самим нескінченну безліч інших ІСВ.

Якщо тепер розглянути механічний рух деякої замкнутої системи з погляду всіх ІСВ, то легко переконається, що: 1) механічний рух відносний (тобто положення, швидкості й вид траєкторій матеріальних точок залежать від вибору тієї чи іншої ІСВ); 2) у той же час закони механіки (закони Ньютона) однакові у всіх ІСВ. Відносність механічного руху й однаковість законів механіки в різних ІСВ й становлять зміст принципу відносності Галілея (ПВГ): всі ІСВ в механіці рівноправні (фізично рівноцінні) у тому розумінні, що закони механіки у всіх таких ІСВ мають однакову форму.

Математично ПВГ виражає <u>інваріантність рівнянь</u> (законів) <u>механіки стосовно перетворення координат і часу при переході від однієї ІСВ до іншої</u> (<u>перетворення Галілея</u>).

При одержанні перетворень Галілея істотно використовуються <u>однорідність</u> й <u>ізотропність</u> простору й <u>однорідність</u> й <u>абсолютність</u> часу (див. § 2).




Розглянемо матеріальну точку М у двох <u>довільних</u> ІСВ, що рухаються одна відносно одної з постійною швидкістю $\vec{\upsilon}$ (див. малюнок). Якщо початок координат 0 й 0' у початковий момент t=0 збігаються, то $\vec{R} = \vec{\upsilon} \cdot t$. З малюнка видно, що

$\vec{r}(t) = \vec{r}'(t) + \vec{R}(t)$ *або* $\vec{r}(t) = \vec{r}'(t) + \vec{\upsilon} \cdot t$,

тому з урахуванням абсолютності часу одержуємо перетворення Галілея:

$$\boxed{\begin{aligned} \vec{r} &= \vec{r}' + \vec{v} \cdot t \\ t &= t' \end{aligned}} \tag{5.1}$$

Перетворенню Галілея відповідає наступний закон додавання швидкостей:

$$\vec{v} = \vec{v}' + \vec{V} \tag{5.2}$$

Диференціюючи (5.2), одержуємо зв'язок між прискореннями матеріальної точки в обох ІСВ:

$$\vec{a} = \vec{a}' \tag{5.3}$$

<u>Інваріантність</u> (незмінність) прискорення (5.3) з урахуванням інваріантності сили й маси призводить до <u>інваріантності законів Ньютона при перетвореннях</u> (5.1), що і є математичним вираженням ПВГ.

<u>**Зауваження**</u>. Та обставина, що перетворення Галілея (5.1) неможливо одержати без врахування однорідності й ізотропності простору й однорідності часу, фізично означає, що ПВГ автоматично містить (виражає) також й інваріантність законів механіки до трьох типів перетворень: 1)

переносу в просторі; 2) обертанню в просторі; 3) зсуву в часі. Ці останні інваріантності (симетрії) законів механіки пов'язаний із законами збереження енергії, імпульсу й моменту імпульсу (див. главу 2).

## § 6. Основна задача динаміки та роль початкових умов. Принцип причинності класичної механіки.

Розглянемо рух відносно ІСВ деякої механічної системи, що складається з **n** матеріальних точок з постійними масами $m_1$, $m_2$, …, $m_n$... Якщо позначити через $\vec{F}_i$ рівнодіючу (результуючу) всіх сил, що діє на **i-ю** точку, то застосування до цієї системи другого закону Ньютона (4.3) дозволяє записати її рівняння руху у вигляді:

$$m_i \frac{d^2\vec{r}_i}{dt^2} = \vec{F}_i \ , \quad (i = 1,2,\ldots,n) \ . \tag{6.1}$$

Якщо розглянута система не замкнута, то кожну $\vec{F}_i$ можна записати у вигляді

$$\vec{F}_i = \vec{F}_i^{(e)} + \vec{F}_i^{(i)} = \vec{F}_i^{(e)} + \sum_{\substack{j=1 \\ i\neq i}}^{n} \vec{F}_{j\to i} \equiv \vec{F}_i^{(e)} + \sum_{j=1}^{n}{}' \vec{F}_{ji} \ , \tag{6.2}$$

де $\vec{F}_i^{(i)} = \sum_j{}' \vec{F}_{j\to i}$ - рівнодіюча всіх внутрішніх сил $\vec{F}_{j\to i}$ з боку інших (j ≠ i) точок системи; $\vec{F}_i^{(e)}$ - рівнодіюча всіх зовнішніх сил, які діють на **i-у** точку системи з боку тіл, що не входять у цю систему. Таким чином, диференціальні рівняння руху механічної системи можна остаточно записати у вигляді:

$$\boxed{m_i \frac{d^2\vec{r}_i}{dt^2} = \vec{F}_i^{(e)} + \sum_{j=1}^{n} \vec{F}_{j\to i} \quad (i = 1,2,\ldots,n)} \tag{6.1'}$$

В (6.1’) передбачається, що внутрішні сили $\vec{F}_{j\to i}$ задовольняють третьому закону Ньютона (4.5). Відносно зовнішніх сил $\vec{F}_i^{(e)}$ будемо припускати, що вони в загальному випадку можуть явно залежати від часу **t**, та так само від положення й швидкостей відповідних точок системи відносно зовнішніх тіл.

Основна задача динаміки полягає у відшуканні радіусів-векторів матеріальних точок як функцій часу $\vec{r}_i(t)$ і їхніх швидкостей $\vec{v}_i(t)$ по заданим внутрішнім $\vec{F}_{j\to i}$ і зовнішнім $\vec{F}_i^{(e)}$ силам і відомим масам часток $\mathbf{m_i}$. У математичному відношенні ця задача зводиться до знаходження загального розв’язок системи звичайних диференціальних рівнянь другого порядку (6.1’).

**Зауваження**. Для подальшого суттєво, що далеко не завжди зовнішні сили $\vec{F}_i^{(e)}$ можуть бути задані (відомі) до рішення основної задачі динаміки. Справа в тому, що в більшості завдань механіки доводиться вивчати рух так званих невільних систем, тобто систем, переміщення яких обмежені зв'язками. Ефект дії зв'язків у рівняннях (6.1’) враховується за допомогою таких зовнішніх сил, які називаються реакціями в'язів і величин, які заздалегідь невідомі, що істотно ускладнює розв’язок рівнянь руху. Тому сам характер постановки основної задачі динаміки тут (заданість усіх $\vec{F}_i$) виключає поки розгляд невільних механічних систем, тобто подальші висновки справедливі фактично тільки для так званих вільних систем. Будемо називати механічну систему вільної, якщо під дією прикладених сил матеріальні точки можуть займати будь-які положення в просторі – для таких систем у будь-який момент часу **t** можна довільним чином задати значення $\vec{r}_i$ і $\vec{v}_i$ всіх її точок.

Загальний хід розв’язку основної задачі динаміки зводиться до наступного. Знаходимо загальний розв’язок системи рівнянь (6.1’), що (якщо він взагалі існує) можна представити у вигляді

$$\vec{r}_i = \vec{r}_i(t; c_1, c_2, \ldots, c_{6n}) \quad , \quad i = 1,2,\ldots,n \ . \tag{6.3}$$

Диференціюючи (6.3) по **t** можна одержати швидкості $\vec{\upsilon}_i$ - матеріальних точок як функцій часу

$$\vec{v}_i = \vec{v}_i(t; c_1, c_2, \ldots, c_{6n}) \quad , \quad i = 1,2,\ldots,n \ . \tag{6.4}$$

Загальний розв’язок (6.3) і (6.4) містить **6n**-довільних сталих $c_1$, $c_2,\ldots,c_{6n}$ (тому що (6.1’) у будь-якій системі координат є система 3n-диференціальних рівнянь 2$^{\underline{го}}$ порядку), тому подальша конкретизація цього розв’язку пов’язана з визначенням цих сталих як деяких фізичних характеристик системи. Покажемо, що $c_1, c_2,\ldots,c_{6n}$ можна виразити через так звані початкові координати $\vec{r}_{i0}$ і швидкості $\vec{v}_{i0}$ точок системи в момент часу **t**=0, скориставшись початковими умовами наступного виду:

$$\left.\begin{aligned} \vec{r}_i(0; c_1, c_2, \ldots, c_{6n}) = \vec{r}_{i0} \\ \vec{v}_i(0; c_1, c_2, \ldots, c_{6n}) = \vec{v}_{i0} \end{aligned}\right\} \quad , \quad i = 1,2,\ldots,n \ . \tag{6.5}$$

Дійсно, (6.5) є система **6n**-алгебраїчних рівнянь відносно **6n** сталих $c_1$, $c_2$, …, $c_{6n}$ , тому єдине розв’язок (6.5) можна записати у вигляді

$$c_k = f_k(\vec{r}_{10}, \vec{r}_{20}, ..., \vec{r}_{no}; \vec{v}_{10}, \vec{v}_{20}, ..., \vec{v}_{n0}) \ , \quad k = 1,2,\ldots,6n. \ . \tag{6.6}$$

Нарешті, підстановка (6.6) в (6.3) і (6.4) дозволяє одержати остаточне розв'язок основної задачі динаміки:

$$\left.\begin{aligned}\vec{r}_i &= \vec{r}_i(t;\vec{r}_{10},\vec{r}_{20},...,\vec{r}_{n0};\vec{v}_{10},\vec{v}_{20},...,\vec{v}_{no}),\\ \vec{v}_i &= \vec{v}_i(t;\vec{r}_{10},\vec{r}_{20},...,\vec{r}_{no};\vec{v}_{10},\vec{v}_{20},...,\vec{v}_{no}).\end{aligned}\right\} \quad , \quad (i = 1,2,\ldots,n)\,. \tag{6.7}$$

З обговорення загального ходу розв'язку основної задачі динаміки можна зробити наступні важливі висновки:

1. Стан (вільної) механічної системи в будь-який момент часу **t** повністю визначається заданням $\vec{r}_i(t)$ і $\vec{v}_i(t)$ всіх матеріальних точок системи в той же момент часу **t**.

Це означає, що в цей же момент часу **t** однозначно визначаються й прискорення $\ddot{\vec{r}}_i$ матеріальних точок, знання яких необхідні для прогнозування поведінки системи в наступні моменти часу. Однак, на відміну від $\vec{r}_i$ і $\vec{v}_i$ прискорення $\ddot{\vec{r}}_i$ не можна задавати довільно, тому що вони визначаються рівняннями руху (6.1').

Відзначимо, що можливість визначення стану механічної системи за допомогою її координат і швидкостей (або імпульсів) базується на допущенні класичною механікою можливості одночасного виміру положення $\vec{r}$ й швидкості $\vec{v}$ матеріальної точки, отже, будь-яких механічних характеристик системи (які є функціями координат і швидкостей). Це означає, що взаємодією вимірювального приладу з механічною системою завжди можна зневажити в силу його малості. Тому вважається, що процес виміру будь-якої фізичної величини не змінює стану руху системи й, отже, не змінює самої вимірюваної величини (наприклад, вимір положення матеріальної точки не позначається на її координатах). Хоча зазначене допущення з великою точністю виконується для макроскопічних систем, однак для мікрооб'єктів воно несправедливо (наприклад, у мікрочастинок не можна одночасно точно виміряти координату **x** й імпульс $p_x$). Тому для мікросистем зазначений вище спосіб визначення стану виявляється повністю непридатним.

2. Заданням початкового стану механічної системи однозначно визначається її поведінка й у всі наступні моменти часу.

Це означає, що якщо задані умови руху системи, тобто задані сили $\vec{F}_i(\vec{r}_i,\vec{v}_i,t)$, то за початковим станом системи в момент часу **t**=0 можна однозначно спрогнозувати її стан й у всі наступні моменти часу **t**>0.

Сформульоване твердження являє собою принцип причинності класичної механіки, або так званий принцип лапласівського детермінізму. Це є власне формулювання (справедлива тільки в рамках МКС) загального принципу причинності – одного з найважливіших методологічних принципів фізики.

## § 7. Потенціальна енергія і класифікація вільних механічних систем.

У фізиці часто доводиться розглядати рух часток у силових полях найрізноманітнішої фізичної природи. Під силовим полем ми будемо розуміти частину простору, у кожній точці якої на поміщену туди матеріальну частинку діє сила, величина й напрямок якої залежать або тільки від координат цієї точки, або від координат і часу (у першому випадку силове поле називається стаціонарним, а в другому - нестаціонарним).

Розглянемо рух матеріальної точки в деякому силовому полі. Мірою дії силового поля на цю точку є робота силового поля по її переміщенню, що згідно (3.17) дорівнює

$$A = \int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{r} \ .$$

Хоча в загальному випадку силових полів цей криволінійний інтеграл залежить від конкретного вигляду кривої, що з'єднує точки А и В, однак існує такий клас силових полів, для яких робота не залежить від форми шляху. Цей останній випадок можливий тоді, коли елементарну роботу можна представити у вигляді повного диференціала деякої скалярної функції координат $U(\vec{r})$:

$$\vec{F} \cdot d\vec{r} = -dU(\vec{r}) \ . \tag{7.1}$$

Умова (7.1) дозволяє представити роботу сили $\vec{F}$ по кінцевому переміщенню точки у вигляді, що явно не залежить від форми шляху:

$$\int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{r} = -\int_A^B dU(\vec{r}) = U(\vec{r}_A) - U(\vec{r}_B) \ . \tag{7.2}$$

Силові поля, що задовольняють умові (7.2) або (7.1), називають потенціальними силовими полями, а скалярну функцію $U(\vec{r})$ - потенціальною енергією матеріальної точки в зовнішньому потенціальному силовому полі. Беручи невизначений інтеграл від лівої й правої частини (7.1), одержуємо вираз $U(\vec{r})$ через задану силу $\vec{F}(\vec{r})$ :

$$U(\vec{r}) = -\int \vec{F} \cdot d\vec{r} + C \ . \tag{7.3}$$

Звідси видно, що $U(\vec{r})$ матеріальної точки визначена з точністю до адитивної довільної сталої **С**. Тому, перш ніж працювати з функцією $U(\vec{r})$ як з потенціальною енергією, її необхідно попередньо прокалібрувати (пронормувати), вибравши довільним чином нульовий рівень потенціальної енергії. Наприклад, вважаючи в деякій фіксованій точці В $U(\vec{r}_B) = 0$, з (7.2) одержуємо:

$$U(\vec{r}_A) = \int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{r} \ , \quad \text{якщо} \quad U(\vec{r}_B) = 0 \ . \tag{7.4}$$

Звідси видно фізичний зміст $U(\vec{r})$: потенціальна енергія матеріальної точки, яка поміщена в довільній точці А силового поля, дорівнює роботі силового поля по переміщенню матеріальної точки з А в таку фіксовану точку В, у якій $U(\vec{r}_B) = 0$.

Для подальшого зручно мати диференціальну ознаку потенційності силового поля. Для цього зазначимо, що (7.2) еквівалентно умові:

$$\oint_L \vec{F} \cdot d\vec{r} = 0 \tag{7.5}$$

рівності нулю роботи по замкненому шляху L. Застосовуючи до (7.5) математичну теорему Стокса

$$\oint_L \vec{A} \cdot d\vec{r} = \int_S rot\vec{A} \cdot d\vec{S} \ , \tag{7.6}$$

де $\vec{A}(\vec{r})$ - довільне неперервне векторне поле, S – поверхня, натягнута на замкнутий контур L, $d\vec{S}$ - елемент поверхні S, одержуємо:

$$\int_S rot\vec{F} \cdot d\vec{S} = 0$$

звідки в силу дозвілля S маємо диференціальну ознаку потенціальності:

$$rot\vec{F} = 0 \ . \tag{7.7}$$

Таким чином, потенціальне силове поле – це безвихрове поле (силові поля, для яких $rot\vec{F} \neq 0$, називаються вихровими).

З огляду на тотожність $rotgradU(\vec{r}) \equiv 0$, з (7.7) одержуємо зв'язок між $\vec{F}(\vec{r})$ й $U(\vec{r})$:

$$\vec{F} = -gradU \equiv -\vec{\nabla} U \ , \tag{7.8}$$

де $\vec{\nabla}$ - векторний диференціальний оператор набла (у декартових координатах $\vec{\nabla} = \vec{i}\frac{\partial}{\partial x} + \vec{j}\frac{\partial}{\partial y} + \vec{k}\frac{\partial}{\partial z}$ ).

**Зауваження**. Нестаціонарні силові поля також можуть бути потенціальними, якщо $\vec{F}(\vec{r},t)$ задовольняє умові потенціальності (7.7). У цьому випадку $\vec{F}(\vec{r},t)$ й $U(\vec{r},t)$ також зв'язані між собою співвідношеннями вигляду (7.3) і (7.8).

Розглянемо тепер вільну систему **n**-взаємодіючих матеріальних точок, поміщених в зовнішнє потенціальних силове поле (стаціонарне або нестаціонарне). З вище сказаного слідує, що кожна ***i-а*** точка системи має потенціальну енергію $U_i^{(e)}(\vec{r}_i,t)$ в зовнішньому полі, тому можна ввести поняття потенціальної енергії системи в зовнішньому силовому полі $U^{(e)}$ по формулі:

$$U^{(e)} \equiv U^{(e)}(\vec{r}_1,\vec{r}_2,\ldots,\vec{r}_n,t) = \sum_{i=1}^{n} U_i^{(e)}(\vec{r}_i,t) \quad . \tag{7.9}$$

Далі, будемо припускати, що сили взаємодії $\vec{F}_{ij}$ між точками системи: 1) задовольняють третьому закону Ньютона й, отже, є потенціальними і центральними; 2) не залежать явно від часу (це наслідок однорідності часу й знехтування релятивістськими ефектами). Виявляється, що в цьому випадку можна ввести поняття енергії взаємодії матеріальних точок системи (або внутрішньої потенціальної енергії системи)

$$U^{(i)} \equiv U^{(i)}(\vec{r}_1,\vec{r}_2,\ldots,\vec{r}_n) \tag{7.10}$$

таким чином, що зв'язок між $U^{(i)}$ і рівнодіючої внутрішніх сил $\vec{F}_i^{(i)} = \sum_{j=1}^{n}{}' \vec{F}_{ij}$, які діють на ***i-у*** точку системи, запишеться у вигляді :

$$\vec{F}_i^{(i)} \equiv \sum_{j=1}^{n}{}' \vec{F}_{ji} = -\vec{\nabla}_i U^{(i)} \quad , \tag{7.11}$$

повністю аналогічному (7.8).

Внутрішня потенціальна енергія системи (7.10) залежить від взаємного положення матеріальних точок і не є адитивною на відмінність від $U^{(e)}$ (див. формулу (7.9)). Тому $U^{(i)}$ є енергетична характеристика всієї системи в цілому.

Величину

$$U = U^{(i)} + U^{(e)} \tag{7.12}$$

називають повною потенціальною енергією системи.

Систему рівнянь руху (6.1'), для вільної системи, що перебуває в зовнішньому потенціальному силовому полі, будемо далі записувати у вигляді:

$$m_i \ddot{\vec{r}}_i = \boxed{-\vec{\nabla}_i U \quad i = 1,2,\ldots},n \tag{7.13}$$

з урахуванням (7.11) і аналогічної формули:

$$\vec{F}_i^{(e)} = -\vec{\nabla}_i U^{(e)} = -\vec{\nabla}_i U_i^{(e)} \ , \tag{7.14}$$

яка є наслідком (7.8) і (7.9).

Тепер, користуючись поняттям повної потенціальної енергії, вся нескінченна множина вільних механічних систем може бути розбита на наступні чотири класи:

1) Замкнуті, або ізольовані, системи. Для таких систем повна потенціальна енергія зводиться до внутрішнього:

$$U(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \ldots, \vec{r}_n) = U^{(i)}(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \ldots, \vec{r}_n) \ , \tag{7.15}$$

тому її зміна з часом обумовлена тільки зміною положення часток і для повної похідної за часом від U маємо (з врахуванням $\frac{\partial U^{(i)}}{\partial t} = 0$)

$$\frac{dU}{dt} = \sum_{i=1}^{n} \vec{\nabla}_i U \cdot \dot{\vec{r}}_i \quad . \tag{7.16}$$

2) Системи, що перебувають у зовнішніх стаціонарних й потенціальних силових полях. Для таких систем $\frac{\partial U^{(e)}}{\partial t} = 0$ і для повної потенціальної енергії маємо

$$U(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \ldots, \vec{r}_n) = U^{(i)}(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \ldots, \vec{r}_n) + U^{(e)}(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \ldots, \vec{r}_n) \ , \tag{7.17}$$

а її повна похідна за часом визначається виразом (7.16).

3) Системи, що перебувають у зовнішніх нестаціонарних потенціальних силових полях. Для систем цього класу також можливе введення функції повної потенціальної енергії, однак вона буде явно залежати від часу:

$$U(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \ldots, \vec{r}_n, t) = U^{(i)}(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \ldots, \vec{r}_n) + U^{(e)}(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \ldots, \vec{r}_n, t) \ , \tag{7.18}$$

і тому її повна похідна за часом буде визначатися виразом:

$$\frac{dU}{dt} = \frac{dU}{dt} + \sum_{i=1}^{n} \vec{\nabla}_i U \cdot \dot{\vec{r}}_i \ . \tag{7.19}$$

4) Всі інші вільні механічні системи. До цього класу ми віднесемо системи, що перебувають у вихрових силових полях; системи, піддані впливу сил тертя й т.д. Для таких систем неможливо ввести функцію повної потенціальної енергії і їхня поведінка підкоряється рівнянням руху

загального вигляду (6.1'), у той час як поведінка систем класів 1) - 3) підкоряється рівнянням руху (7.13).

**Зауваження**. Поняття повної потенціальної енергії дозволяє ввести поняття про повну механічну енергію системи й описувати всі механічні властивості таких систем за допомогою обмеженого числа скалярних функцій – енергій (що значно простіше опису за допомогою векторних функцій – сил). Ця ідея одержує свій повний розвиток в аналітичній механіці.

Наведена класифікація вільних механічних систем здійснена тут за наступними двома ознаками: 1) можливо або неможливо для даного класу систем введення повної потенціальної енергії?; 2) залежить або не залежить явно від часу потенціальна енергія (при позитивній відповіді на перше питання)? Така класифікація істотно використовується при розгляді законів збереження (див. гл. 2) і багатьох інших проблем механіки.

## Глава. 2. Закони збереження й принцип симетрії.

### § 8. Перші інтеграли рівнянь руху й закони збереження.

Стан руху вільної механічної системи, що складається з **n**-матеріальних точок, як було показано в § 6, повністю визначається в кожен момент часу **t** набором величин:

$$\left.\begin{aligned}&\vec{r}_1(t),\vec{r}_2(t),\ldots,\vec{r}_n(t),\\&\vec{v}_1(t),\vec{v}_2(t),\ldots,\vec{v}_n(t).\end{aligned}\right\} \tag{8.1}$$

Хоча в процесі руху системи величини (8.1) змінюються, проте можна вказати такі функції $f_k$ цих змінних й, у загальному випадку, часу **t**, які при русі системи зберігають сталі значення $f_{k0}$, обумовлені початковими умовами:

$$f_k(\vec{r}_1,\vec{r}_2,\ldots,\vec{r}_n;\vec{v}_1,\vec{v}_2,\ldots,\vec{v}_n;t)=f_{k0}\quad . \tag{8.2}$$

Функції (8.2) називають першими інтегралами диференціальних рівнянь руху (або, коротше, інтегралами руху). Те, що такі функції існують, видно із загального ходу розв'язок основної задачі динаміки (див. § 6): в якості функції $f_k$ можна взяти сталі інтегрування $C_к$, розглянуті як розв'язок системи рівнянь (6.3) і (6.4); у якості $f_{k0}$ беруться значення $C_{к0}$ цих сталих $C_к$ у початковий момент часу $\mathbf{t}_0$:

$$C_k(t;\vec{r}_1,\vec{r}_2,\ldots,\vec{r}_n;\vec{v}_1,\vec{v}_2,\ldots,\vec{v}_n)=C_{k0}\ ,\ \mathrm{k}=1,2,\ldots,6\mathrm{n}\ , \tag{8.3}$$

де

$$C_{k0}=C_k(t;\vec{r}_{1o},\vec{r}_{2o},\ldots,\vec{r}_{no};\vec{v}_{1o},\vec{v}_{2o},\ldots,\vec{v}_{no})\ . \tag{8.4}$$

Це просте схематичне обговорення не повинне «затемнити» той факт, що проблема пошуку всіх інтегралів руху – це найскладніша (у загальному випадку) математична задача, що далеко не завжди вирішується в явному вигляді. Дійсно, як показується в теорії звичайних диференціальних рівнянь, знання сукупності **6n**-незалежних перших інтегралів (8.2) еквівалентно знаходженню загального розв'язку системи (6.1') у явному вигляді, а знання яких-небудь **r<6n** перших інтегралів дає можливість понизити порядок **r** рівнянь руху й тим самим істотно спростити розв'язок динамічної задачі. Одержати ж закони руху (6.3) – (6.4) і їх розв'язок (8.3) у явному вигляді можна тільки для такої системи рівнянь (6.1'), для якої можливий повний розподіл змінних. Тому при розв'язку нетривіальних задач механіки звичайно задовольняються вже тим і тоді, коли вдається порівняно просто одержати хоча б декілька перших інтегралів руху загального типу (8.2) і полегшити тим самим задачу інтегрування рівнянь руху.

Важливо відзначити, що далеко не всі перші інтеграли мають однакову «цінність» у механіці (і в інших розділах фізики). Серед них є кілька таких інтегралів руху, сталість яких істотно пов'язане з постулатами про простір і час, особливо із симетріями простору й часу (їхньою однорідністю й ізотропністю). Ці інтеграли руху, що мають загальний вид:

$$f_\alpha(\vec{r}_1,\vec{r}_2,\ldots,\vec{r}_n;\vec{v}_1,\vec{v}_2,\ldots,\vec{v}_n)=f_{\alpha o}, \tag{8.5}$$

виділяють в особливу групу й називають законами збереження.

Існування зазначених інтегралів руху, їхня кількість, явний вигляд і зв'язок із симетріями простору й часу встановлюється так званою теоремою Нетер.

Крім зв'язку із властивостями простору й часу, величини, що зберігаються типу (8.5) мають наступні чудові властивості:

1) адитивності: значення цих фізичних величин для системи, що складається з не взаємодіючих між собою матеріальних точок, дорівнює сумі значень тих же величин для кожної точки окремо, тобто:

$$f_\alpha(\vec{r}_1,\vec{r}_2,\ldots,\vec{r}_n;\vec{v}_1,\vec{v}_2,\ldots,\vec{v}_n)=\sum_{i=1}^{n} f_{\alpha i}(\vec{r}_i;\vec{v}_i) \quad ; \tag{8.6}$$

2) про виконання для будь-якої механічної системи законів збереження (8.5) можна судити по найбільш загальним ознакам цієї системи, не прибігаючи до аналізу її рівнянь руху - досить тільки з'ясувати, до якого з перерахованих наприкінці § 7 класу вільних механічних систем відноситься розглянута система. Цією властивістю інтеграли руху загального виду (8.2) не володіють - інформацію про їх можна одержати тільки шляхом попереднього аналізу диференціальних рівнянь руху.

Відзначені особливості інтегралів руху (8.5) зводять їх у ранг найбільш фундаментальних законів природи – законів збереження. Усього існує сім таких фізичних величин, що зберігаються: енергія, три компоненти імпульсу й три компоненти момент імпульсу.

**Зауваження**. Глибокий зв'язок між перерахованими законами збереження й симетріями простору та часу був усвідомлений фізиками тільки в XX-му столітті. Роль законів збереження й симетрій (як згаданих, так й інших) в розвитку сучасної фізики настільки велика, що вони в цей час зведені в ранг методологічних принципів фізики – принципу збереження й принципу симетрії. Особливо велика роль цих принципів при дослідженні таких фізичних об'єктів, закони руху яких ще не відкриті.

## § 9. Закон збереження енергії і його зв'язок з однорідністю часу.

У формулюванні будь-якого закону збереження головним є вказівка такого класу механічних систем, для якого та або інша фізична величина зберігається. Для вільних механічних систем головною виявляється їхня класифікація за допомогою поняття повної потенціальної енергії, наведена наприкінці § 7. Дійсно, як ми переконаємося нижче в цій главі, саме поняття повної потенціальної енергії можна використати в якості основної фізичної величини, здатної адекватно характеризувати інваріантні (відносно перетворень простору й часу) властивості вільних механічних систем (величиною, що найбільше повно описує інваріантні властивості як вільних, так і зв'язаних механічних систем, є функція дії).

Розглянемо такі вільні механічні системи, для яких можна ввести поняття повної потенціальної енергії $U(\vec{r}_1,\vec{r}_2,\ldots,\vec{r}_n,t)$. Запишемо повну похідну по часом від U (див. (7.19)):

$$\frac{dU}{dt}=\frac{\partial U}{\partial t}+\sum_{i=1}^{n}\dot{\vec{r}}_i\cdot\vec{\nabla}_iU \quad . \tag{9.1}$$

Далі, з однорідності часу випливає, що існують такі механічні системи, повна потенціальна енергія яких від часу явно не залежить, тобто

$$\frac{\partial U}{\partial t}=0 \quad , \tag{9.2}$$

або, що те ж саме,

$$\frac{dU}{dt}=\sum_{i=1}^{n}\dot{\vec{r}}_i\cdot\vec{\nabla}_iU=\sum_{i=1}^{n}\vec{v}_i\cdot\vec{\nabla}_iU \quad . \tag{9.2'}$$

Дійсно, однорідність часу означає фізичну рівноправність всіх моментів часу для таких систем, тобто інваріантність (незмінність) рівнянь руху (7.13), а отже й потенціальної енергії U при будь-яких, у тому числі й нескінченно малих, «зсувах» у часі, тобто перетвореннях часу вигляду:

$$t\to t+\delta t \quad , \tag{9.3}$$

де δt – довільний нескінченно малий інтервал часу. Формальне збільшення U потенціальної енергії при «трансляції» у часі (9.3) можна записати у вигляді:

$$\delta U=\frac{\partial U}{\partial t}\cdot\delta t \quad . \tag{9.4}$$

Однак насправді внаслідок однорідності часу ніякої зміни потенціальної енергії системи не відбувається, тобто δU = 0, тому в силу дозвілля δt з (9.4) одержуємо (9.2). Враховуючи тепер результати § 7, дійдемо висновку, що умова (9.2) і , отже, (9.2’) виконується тільки для замкнутих механічних систем і систем, що перебувають у <u>стаціонарних</u> потенціальних силових полях (див. (7.15) – (7.17)).

Покажемо тепер, що наслідком (9.2) або (9.2') є деякий закон збереження. Для цього перетворимо (9.2') за допомогою рівнянь руху (7.13)

$$m_i \frac{d\vec{v}_i}{dt} = -\vec{\nabla}_i U \ , \quad i = 1,2,\ldots,n \ . \tag{9.5}$$

Помножуючи ***i-е*** рівняння системи (9.5) <u>скалярно</u> на вектор $\vec{\upsilon}_i$ та враховуючи очевидну рівність:

$$m_i \vec{v}_i \cdot \frac{d\vec{v}_i}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{m_i \vec{v}_i^2}{2}\right) , \tag{9.6}$$

одержуємо систему рівнянь:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{m_i \vec{v}_i^2}{2}\right) = -\vec{v}_i \cdot \vec{\nabla}_i U \ , \quad i = 1,2,\ldots,n \ , \tag{9.7}$$

рівносильну системі (9.5). Складаючи почленно рівняння (9.7), одержуємо рівняння:

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{d}{dt}\left(\frac{m_i v_i^2}{2}\right) = \frac{d}{dt}\left(\sum_{i=1}^{n} \frac{m_i v_i^2}{2}\right) = -\sum_{i=1}^{n} \vec{v}_i \cdot \vec{\nabla}_i U \ . \tag{9.8}$$

За допомогою (9.8) умову (9.2') можна тепер переписати в остаточному вигляді:

$$\frac{d}{dt}\left(\sum_{i=1}^{n} \frac{m_i v_i^2}{2} + U\right) = 0 \ . \tag{9.9}$$

Рівняння (9.9) показує, що в процесі руху розглянутих систем зберігається <u>скалярна</u> величина:

$$E \equiv \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} m_i v_i^2 + U = const \ , \tag{9.10}$$

яку називають <u>повною механічною енергією системи</u>; вона складається із двох істотно різних членів: кінетичної енергії системи (див. § 3)

$$T = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} m_i v_i^2 \ , \tag{9.11}$$

залежної від швидкості матеріальних точок, і потенціальної енергії U (див. § 7), що залежить від їхніх координат. Неважко бачити, що E має властивість адитивності: для систем не взаємодіючих між собою часток маємо (див. (8.6))

$$E = \sum_{i=1}^{n} E_i \quad ; \quad E_i = \frac{m_i v_i^2}{2} + U^{(e)}(\vec{r}_i) \ , \tag{9.12}$$

де $E_i$ – повна механічна енергія окремої матеріальної точки. Механічні системи, у яких повна енергія зберігається, називаються консервативними, а (9.2) називають умовою консервативності вільної системи.

Таким чином, закон збереження механічної енергії можна сформулювати так: наслідком однорідності часу є збереження механічної енергії в замкнутих механічних системах і системах, що перебувають у стаціонарних потенціальних силових полях.

**Зауваження 1**. З викладеного легко бачити, що для систем, що перебувають у нестаціонарних потенціальних силових полях, повна механічна енергія змінюється за законом (див. § 7)

$$\frac{dE}{dt} = \frac{dU^{(e)}}{dt} \quad . \tag{9.13}$$

**Зауваження 2**. Для дослідження енергетичних перетворень у системах, підданих дії не потенціальних сил, використають теорему про зміну кінетичної енергії, обговорення якої ми тут опускаємо.

**Зауваження 3**. Закон збереження (9.10) для консервативної системи варто розуміти і як закон перетворення механічної енергії, тому що в процесі руху такої системи відбувається безперервне перетворення її кінетичної енергії в потенціальну і навпаки. В цьому відношенні (9.10) є окремим випадком загального закону збереження й перетворення енергії різних форм руху матерії.

## § 10. Закон збереження імпульсу і його зв'язок з однорідністю простору.

Розглянемо замкнену механічну систему **n**-взаємодіючих між собою матеріальних точок.

У силу однорідності простору рівняння руху (9.5) повинне бути інваріантне (незмінне) при будь-якому паралельному переносі замкнутої системи як одного цілого в просторі. Ясно, що при цьому не повинно бути й ніякої зміни потенціальної енергії системи $U(\vec{r}_1, \vec{r}_2, ..., \vec{r}_n)$, що суттєво визначає форму рівнянь (9.5). Ця інваріантність U накладає сильні обмеження на її явний вигляд: $U(\vec{r}_1, \vec{r}_2, ..., \vec{r}_n)$ може бути тільки функцією взаємних положень точок системи, тобто функцією змінних вигляду $\vec{r}_{ji} \equiv \vec{r}_j - \vec{r}_i$.

Математично паралельний перенос (зсув) системи в просторі на довільний нескінченно малий вектор $\delta \vec{a}$ записується у вигляді:

$$\vec{r}_i^{\,/} = \vec{r}_i + \delta \vec{a} \quad , \quad i = 1, 2, \ldots, n \, . \tag{10.1}$$

Зміну U при цьому перетворенні координат формально можна записати в такий спосіб:

$$\delta U = \sum_{i=1}^{n} \vec{\nabla}_i U \cdot \delta \vec{a} = \delta \vec{a} \cdot \sum_{i=1}^{n} \vec{\nabla}_i U \ . \tag{10.2}$$

Однак,через те, що ніякої зміни U насправді не відбувається, то $\delta U = 0$; тому з огляду на те, що $\delta \vec{a} \neq 0$, з врахуванням (10.2) одержуємо для замкнутої системи:

$$\sum_{i=1}^{n} \vec{\nabla}_i U = 0 \ . \tag{10.3}$$

Далі, записуючи рівняння руху (9.5) у вигляді:

$$\frac{d}{dt}(m_i \vec{v}_i) = -\vec{\nabla}_i U \ , \quad i = 1,2,\ldots,n \, . \tag{10.4}$$

і сумуючи їх почленно, маємо рівняння:

$$\frac{d}{dt}\left(\sum_{i=1}^{n} m_i \vec{v}_i\right) = -\sum_{i=1}^{n} \vec{\nabla}_i U \, . \tag{10.5}$$

За допомогою (10.5) перепишемо умову (10.3) у наступному остаточному вигляді:

$$\frac{d}{dt}\left(\sum_{i=1}^{n} m_i \vec{v}_i\right) = 0 \, . \tag{10.6}$$

Рівняння (10.6) показує, що в процесі руху замкнутої системи зберігається її <u>імпульс</u> (див. § 3)

$$\vec{P} \equiv \sum_{i=1}^{n} m_i \vec{v}_i = \overrightarrow{const} \ . \tag{10.7}$$

Так як (10.7) – <u>векторна</u> рівність, еквівалентне трьом скалярним:

$$\left.\begin{aligned} P_x &\equiv \sum_i m_i \dot{x}_i = const, \\ P_y &\equiv \sum_i m_i \dot{y}_i = const, \\ P_z &\equiv \sum_i m_i \dot{z}_i = const, \end{aligned}\right\} \tag{10.8}$$

то можна сказати, що з однорідністю простору зв'язані три перших інтеграли руху замкнутої механічної системи. Адитивність вектора імпульсу системи очевидна з його визначення; важливо відзначити, що на відміну від енергії імпульс системи дорівнює сумі імпульсів

$$\vec{P} = \sum_i \vec{p}_i \quad ; \quad \vec{p}_i = m_i \vec{v} \tag{10.9}$$

окремих матеріальних точок незалежно від того, можна або не можна знехтувати їхньою взаємодією між собою.

Таким чином, закон збереження імпульсу можна сформулювати так: наслідком однорідності простору є збереження імпульсу замкнутої механічної системи.

**Зауваження 1**. Закон збереження механічного імпульсу (10.7) є частковим випадком загального закону збереження й перетворення імпульсу різних форм руху матерії. Отже, щоразу, коли ми зіштовхуємося з незбереженням імпульсу замкнутої механічної системи, то причину зникнення механічного імпульсу варто шукати в перетворенні деякої його частини в імпульс інших форм або видів руху матерії (або в помилковості нашого припущення про замкнутість системи в більш широкому, фізичному змісті).

**Зауваження 2**. Незбереження імпульсу $\vec{P}$ в незамкнутій системі не виключає можливість збереження окремих складових імпульсу. Більше того, з викладеного ясно видно, що якщо зовнішнє силове поле має трансляційну симетрію вздовж деякого напрямку $\vec{l}$ в просторі, то потенціальна енергія системи не змінюється при паралельному переносі цієї системи як цілого вздовж $\vec{l}$ (тобто $\frac{\partial U}{\partial l} = \frac{\partial U^{(e)}}{\partial l} = 0$), тому в такій системі зберігається проекція вектора імпульсу на зазначений напрямок (тобто $\frac{\partial P_e}{\partial t} = 0$ або $P_e = const$).

## § 11. Закон збереження моменту імпульсу і його зв'язок з ізотропністю простору.

Наслідком ізотропності простору є збереження моменту імпульсу для замкнутих механічних систем (закон збереження моменту імпульсу).

Дійсно, механічні властивості замкнутої системи (її рівняння руху і потенціальна енергія) внаслідок ізотропності простору не змінюються при повороті системи як єдиного цілого відносно довільного напрямку в просторі на будь-який (у тому числі і нескінченно малий) кут. Для математичного запису цього твердження нагадаємо, що поворот на нескінченно малий кут $\delta\varphi$ навколо довільного напрямку можна визначати за допомогою аксіального вектора $\delta\vec{\varphi}$ ($|\delta\vec{\varphi}| = \delta\varphi$ ), напрямок якого збігається з напрямком довільної миттєвої осі обертання. Тому легко бачити, що при такому повороті системи як цілого радіуси – вектори $\vec{r}_i$ її матеріальних часток одержать приріст:

$$\delta\,\vec{r}_i = [\delta\,\vec{\varphi}, \vec{r}_i]\ , \tag{11.1}$$

тобто зазначене перетворення повороту дається перетворенням:

$$\vec{r}_i{}' = \vec{r}_i + \delta\,\vec{r}_i = \vec{r}_i + [\delta\,\vec{\varphi}, \vec{r}_i]\ . \tag{11.2}$$

Зміну потенціальної енергії замкнутої системи при цьому формально можна записати у вигляді (див. (10.2))

$$\begin{aligned} \delta\,U \equiv \delta\,U^{(i)} &= \sum_{i=1}^{n} \vec{\nabla}_i U^{(i)} \cdot \delta\,\vec{r}_i = \sum_i \vec{\nabla}_i U^{(i)} \cdot [\delta\,\vec{\varphi}, \vec{r}_i] = \\ &= \sum_i \delta\,\vec{\varphi} \cdot \left[\vec{r}_i, \vec{\nabla}_i U^{(i)}\right] = \delta\,\vec{\varphi} \cdot \sum_i \left[\vec{r}_i, \vec{\nabla}_i U^{(i)}\right]\ . \end{aligned} \tag{11.3}$$

Однак ніякої зміни потенціальної енергії замкнутої системи при її повороті як цілого в дійсності не відбувається, тобто $\delta U^{(i)} = 0$, або, з врахуванням (11.3) у силу її самостійності $\delta\,\vec{\varphi}$ ,

$$\sum_{i=1}^{n} \left[\vec{r}_i, \vec{\nabla}_i U^{(i)}\right] = 0\ . \tag{11.4}$$

Умова (11.4) містить у собі деякий закон збереження, для одержання якого перетворимо ліву частину (11.4) за допомогою рівнянь руху (10.4): помножимо ліву й праву частини кожного ***i-го*** рівняння системи (10.4) векторно на $\vec{r}_i$, одержуємо:

$$\left[\vec{r}_i, \frac{d\vec{p}_i}{dt}\right] = -\left[\vec{r}_i, \vec{\nabla}_i U^{(i)}\right]\ ,\quad i = 1,2,\ldots,n\ . \tag{11.5}$$

Зауважуючи, що:

$$\left[\vec{r}_i, \frac{d\vec{p}_i}{dt}\right] = \frac{d}{dt}[\vec{r}_i, \vec{p}_i] - \left[\frac{d\vec{r}_i}{dt}, \vec{p}_i\right] = \frac{d}{dt}[\vec{r}_i, \vec{p}_i]\ , \tag{11.6}$$

переписуємо (11.5) у вигляді:

$$\frac{d}{dt}[\vec{r}_i, \vec{p}_i] = -\left[\vec{r}_i, \vec{\nabla}_i U^{(i)}\right]\ ,\ i = 1,2,\ldots,n\ . \tag{11.7}$$

Просумувавши почленно рівняння (11.7), знаходимо:

$$\frac{d}{dt}\left(\sum_{i=1}^{n} [\vec{r}_i, \vec{p}_i]\right) = -\sum_{i=1}^{n} \left[\vec{r}_i, \vec{\nabla}_i U^{(i)}\right]\ , \tag{11.8}$$

що дозволяє переписати умову (11.4) в остаточному вигляді:

$$\frac{d}{dt}\left(\sum_{i=1}^{n}\left[\vec{r}_i, \vec{p}_i\right]\right) = 0 \quad . \tag{11.9}$$

Рівняння (11.9) показує, що в процесі руху замкнутої системи зберігається момент імпульсу системи:

$$\vec{L} \equiv \sum_{i=1}^{n}\left[\vec{r}_i, \vec{p}_i\right] = \overrightarrow{const} \quad . \tag{11.10}$$

Вектор моменту імпульсу, як це видно з його визначення в § 3, є адитивною величиною для будь-якої замкнутої механічної системи. Таким чином, ізотропність простору призводить до існування в замкнутій системі ще трьох перших адитивних скалярних інтегралів руху – трьох компонентів моменту імпульсу, так що в цілому в замкнутій системі існує сім інтегралів руху, пов'язаних із симетрією простору й часу.

**Зауваження 1**. У загальному випадку незамкнутої системи момент її імпульсу не зберігається. Можна однак переконатися в справедливості наступного твердження: якщо при повороті як цілого деякої механічної системи, що перебуває в зовнішньому потенціальному полі, відносно якого-небудь напрямку $\vec{\alpha}$ її потенціальна енергія не змінюється, то в такій системі зберігається проекція моменту імпульсу на зазначений напрямок, тобто $L_\alpha = const$ (доведення цього результату ми опускаємо).

**Зауваження 2**. Так як задача про відносний рух замкнутої системи із двох матеріальних точок еквівалента задачі про рух однієї точки в центральносиметричному силовому полі, то в цьому останньому випадку також повинен зберігатися $\vec{L}$, але тільки відносно центра поля.

На закінчення цієї глави зробимо ще одне загальне зауваження про зв'язок між законами збереження й симетріями. Фактично всі наведені в цій главі результати є окремі випадки відомої теореми Нетер, що у своєму найпростішому формулюванні стверджує, що збереження різних динамічних характеристик механічних систем випливає з інваріантності їхніх механічних властивостей (рівнянь руху, потенціальної енергії) відносно тих або інших неперервних перетворень просторових і часових координат (таких, як перетворення зсуву в часі, трансляцій і поворотів системи як єдиного цілого в просторі й т.д.). Строге формулювання теореми Нетер можна дати тільки мовою теорії груп з використанням поняття про функції дії системи.