ОСНОВИ АНАЛІТИЧНОЇ МЕХАНІКИ

§ 12. Постановка задачі про рух невільної механічної системи. Класифікація в'язів.

Дотепер ми вивчали головним чином рух вільних механічних систем (див. § 6). У цій главі ми викладемо аналітичні методи розв'язку динамічних задач, придатні як для вільних, так і невільних (на які накладені в'язі) механічних систем.

Під невільною (або такою, на яку накладені в'язі) механічною системою будемо розуміти систему матеріальних точок з накладеними на неї додатковими умовами, які обмежують переміщення системи й змінюють характер її руху (у порівнянні з випадком відсутності цих додаткових умов). Ці додаткові умови називаються в'язями, тому що аналітично вони виражаються рівняннями (або нерівностями), що зв'язують у загальному випадку радіуси-вектори $\vec{r}_i$ й $\vec{\upsilon}_i$ швидкості точок системи :

$$\varphi_\alpha(\vec{r}_1,\vec{r}_2,...,\vec{r}_n;\vec{v}_1,\vec{v}_2,...,\vec{v}_n;t) \le 0 \quad ; \quad \alpha = 1,2,...k \quad , \qquad (12.1)$$

де k – число накладених на систему в'язів. Конкретно в'язі реалізуються у вигляді поверхонь різних тіл, твердих стрижнів, нерозтяжних ниток і т.д. Ясно, що до числа невільних механічних систем можна віднести такі системи, взаємодія яких із зовнішніми тілами здійснюється шляхом безпосереднього зіткнення (для вільних систем взаємодія із зовнішніми тілами здійснюється тільки на відстані за допомогою різних полів).

Ефект дії в'язів на механічну систему можна врахувати трьома різними способами:

1). Врахуванням силового впливу в'язів, коли ефект дії в'язів враховують введенням деяких сил, названих силами реакції в'язів (або коротше, реакціями в'язів). Тому при складанні рівнянь рухи враховуються, що на кожну точку невільної механічної системи діють два роди сил: задані зовнішні й внутрішні сили $\vec{F}_i$, які ми будемо надалі називати активними, і реакції в'язів $\vec{R}_i$, які ми будемо називати пасивними силами, оскільки ці сили зникають, якщо в'язі усуваються. На відміну від активних сил, сили реакції в'язів $\vec{R}_i$ заздалегідь невідомі (замість них відомі тільки рівняння в'язів типу (12.1)), оскільки вони залежать як від характеру активних сил $\vec{F}_i$, так і від характеру руху самої системи. Тому в рівняння руху ввійдуть додаткові невідомі величини $\vec{R}_i$, що суттєво ускладнить розв'язок цих рівнянь.

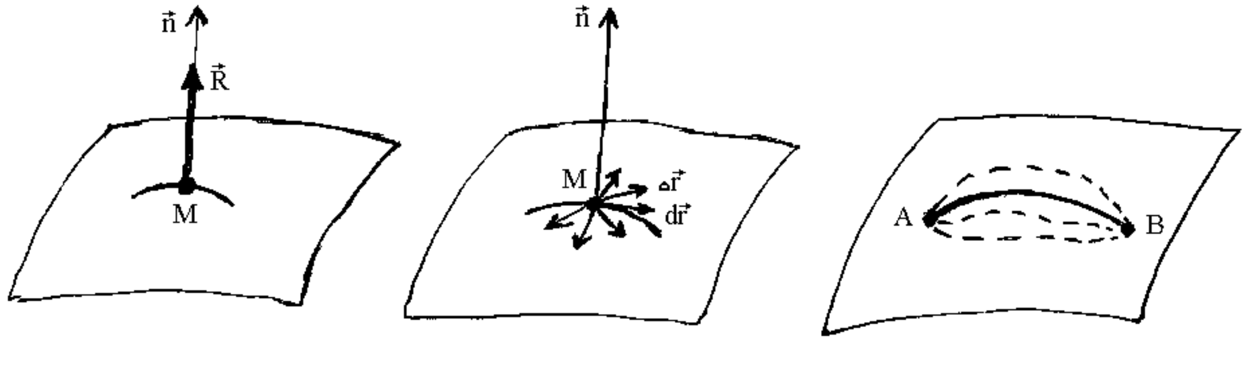


Рис. (12.1) Рис. (12.2) Рис. (12.3)

2). Ефект дії в'язів враховується не заміною їхніми невідомими силами реакції в'язів, а розглядом тих нескінченно малих переміщень $\Delta\vec{r}_i$ точок системи, які можливі при наявності даних в'язів (їх називають можливими переміщеннями; відзначимо, що дійсними переміщеннями точок $d\vec{r}_i$ називають тільки ті з можливих переміщень $\Delta\vec{r}_i$, які задовольняють не тільки рівнянням в'язів, але й диференціальним рівнянням руху).

3). Нарешті, ефект дії тих же в'язів можна врахувати розглядом не нескінченно малих можливих переміщень $\Delta\vec{r}_i$, **а** - класу можливих кінцевих рухів точок системи за кінцевий інтервал часу між деякими двома станами системи (такі рухи називають кінематично можливими). Кожен кінематично можливий рух описується таким набором функцій часу (траєкторій) $\vec{r}_1(t),\vec{r}_2(t),\ldots,\vec{r}_n(t)$, підстановка яких у рівняння в'язів обертає останні в тотожності. Ті з кінематично можливих рухів, для яких набір функцій $\vec{r}_1(t),\vec{r}_2(t),\ldots,\vec{r}_n(t)$, задовольняє не тільки рівнянням в'язів, але й диференціальним рівнянням руху, називаються дійсним рухом системи.

Можливість врахування ефекту дії тих самих в'язів трьома викладеними способами легко наочно представити на прикладі матеріальної точки **М**, що рухається по гладкій (ідеальній) поверхні, що є для неї в'язю. У цьому випадку в'язь можна врахувати: 1) або за допомогою заздалегідь не відомої по величині реакцією $\vec{R}$, спрямованої в будь-який момент часу по нормалі $\vec{n}$ до поверхні (див. мал. (12.1)); 2) або встановивши, що можливими переміщеннями точки **М** у будь-якому її положенні є тільки такі нескінченно малі переміщення $\Delta\vec{r}$, які перпендикулярні до нормалі $\vec{n}$, тобто лежать у дотичних площинах до поверхні в'язів (див. мал. (12.2)) ; 3) або вказавши, що клас кінематично можливих рухів точки **М** з деякого положення **А** в положення **В** містить тільки такі криві **АВ**, які належать поверхні в'язі (одна із цих кривих зображує дійсний рух точки – див. мал. (12.3)). На малюнках дійсна траєкторія точки **М** зображена суцільною кривою, а дійсне переміщення $d\vec{r}$ на мал. (12.2) спрямовано по дотичній до дійсної траєкторії точки.

Зауваження. Урахування ефекту дії в'язів за допомогою реакцій в'язів $\vec{R}_i$ використовується при формулюванні так званих неваріаційних принципів механіки (до них відносяться, наприклад, 2-й закон Ньютона, принцип Д'Аламбера). Врахування в'язів у термінах можливих переміщень використовується при формулюванні диференціальних варіаційних принципів механіки (таких як принцип можливих переміщень, принцип Д'Аламбера-Лагранжа, принцип Гауса, принцип Герца). Нарешті, врахування дії в'язів за допомогою розгляду кінематично можливих рухів системи дозволяє сформулювати інтегральні варіаційні принципи механіки (сюди відносяться різні форми принципів найменшої дії). Найбільш загальні із цих принципів будуть нами розглянуті в цій главі.

Для більш глибокого вивчення структури в'язів і механізму їхнього силового впливу на механічну систему необхідно ці в'язі класифікувати за різними ознаками, що відбиває ті або інші їхні властивості. Особливо важливою для розвитку механіки виявилася класифікація в'язів, пов'язана з конкретизацією відповідей на наступні чотири питання: 1) які обмеження накладають в'язі на швидкості $\vec{\upsilon}_i$ матеріальних точок системи? (у зв'язку із цим розрізняють голономні і неголономні типи в'язів); 2) змінюються або не змінюються в'язі з часом? (у зв'язку із цим розрізняють стаціонарні й нестаціонарні в'язі); 3) чи призводить накладення в'язів до зменшення числа ступенів свободи системи? (у зв'язку з відповіддю на це питання в'язі розділяють на утримуючі й не утримуючі); 4) який загальний характер сил реакції? (у цьому зв'язку розрізняють ідеальні і реальні в'язі).

Голономними (або геометричними) називаються такі в'язі, рівняння яких можна привести до виду:

$$f_\alpha(\vec{r}_1,\vec{r}_2,...,\vec{r}_n,t)=0 \quad , \quad \alpha=1,2,...k \quad , \qquad (12.2)$$

де f_α - функції тільки координат точок і часу (k – число накладених на систему в'язів). Хоча рівняння (12.2) не містять швидкостей точок $\vec{\upsilon}_i$ у явному вигляді, однак легко бачити, що голономні в'язі накладають певні обмеження не тільки на положення, але й на швидкості точок системи. Дійсно, диференціюючи рівняння (12.2) за часом, одержуємо:

$$\frac{df_\alpha}{dt}=\frac{\partial f_\alpha}{\partial t}+\sum_{i=1}^{n}\vec{v}_i\cdot\vec{\nabla}_i f_\alpha=0 \ , \ \ \alpha=1,2,\ldots,k \qquad (12.3)$$

Ці рівняння називаються диференціальними рівняннями голономних в'язів (12.2). З (12.3) видно, що голономні в'язі накладають обмеження тільки на ті складові швидкостей, які паралельні векторам $\vec{\nabla}_i f_\alpha$, але немає ніяких обмежень ні на інші складові швидкостей, ні на абсолютні значення $\vec{v}_i$ швидкостей точок. Важливою особливістю голономних в'язів є те, що їхні диференціальні рівняння (12.3) завжди можна привести до вигляду:

$$df_\alpha(\vec{r}_1,\vec{r}_2,...,\vec{r}_n,t)=0$$

і про інтегрувати. Тому голономні в'язі називають також інтегрувальними.

Неголономними (не інтегрувальними або кінематичними) називаються такі в'язі, рівняння яких:

$$\varphi_\alpha(\vec{r}_1,\vec{r}_2,...,\vec{r}_n;\vec{v}_1,\vec{v}_2,...,\vec{v}_n;t)=0$$

містять явно $\vec{\upsilon}_i$ і не зводяться до вигляду (12.2). У фізичних додатках неголономні в'язі зустрічаються рідко і тому надалі ми будемо розглядати тільки голономні механічні системи. Відзначимо, що рух неголономних систем вивчаються за допомогою спеціальних рівнянь (наприклад, рівнянь Чаплигіна, рівнянь Апеля).

Стаціонарними (або такими, що не деформуються) називаються такі в'язкі, у рівняння яких явно не входить **t**, тобто для який $\partial f_\alpha/\partial t=0$; в іншому ж випадку в'язі називають нестаціонарними (або такими, що деформуються).

Утримуючими називаються в'язі, що задаються рівностями типу (12.2), а не утримуючі в'язі визначаються нерівностями типу (12.1): $\varphi_\alpha\le 0$ (прикладом системи з не утримуючими в’язями може бути матеріальна точка, що рухається усередині сферичної порожнечі радіуса **a**; в'язь тут задається нерівністю $x^2+y^2+z^2\le a^2$). Накладення на механічну систему утримуючих в'язів обов'язково приводить до зменшення її числа ступенів свободи, тобто числа незалежних параметрів, що однозначно визначають положення системи в просторі (число ступенів свободи **S** такої системи визначається формулою $S = 3n - k$, де n-число матеріальних точок системи, k-число утримуючих в'язів). Не утримуючі в'язі не зменшують число ступенів свободи системи.

Починаючи обговорювати питання про визначення понять ідеальних і реальних в'язів, сформулюємо спочатку ці поняття для невільної матеріальної точки (тобто точки, що рухається по заданій поверхні або заданій кривій). В'язь у цьому випадку називають ідеальною, якщо сила реакції $\vec{R}$ спрямована по нормалі $\vec{n}$ (див. мал. (12.1)); у цьому випадку $\vec{R} \cdot d\vec{r} = 0$, тобто реакція ідеальної в'язі не виконує роботи по переміщенню точки. Якщо ж $\vec{R}$ спрямована під кутом до $\vec{n}$, то в'язь називається реальною, а поверхня або крива — «шорсткуватими». Проекцію $\vec{R}$ на дотичну до траєкторії матеріальної точки, що рухається, називають силою тертя ковзання. Узагальнення цих понять на випадок довільної невільної системи вимагає попереднього знайомства з поняттями віртуальних переміщень і віртуальної роботи.

Розглянемо два нескінченно близькі можливі переміщення $\Delta\vec{r}_i\,'$ й $\Delta\vec{r}_i$

довільної ***i-ої*** точки системи, що відбуваються за той самий нескінченно малий проміжок часу Δt: $\Delta\vec{r}_i\,' = \vec{v}_i\,'\Delta t$ і $\Delta\vec{r}_i = \vec{v}_i\Delta t$. Різниця $\delta\vec{r}_i$ цих переміщень називається віртуальним переміщенням матеріальної точки:

$$\delta\vec{r}_i = \Delta\vec{r}_i\,' - \Delta r_i \quad . \tag{12.4}$$

Будемо тепер вважати, що на механічну систему накладено **k-** утримуючих голономних в'язів (12.2). Тоді швидкості $\vec{v}_i$ її точок повинні задовольняти **k**-умовам (12.3). Тому можливі переміщення $\Delta\vec{r}_i$, $\Delta\vec{r}_i\,'$ задовольняють співвідношенням вигляду:

$$\frac{\partial f_\alpha}{\partial t}\Delta t + \sum_{i=1}^{n}\vec{\nabla}_i f_\alpha \cdot \Delta\vec{r}_i = 0 \ , \ \alpha = 1,2,\ldots,k \quad , \tag{12.5}$$

які отримуються множенням (12.3) на Δt. Очевидно тепер, що віртуальні переміщення (12.4) задовольняють рівнянням

$$\sum_{i=1}^{n}\vec{\nabla}_i f_\alpha \cdot \delta\vec{r}_i = 0 \ , \ \alpha = 1,2,\ldots,k \quad , \tag{12.6}$$

Якби в'язі були стаціонарними (тобто ${\partial f_\alpha}/{\partial t} = 0$), то рівняння (12.5) для $\Delta\vec{r}_i$ й рівняння (12.6) для $\delta\vec{r}_i$ збігалися б між собою. Тому віртуальні переміщення $\delta\vec{r}_i$ часто визначають як такі $\Delta\vec{r}_i$, які потенційно можливі для даного фіксованого моменту часу t=const, у якому в'язі як би “ застигають ” і припиняють змінюватися. Віртуальні переміщення $\delta\vec{r}_i$ не обумовлені дією яких-небудь сил і тому не мають тривалості. Таким чином, поняття про віртуальні переміщення системи є чисто геометричним поняттям, що характеризує тільки структуру накладених на систему в'язів. З викладеного ясно, що поняття про можливі й віртуальні переміщення збігаються тільки для систем зі стаціонарними в'язями, тому що тільки в цьому випадку рівняння (12.5) і (12.6) для них збігаються.

Математичне зауваження. В математиці величини, подібні (12.4) називаються варіаціями функцій, так що $\delta\vec{r}_i(t)$ є варіація радіуса-вектора $\vec{r}_i(t)$ відповідної точки системи, причому в декартовій системі координат:

$$\delta\vec{r}_i = \vec{i}\,\delta x_i + \vec{j}\,\delta y_i + \vec{k}\,\delta z_i \tag{12.7}$$

Під варіацією функції x(t) розуміють такий малий її приріст δx, що не пов'язаний зі зміною аргументу t (тому що t=const), а обумовлений варіюванням (зміною) самої функції, тобто переходом від функції x(t) до близької до неї функції $x'(t) = x(t) + \delta x(t)$.

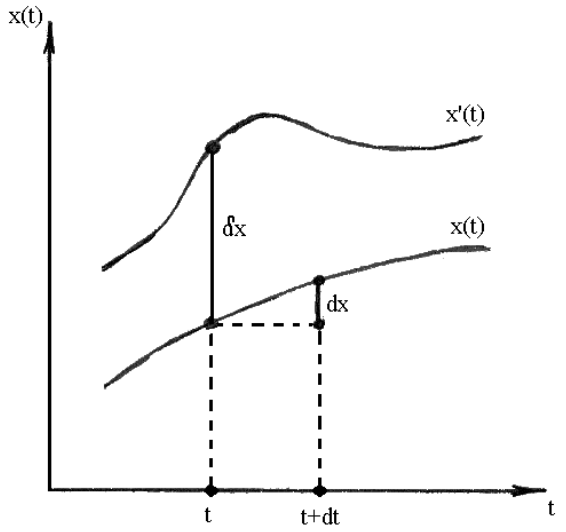


Рис. (12.4)

На малюнку (12.4) показана різниця між диференціалом dx і варіацією функції δx. У результаті варіювання радіусів-векторів $\vec{r}_i$(t) точок системи одержують приріст і будь-які функції вигляду $f_\alpha(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \ldots, \vec{r}_n, t)$. Тому ліві частини кожного зі співвідношень (12.6) варто розглядати як правила віднімання варіацій функцій f_α, тобто по визначенню:

$$\delta f_\alpha(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \ldots, \vec{r}_n, t) \equiv \sum_{i=1}^{n} \vec{\nabla}_i f_\alpha \cdot \delta.\vec{r}_i \quad . \tag{12.8}$$

Поняття про віртуальні переміщення системи дозволяє увести поняття про віртуальну роботу – ще одне чисто геометричне поняття, що характеризує структуру накладених на систему в'язів. Віртуальною роботою називається робота активних сил $\vec{F}_i$ і сил реакції в'язів $\vec{R}_i$, прикладених до ***i***-ої точки, на її віртуальному переміщенні $\delta.\vec{r}_i$. Віртуальна робота над системою δA складається з віртуальної роботи δA_F активних сил і віртуальної роботи δA_R сил реакцій в'язів, обумовлених формулам:

$$\delta A_F \equiv \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i \cdot \delta\vec{r}_i \;\; , \;\; \delta A_R \equiv \sum_{i=1}^{n} \vec{R}_i \cdot \delta\vec{r}_i \quad . \tag{12.9}$$

Тепер ми можемо дати строге визначення поняття ідеальних в'язів для довільної невільної механічної системи (вище це було зроблено тільки для матеріальної точки). Ідеальними й утримуючими в'язями називаються такі в'язі, для яких віртуальна робота всіх реакцій в'язів дорівнює нулю на будь-якому віртуальному переміщенні системи, тобто:

$$\delta A_R \equiv \sum_{i=1}^{n} \vec{R}_i \cdot \delta\vec{r}_i = 0 \quad . \tag{12.10}$$

Реальні в'язі призводять до порушення рівності (12.10). Надалі ми будемо вивчати тільки голономні системи з ідеальними утримуючими в'язями, тому що для реальних (неідеальних) в'язів основна задача динаміки в загальному випадку не є визначеною. Покажемо це, з огляду на ефект дії в'язів за допомогою заздалегідь невідомих реакцій в'язів $\vec{R}_i$.

Основна динамічна задача про рух невільної механічної системи з Голономними в'язями складається у відшуканні по заданим активним силам $\vec{F}_i$ і заданим рівнянням в'язів (12.2) закон її руху і сили реакції в'язів $\vec{R}_i$. Ця задача зводиться до спільного розв’язку системи диференціальних рівнянь руху (див. § 6) і рівнянь в'язів:

$$m_i \frac{d^2\vec{r}_i}{dt^2} = \vec{F}_i + \vec{R}_i \quad , \quad i = 1,2,\ldots,n \quad , \tag{12.11}$$

$$f_\alpha(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \ldots, \vec{r}_n, t) = 0 \quad , \quad \alpha = 1,2,\ldots,k \tag{12.12}$$

з початковими умовами, що задовольняють рівнянням в'язів (12.2). Тут n – число матеріальних точок системи, k – число накладених в'язів (найцікавіший випадок, коли k<3n), а $\vec{F}_i$ й $\vec{R}_i$ рівні (див. §6)

$$\vec{F}_i = \vec{F}_i^{(e)} + \sum_{j=1}^{n}{}' \vec{F}_{ji} \quad , \quad \vec{R}_i = \sum_{\alpha=1}^{k} \vec{R}_{i\alpha} \quad , \tag{12.12}$$

де $\vec{R}_{i\alpha}$- сила реакції в'язів з номером α на ***і-ю*** точку. Система **3n+k** скалярних рівнянь (12.11) – (12.2) містить **6n**-невідомих величин: 3n координат точок та 3n-проекцій сил реакцій в'язів. Таким чином, у загальному випадку число невідомих більше числа рівнянь (6n>3n+k) і сформульоване завдання є невизначеним.

Покажемо, що основна задача динаміки виявляється повністю визначенною для голономних систем з ідеальними в'язями. Для цього досить довести, що умова ідеальності в'язів (12.10) дозволяє одержати замкнуту систему рівнянь типу (12.11) – (12.2). Із цією метою помножимо кожне зі співвідношень (12.6) на невизначений множник $-\lambda_\alpha$ і отримані рівності складемо з умовою ідеальності в'язів (12.10). У результаті одержуємо рівність:

$$\sum_{i=1}^{n} \left(\vec{R}_i - \sum_{\alpha=1}^{k} \lambda_\alpha \vec{\nabla}_i f_\alpha \right) \cdot \delta\vec{r}_i = 0 \quad . \tag{12.13}$$

де k-варіацій координат точок є залежними, а інші 3n-k варіацій – незалежними. Підберемо тепер множники λ_α так, щоб коефіцієнти при k- варіаціях координат оберталися в нуль (така процедура завжди здійсненна). Після цього в (12.13) залишиться 3n-k доданків, що містять варіації тільки незалежних координат, і так як зазначені варіації можна задавати довільно, то коефіцієнти при них також повинні обертатися в нуль. Таким чином, ми дійдемо висновку, що сили реакції $\vec{R}_i$ ідеальних в'язів являють собою лінійні суперпозиції градієнтів від функцій f_α, які визначають в'язі, тобто:

$$\vec{R}_i = \sum_{\alpha=1}^{k} \lambda_\alpha \vec{\nabla}_i f_\alpha \quad , \quad i = 1,2,\ldots,n \quad . \tag{12.14}$$

Підставляючи вираз (12.14) в (12.11) , одержуємо замість (12.11) - (12.2) систему рівнянь

$$\left.\begin{aligned} & m_i \frac{d^2\vec{r}_i}{dt^2} = \vec{F}_i + \sum_{\alpha=1}^{k} \lambda_\alpha \vec{\nabla}_i f_\alpha \quad , \quad i = 1,2,\ldots,n \\ & f_\alpha(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \ldots, \vec{r}_n, t) = 0 \quad , \quad \alpha = 1,2,\ldots,k \quad , \end{aligned}\right\} \tag{12.15}$$

які називаються рівняннями Лагранжа першого роду. (12.15) є замкнута система 3n+k скалярних рівнянь відносно 3n+k невідомих: 3n координат точок й k-невизначених множників Лагранжа $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k$.

Проілюструємо постановку основної задачі динаміки для найпростішої голономної системи з в’язями. Для прикладу розглянемо матеріальну точку маси m, що рухається в заданому силовому полі $\vec{F}$ по поверхні сфери радіуса α. Диференціальні рівняння руху такої системи можна записати у вигляді (12.11)

$$m_i \frac{d^2\vec{r}_i}{dt^2} = \vec{F} + \vec{R} \quad \text{або} \quad \left.\begin{aligned} m\ddot{x} &= F_x + R_x \\ m\ddot{y} &= F_y + R_y \\ m\ddot{z} &= F_z + R_z \end{aligned}\right\} \quad . \tag{12.16}$$

Замість $\vec{R}$ відомо тільки рівняння в'язів (рівняння сфери)

$$f(x,y,z) \equiv x^2 + y^2 + z^2 - a^2 = 0 \quad . \tag{12.17}$$

Очевидно, що для системи чотирьох рівнянь (12.16) – (12.17) недостатньо для визначення шести невідомих величин: $x(t), y(t), z(t), R_x(t), R_y(t), R_z(t)$. Для пошуку розв’язку необхідні деякі додаткові відомості про конкретну реалізацію в'язів (12.17) і характер її силового впливу на точку m. Конкретизуємо задачу: допустимо,що точка m підвішена на нерозтяжній твердій нитці довжиною **a** і робить малі коливання в полі тяжіння Землі, тобто $\vec{F} = m\vec{g}$ (сферичний математичний маятник). У цьому випадку $\vec{R}$ (натяг нитки підвісу) у будь-який момент часу спрямований уздовж нитки, а в'язь є ідеальною, тому що $\vec{R} \perp \delta\vec{r}$ й умова ідеальності (12.10) задовольняється. Тому згідно (12.14) і (12.17) маємо:

$$\vec{R} = \lambda\vec{\nabla} f(x,y,z) = \lambda\vec{\nabla}(x^2+y^2+z^2-a^2) = \lambda(\vec{i}\,\frac{\partial}{\partial x}+\vec{j}\,\frac{\partial}{\partial y}+\vec{k}\,\frac{\partial}{\partial z})\,(x^2+y^2+z^2-a^2) =$$
$$= 2\lambda(\vec{i}\,x+\vec{j}y+\vec{k}\,z) = 2\lambda\vec{r}$$

Змінюючи позначення невідомої постійної $2\lambda \to -\lambda$, одержуємо звичний запис $\vec{R} = -\lambda\,\vec{r}$ для натягу нитки підвісу з початком координат у точці підвісу. Таким чином, конкретизована задача зводиться до розв’язку системи чотирьох скалярних рівнянь Лагранжа першого роду:

$$\left.\begin{aligned} &m\ddot{\vec{r}} = m\vec{g} - \lambda\vec{r} \ \ , \\ &x^2+y^2+z^2 = a^2 \ \ , \end{aligned}\right\} \qquad (12.18)$$

для чотирьох невідомих функцій $x(t), y(t), z(t)$ і $\lambda(t)$. Відзначимо, що початкові умови в цій задачі не можуть бути довільними, а повинні бути задані так, щоб і у початковий момент задовольнялося рівняння в'язів (12.17), тобто точка перебувала на сфері, а вектор її швидкості $\vec{v}$ лежав у площині, дотичній до сфери, так як диференціальне рівняння в'язів згідно (12.3) і (12.17) має вигляд $\vec{r}\cdot\vec{v} = 0$ (12.19)

Зауваження. Спосіб розв’язку основної задачі динаміки для невільних механічних систем з голономними й ідеальними в'язями, що призводить до рівнянь Лагранжа першого роду (12.15), має наступні істотні недоліки: 1) система 3n+k скалярних рівнянь (12.15) у загальному випадку дуже складна, тому що «претендує» на одночасне визначення і координат точок системи і сил реакції в'язів (відзначимо, що зі збільшенням числа в'язів число ступенів свободи системи S=3n-k зменшується, а число рівнянь 3n+k зростає, тобто при цьому зростають складності математичного аналізу системи (12.15)); 2) викладений спосіб розв’язку суттєво використовує чисто механічне поняття сили, тому його застосування обмежене тільки реакціями механіки й не допускає узагальнення на інші розділи фізики, де поняття сили незастосовне (наприклад, у класичній і квантовій теорії фізичних полів).

§13. Рівняння Лагранжа. Функція Лагранжа.

У цьому параграфі ми викладемо такий спосіб розв’язку основної динамічної задачі для механічних систем з в’язями, який не містить недоліків способу викладеного в § 12. Основна ідея полягає в тому, щоб загальну динамічну задачу про відшукання закону руху системи і сил реакції в'язів $\vec{R}_i$ розбити (розчленувати) на дві задачі: 1) знайти спочатку закон руху системи (цю задачу надалі ми й будемо називати основною); для цього необхідно одержати замкнуту систему рівнянь для S =3n-k незалежних координат системи (за допомогою яких можна задати стан системи з в’язями в будь-який момент часу); 2) потім за допомогою рівнянь (12,11) визначити й невідомі $\vec{R}_i$, якщо в цьому є необхідність (ця задача тривіальна в порівнянні з першою, тому що її розв’язок зводиться до взяття других похідних за часом від координат, що завжди здійсненно). Надалі ми будемо вирішувати тільки основну задачу знаходження закону руху механічної системи з в’язями, що складається з **n-** матеріальних точок, на які накладене **k**-ідеальних, утримуючих голономних в'язів. Необхідні для розв’язку цієї задачі рівняння руху можна одержати послідовним виключенням із системи рівнянь Ньютона (12,11) спочатку невідомих сил реакцій в'язів $\vec{R}_i$, а потім і залежних координат системи з в'язями.

Для виключення сил реакцій в'язів, помножимо скалярно кожне з рівнянь руху (12,11) на віртуальне переміщення $\delta\vec{r}_i$ відповідної точки й складемо почленно результати множення. Одержуємо рівняння:

$$\sum_{i=1}^{n}(\vec{F}_i - m_i\ddot{\vec{r}}_i)\cdot\delta\vec{r}_i + \sum_{i=1}^{n}\vec{R}_i\cdot\delta\vec{r}_i = 0 \qquad (13,1)$$

В силу умови ідеальності в'язів (12,10) остання сума в (13,1) обертається в нуль, тому перепишемо (13,1) у вигляді:

$$\sum_{i=1}^{n}(\vec{F}_i - m\dot{\vec{v}}_i)\cdot\delta\vec{r}_i = 0 \qquad (13,2)$$

Рівняння (13,2) являє собою математичне формулювання одного з найважливіших диференціальних варіаційних принципів механіки – принципу Д'Аламбера – Лагранжа, що стверджує: якщо на механічну систему накладені утримуючі, голономні й ідеальні в'язі, то в кожен момент часу сума віртуальних робіт всіх активних сил $\vec{F}_i$ і так званих " сил інерції " Д'Аламбера $(-m_i\dot{\vec{v}}_i)$ дорівнює нулю для будь-якого віртуального переміщення системи. Рівняння (13,2) називають також загальним рівнянням динаміки голономних систем, тому що його можна прийняти в якості основної і єдиної аксіоми для побудови теорії руху таких систем (з нього можна одержати будь-які інші рівняння руху, тобто такі, як рівняння Ньютона, так і рівняння Лагранжа).

Рівняння (13,2) містять варіації $\delta\vec{r}_i$ як незалежних, так і залежних координат системи з в'язями, тому що на неї накладена **k**-в'язів виду (12,2). Тому для одержання з (13,2) диференціальних рівнянь руху необхідно виключити із цього рівняння варіації залежних координат, тобто перейти до незалежних (або, як говорять, узагальнених) координат механічної системи.

Узагальненими (або незалежними) координатами механічної системи називають будь-які 3n-k величин $q_1, q_2, ..., q_s$ (число яких збігається із числом ступенів свободи системи s=3n-k), що однозначно визначають положення системи в просторі в будь-який момент часу. Із цього визначення випливає, що узагальнені координати повинні задовольняти наступним двом вимогам:

1) Декартові координати точок повинні бути однозначними функціями узагальнених координат вигляду:

$$\vec{r}_i = \vec{r}_i(q_1, q_2, ..., q_s, t)\ ,\ \ i = 1,2,\dots,n\ , \qquad (13,3)$$

якщо на систему накладені нестаціонарні в'язі, або в'язі вигляду:

$$\vec{r}_i = \vec{r}_i(q_1, q_2, ..., q_s)\ ,\ \ i = 1,2,\dots,n\ , \qquad (13,4)$$

якщо на систему накладені стаціонарні в'язі.

2) Узагальнені координати необхідно вибирати в повній відповідності з накладеними на систему в'язями. Це означає, що рівняння в'язів (12,2) повинні обертатися в тотожність при підстановці в них функцій (13,3) або (13,4).

Пояснимо сказане на прикладі сферичного маятника, розглянутого в § 12. Для цієї системи n=1, k=1, тому s=3n–k=2, тобто положення маятника можна задати за допомогою двох узагальнених координат, у якості яких можна вибрати сферичні координати θ і φ. При цьому декартові координати однозначно виражаються через θ і φ:

$$x = a\sin\theta\cos\varphi\,,\quad y = a\sin\theta\sin\varphi\,,\quad z = a\cos\theta\quad, \qquad (13,5)$$

а рівняння в'язів (12,17) обертається в тотожність при підстановці в нього функції (13,5), що легко перевірити.

Зауваження. В §6 ми бачили, що стан вільної системи в будь-який момент часу визначається одночасним заданням її декартових координат $x_1, y_1, z_1; x_2, y_2, z_2; ...; x_n, y_n, z_n$ і декартових компонент швидкостей точок $\dot{x}_1, \dot{y}_1, \dot{z}_1; ...; \dot{x}_n, \dot{y}_n, \dot{z}_n$. Аналогічно, стан системи з в’язями в будь-який момент часу повністю визначається одночасним завданням її узагальнених координат $q_1, q_2, ..., q_s$ й узагальнених швидкостей $\dot{q}_1, \dot{q}_2, ..., \dot{q}_s$. Ясно, що фізично таке визначення стану системи засновано на допущенні про можливості одночасного точного виміру в макроскопічних тілах будь-яких фізичних величин (див. §6).

Випишемо тут ряд формул, якими ми надалі скористаємося, описуючи перехід від декартових координат до узагальнених. Для віртуальних переміщень із (13,3) маємо:

$$\delta\vec{r}_i = \sum_{\alpha=1}^{s} \frac{\partial\vec{r}_i}{\partial q_\alpha}\,\delta.q_\alpha\quad,\quad i = 1,2,\ldots,n\quad, \qquad (13,5)$$

де δq_α - варіації узагальнених (незалежних) координат. Зв'язок між швидкостями точок $\vec{v}_i = \frac{d\vec{r}_i}{dt}$ й їхніми узагальненими швидкостями $\dot{q}_\alpha = dq_\alpha / dt$ одержуємо, диференціюючи (13,3) за часом:

$$\vec{v}_i = \frac{\partial\vec{r}_i}{dq_1}\dot{q}_1 + \frac{\partial\vec{r}_i}{\partial q_2}\dot{q}_2 + \ldots + \frac{\partial\vec{r}_i}{\partial q_s}\dot{q}_s + \frac{\partial\vec{r}_i}{\partial t} = \sum_{\alpha=1}^{s}\frac{\partial\vec{r}_i}{\partial q_\alpha}\dot{q}_\alpha + \frac{\partial\vec{r}_i}{\partial t}\quad,\quad i = 1,2,\ldots,n\quad. \qquad (13,6)$$

Так як згідно (13,6) швидкості $\vec{v}_i$ є лінійні функції узагальнених швидкостей $\dot{q}_\alpha$, то беручи часткові похідні по $\dot{q}_\alpha$ від співвідношень (13,6), одержуємо тотожності:

$$\frac{\partial\vec{v}_i}{\partial\dot{q}_\alpha} \equiv \frac{\partial\vec{r}_i}{\partial q_\alpha}\quad,\quad i = 1,2,\ldots,n\quad;\quad \alpha = 1,2,\ldots,s\quad. \qquad (13.7)$$

Далі, з огляду на те, що $\partial\vec{r}_i / \partial q_\alpha$ є функції узагальнених координат q_β і часу t , та використовуючи (13,6) одержуємо:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial\vec{r}_i}{\partial q_i}\right)=\sum_{\beta=1}^{s}\frac{\partial}{\partial q_\beta}\left(\frac{\partial\vec{r}_i}{\partial q_\alpha}\right)\cdot\dot{q}_\beta+\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial\vec{r}_i}{\partial q_\alpha}\right)=\sum_{\beta=1}^{s}\frac{\partial}{\partial q_\alpha}\left(\frac{\partial\vec{r}_i}{\partial q_\beta}\right)\cdot\dot{q}_\beta+\frac{\partial}{\partial q_\alpha}\left(\frac{\partial\vec{r}_i}{\partial t}\right)=$$

$$=\frac{\partial}{\partial q_\alpha}\left(\sum_{\beta=1}^{s}\frac{\partial\vec{r}_i}{\partial q_\beta}\dot{q}_\beta+\frac{\partial\vec{r}_i}{\partial t}\right)=\frac{\partial\vec{v}_i}{\partial q_\alpha}$$

таким чином остаточно маємо тотожності:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial\vec{r}_i}{\partial q_\alpha}\right)\equiv\frac{\partial\vec{v}_i}{\partial q_\alpha}\quad,\quad i=1,2,\ldots,n\;\;;\;\;\alpha=1,2,\ldots,s\quad. \tag{13,8}$$

Перейдемо тепер у рівнянні (13,2) до узагальнених координат. Підставляючи в (13,2) вираження (13,5) і змінюючи порядок виконання операцій підсумовуванням по індексах $\boldsymbol{i}$ та $\boldsymbol{\alpha}$, одержуємо:

$$\sum_{\alpha=1}^{s}\left(\sum_{i=1}^{n}\vec{F}_i\cdot\frac{\partial\vec{r}_i}{\partial q_\alpha}-\sum_{i=1}^{n}m_i\dot{\vec{v}}_i\cdot\frac{\partial\vec{r}_i}{\partial q_\alpha}\right)\delta q_\alpha=0 \tag{13,9}$$

Уведемо позначення:

$$Q_\alpha\equiv\sum_{i=1}^{n}\vec{F}_i\cdot\frac{\partial\vec{r}_i}{\partial q_\alpha}=\sum_{i=1}^{n}\left(F_{i_x}\frac{\partial x_i}{\partial q_\alpha}+F_{i_y}\frac{\partial y_i}{\partial q_\alpha}+F_{i_z}\frac{\partial z}{\partial q_\alpha}\right)\delta q_\alpha=0\quad,\quad\alpha=1,2,\ldots,s \tag{13,10}$$

і назвемо скалярну величину Q_α узагальненою силою, що відповідає незалежній координаті q_α. Так як віртуальні переміщення δq_α незалежні, то всі коефіцієнти при всіх переміщеннях у лівій частині рівності (13,9) повинні обертатися в нуль, тобто з врахуванням (13,10) маємо рівняння:

$$\sum_{i=1}^{n}m_i\dot{\vec{v}}_i\cdot\frac{\partial\vec{r}_i}{\partial q_\alpha}=Q_\alpha\quad,\quad\alpha=1,2,\ldots,s \tag{13,11}$$

Це і є, по суті справи, шукані рівняння руху в узагальнених координатах, де $\vec{r}_i$ й $\vec{\upsilon}_i$ згідно (13,3) і (13,6) варто розглядати як функції узагальнених координат і швидкостей: $\vec{r}_i\equiv\vec{r}_i(q,t)$, $\vec{v}_i\equiv\vec{v}_i(q,\dot{q},t)$. Тут і надалі ми скористаємося скороченими позначеннями: $q\equiv\{q_1,q_2,...,q_s\}$ і $\dot{q}\equiv\{\dot{q}_1,\dot{q}_2,...,\dot{q}_s\}$. Для кращого розуміння фізичного змісту величини, що є в лівій частині (13,11), проробимо з нею ряд тотожних перетворень. Насамперед помітимо, що:

$$m_i\dot{\vec{v}}_i\cdot\frac{\partial\vec{r}_i}{\partial q_\alpha}=\frac{d}{dt}\left(m_i\vec{v}_i\cdot\frac{\partial\vec{r}_i}{\partial q_\alpha}\right)-m_i\vec{v}_i\cdot\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial\vec{r}}{\partial q_\alpha}\right)$$

звідки з урахуванням тотожностей (13,7) - (13,8) одержуємо:

$$m_i\dot{\vec{v}}_i\cdot\frac{\partial\vec{r}_i}{\partial q_\alpha}=\frac{d}{dt}\left(m_i\vec{v}_i\cdot\frac{\partial\vec{\vartheta}_i}{\partial\dot{q}_\alpha}\right)-m_i\vec{v}_i\cdot\frac{\partial\vec{v}_i}{\partial q_\alpha}=\frac{d}{dt}\frac{\partial}{\partial\dot{q}_\alpha}\left(\frac{m_iv_i^2}{2}\right)-\frac{\partial}{\partial q_\alpha}\left(\frac{m_iv_i^2}{2}\right)$$

і, отже,

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n}m_i\dot{\vec{v}}_i\cdot\frac{\partial\vec{r}_i}{\partial q_\alpha}&=\sum_{i=1}^{n}\frac{d}{dt}\frac{\partial}{\partial\dot{q}_\alpha}\left(\frac{m_iv_i^2}{2}\right)-\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial}{\partial q_\alpha}\left(\frac{m_iv_i^2}{2}\right)=\\&=\frac{d}{dt}\frac{\partial}{\partial\dot{q}_\alpha}\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{m_iv_i^2}{2}\right)-\frac{\partial}{\partial q_\alpha}\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{m_iv_i^2}{2}\right)=\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial\dot{q}_\alpha}-\frac{\partial T}{\partial q_\alpha}\end{aligned}\qquad(13.12)$$

де $T\equiv T(q,\dot{q},t)$ - кінетична енергія системи, представлена як функція узагальнених координат q, узагальнених швидкостей $\dot{q}$ і часу t.

З врахуванням (13.12) перепишемо рівняння (13.11) в остаточному вигляді:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial\dot{q}_\alpha}-\frac{\partial T}{\partial q_\alpha}=Q_\alpha\quad,\quad\alpha=1,2,...,s\quad.\qquad(13.13)$$

Ці рівняння називаються рівняннями Лагранжа другого роду або просто рівняннями Лагранжа. Вони справедливі для будь-якої механічної системи з ідеальними голономними й утримуючими в'язями.

Невідомими в цих рівняннях є функції $q_\alpha(t)$, які однозначно визначають положення системи в просторі (причому число невідомих дорівнює числу рівнянь). Велика перевага рівнянь Лагранжа полягає в тому, що їхнє число дорівнює числу ступенів свободи системи й не залежить від кількості вхідних у систему точок і тіл. Наприклад, машини й механізми складаються з багатьох тіл (деталей), а мають звичайно одну-дві ступені свободи; отже, вивчення їхнього руху потребує складання лише одного-двох рівнянь Лагранжа (тому вони широко використовуються в динаміці машин і механізмів, у теорії коливань, теорії гіроскопа і т.д.).

Методика застосування рівнянь Лагранжа до розв'язку конкретних задач складається з наступних кроків:

1) вибираються узагальнені координати системи q (для складних систем – це нетривіальна задача);

2) знаходиться явний вираз для $T(q,\dot{q},t)$ й за допомогою (13.10) по заданим силам $\vec{F}_i$ визначаються узагальнені сили Q_α;

3) складаються рівняння (13.13) у явному вигляді (після підстановки $T(q,\dot{q},t)$ в лівій частині рівняння (13.13) будуть містити $q_\alpha,\dot{q}_\alpha,\ddot{q}_\alpha$, т. ч. будуть звичайними диференціальними рівняннями другого порядку відносно невідомих $q_\alpha(t)$);

4) інтегруючи ці рівняння й визначаючи сталі інтегрування по початковим або крайовим умовам, знаходять залежності $q_\alpha=q_\alpha(t)$, $\alpha=1,2,...,s$, тобто закон руху системи в узагальнених координатах (при необхідності за допомогою (13.13) знаходять потім координатну форму закону руху системи $\vec{r}_i=\vec{r}_i(t)$).

Зауваження 1. Рівняння Лагранжа (13.13) мають велике значення також і для динаміки вільних механічних систем, стосовно яких вони збігаються з рівняннями руху Ньютона, записаними в довільній (залежної від вибору узагальнених координат) системі криволінійних координат (доведення цього твердження ми опускаємо).

Зауваження 2. Варто мати на увазі, що вибір узагальнених координат системи неоднозначний: якщо q й q' - два набори узагальнених координат однієї й тієї ж системи, то ці набори є однозначні функції один одного вигляду:

$$q_\alpha = q_\alpha(q'_1, q'_2, \dots q'_s, t) \ , \quad \alpha = 1,2,\dots,s \tag{13.14}$$

Перетворення (13.14) від одного набору узагальнених координат q до іншого набору q' називають точковими перетвореннями. Підставляючи (13.14) в (13.13), одержуємо новий однозначний вираз $\vec{r}_i$ через q':

$$\vec{r}_i = \vec{r}_i\ (q'_1, q'_2, \dots q'_s, t) \ , \quad i = 1,2,\dots,n \tag{13.15}$$

Ясно, що якщо тепер переходити в рівнянні (13.12) до узагальнених координат за допомогою (13.15), то одержимо рівняння Лагранжа тієї ж форми, що й (13.13), але тільки в штрихованих координатах. Таким чином, рівняння Лагранжа інваріантні відносно точкових перетворень (13.14).

Дослідимо тепер більш докладно структуру рівнянь Лагранжа (13.13) для різних класів (див. § 7) механічних систем. Ця структура визначається конкретним виглядом узагальнених сил Q_α і кінетичною енергією T. Розглянемо спочатку залежність форми (13.13) від вигляду функцій $Q_\alpha(q, \dot{q}, t)$.

Нехай всі активні сили $\vec{F}_i$ (як внутрішні так і зовнішні) є потенціальними, тобто $\vec{F}_i = -\vec{\nabla}_i U$, де $U = U(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \dots, \vec{r}_n)$ - повна потенціальна енергія системи (див. § 7). Підставляючи сюди (13.3), тобто розглядаючи U як неявну функцію узагальненої сили (13.10), маємо:

$$Q_\alpha \equiv \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_\alpha} = -\sum_{i=1}^{n} \vec{\nabla}_i U \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_\alpha} = -\frac{\partial U}{\partial q_\alpha} \ , \quad \alpha = 1,2,\dots,s \quad , \tag{13.16}$$

де $U = U(q,t)$, а залежність U від t є результатом не стаціонарності в'язів. Очевидно, що U не залежить від узагальнених швидкостей $\dot{q}_\alpha$, тобто

$$\frac{\partial U}{\partial \dot{q}_\alpha} \equiv 0 \ , \quad \alpha = 1,2,\dots,s \quad . \tag{13.17}$$

З урахуванням (13.16) і (13.17) рівняння Лагранжа (13.13) можна представити у вигляді:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial}{\partial \dot{q}_\alpha}(T - U) - \frac{\partial}{\partial q_\alpha}(T - U) = 0 \quad ,$$

або

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha} - \frac{\partial L}{\partial q_\alpha} = 0 \ , \quad \alpha = 1,2,\dots,s \quad , \tag{13.18}$$

де функція узагальнених координат q, узагальнених швидкостей $\dot{q}$ і часу t вигляду:

$$L(q,\dot{q},t) = T(q,\dot{q},t) - U(q,t) \qquad (13.19)$$

називається <u>функцією Лагранжа</u> механічної системи. Хоча тут функцію Лагранжа (13.19) ми ввели формальним чином з метою запису рівнянь Лагранжа (13.13) для <u>механічних систем з потенціальними активними силами</u> у формі (13.18), однак в § 14 ми покажемо, що $L(q,\dot{q},t)$ є найважливішою <u>функцією стану</u> механічної системи.

<u>Зауваження 1</u>. Легко переконатися, що до вигляду (13.18) рівняння Лагранжа (13.13) приводяться також і для класу механічних систем з <u>узагальнено-потенціальними силами</u>, тобто для таких систем, узагальнені сили Q_α яких можна представити у вигляді:

$$Q_\alpha = -\frac{\partial V}{\partial q_\alpha} + \frac{d}{dt}\frac{\partial V}{\partial \dot{q}_\alpha} \ , \ \alpha = 1,2,\ldots,s \ , \qquad (13.20)$$

де $V = V(q,\dot{q},t)$ - так званий <u>узагальнений потенціал</u>, або <u>потенціал, що залежить від швидкості</u>. Функція Лагранжа для зазначених систем визначається як різниця кінетичної енергії системи і її узагальненого потенціалу, тобто:

$$L(q,\dot{q},t) = T(q,\dot{q},t) - V(q,\dot{q},t) \ . \qquad (13.21)$$

Найважливішим прикладом системи з узагальнено-потенційними силами є система заряджених часток, що рухаються в зовнішньому електромагнітному полі. Наприклад, у вигляді (13.20) можна представити силу Лоренца (див. частина II цього курсу).

<u>Зауваження 2</u>. Якщо на механічну систему поряд з потенційними (або узагальнено-потенційними) активними силами діють і <u>дисипативні сили</u> (тобто сили системи, що приводять до розсіювання механічної енергії,) , то при записі рівнянь Лагранжа (13.13) діють таким чином. Кожну узагальнену силу Q_α розбивають на дві частини:

$$Q_\alpha = Q_\alpha^{(n)} + Q_\alpha^{(н)} \ , \ \alpha = 1,2,\ldots,s \ , \qquad (13.22)$$

де $Q_\alpha^{(n)} = -\dfrac{\partial U}{\partial q_\alpha}$ (або $E \equiv \sum\limits_{\alpha=1}^{s} \dot{q}_\alpha \dfrac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha} - L = const$)

- узагальнені сили, обумовлені дією на систему тільки потенціальних (або узагальнено-потенціальних) сил, і:

$$Q_\alpha^{(н)} = \sum_{i=1}^{n} F_i^{(н)} \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_\alpha} \ , \ \alpha = 1,2,\ldots,s \ , \qquad (13.23)$$

- узагальнені сили, що виникають у результаті дії на систему не потенціальних дисипативних сил в'язкого тертя. Легко бачити, що рівняння Лагранжа (13.13) у цьому випадку можна представити у вигляді:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha} - \frac{\partial L}{\partial q_\alpha} = Q_\alpha^{(н)} \quad , \quad \alpha = 1,2,\ldots,s \quad , \tag{13.24}$$

де $L = T - U$ (або $L = T - V$).

Розглянемо тепер структуру кінетичної енергії $T(q,\dot{q},t)$ <u>невільної</u> системи і її вплив на вигляд $L(q,\dot{q},t)$. По визначенню (див. § 3 й § 9) кінетична енергія <u>будь-якої</u> системи є <u>однорідною</u> й <u>позитивно визначеною</u> квадратичною формою швидкостей $\vec{\vartheta}_i$ матеріальних точок системи. Однак кінетична енергія <u>невільної</u> системи <u>в загальному випадку</u> виявляється <u>неоднорідною</u> квадратичною формою відносно <u>узагальнених</u> швидкостей $\dot{q}_\alpha$ системи.

Дійсно, підставляючи (13.6) у визначення $T = \sum_{i=1}^{n} \frac{m_i v_i^2}{2} = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} m_i \vec{v}_i \cdot \vec{v}_i$ кінетичної енергії, одержуємо:

$$T = T^{(2)} + T^{(1)} + T^{(0)} \quad , \tag{13.25}$$

де

$$T^{(2)} = \frac{1}{2}\sum_{\alpha,\beta=1}^{s} f_{\alpha\beta}\dot{q}_\alpha \dot{q}_\beta \,, \qquad f_{\alpha\beta}(q,t) = f_{\beta\alpha}(q,t) = \sum_{i=1}^{n} m_i \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_\alpha}\cdot\frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_\beta} \quad , \tag{13.26}$$

$$T^{(1)} = \sum_{\alpha=1}^{s} f_\alpha \dot{q}_\alpha \,, \qquad f_\alpha = (q,t) = \sum_{i=1}^{n} m_i \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_\alpha}\cdot\frac{\partial \vec{r}}{\partial t} \quad , \tag{13.27}$$

$$T^{(0)} = T^{(0)}(q,t) = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} m_i \left(\frac{\partial \vec{r}_i}{\partial t}\right)^2 \ . \tag{13.28}$$

Таким чином, з (13.25) – (13.28) видно, що <u>не стаціонарність</u> в'язів, що накладаються на механічну систему, приводить до двох ефектів: 1) T виявляється <u>неоднорідною</u> квадратичною формою $\vec{q}_\alpha$; 2) як T так і L системи стають явно залежними від часу.

У випадку, коли <u>на систему накладені тільки стаціонарні в'язі</u>, а <u>всі активні сили</u>, що діють на неї, <u>є потенційними</u>, то $T = T^{(2)}$, $U = U(q,t)$ і функцію Лагранжа системи можна представити у вигляді (див. (13.19) і (13.26)):

$$L = \frac{1}{2}\sum_{\alpha,\beta=1}^{s} f_{\alpha\beta}(q)\dot{q}_\alpha \dot{q}_\beta - U(q,t) = T^{(2)} - U \ . \tag{13.29}$$

Так як $T = T^{(2)}$ розглянутої системи є <u>однорідна квадратична</u> форма від $\dot{q}_\alpha$, то корисно наступне:

математичне зауваження. Якщо $f(x_1, x_2, ..., x_s)$ - однорідна функція порядку *n*, то має місце рівність (теорема Ейлера)

$$\sum_{\alpha=1}^{s} x_{\alpha} \frac{\partial f}{\partial x_{\alpha}} = nf \quad . \tag{13.30}$$

Дійсно, функція $f(x_1, x_2, ..., x_s)$ називається <u>однорідною порядку *n*</u>, якщо

$$f(\lambda x_1, \lambda x_2, ..., \lambda x_s) = \lambda^n f(x_1, x_2, ..., x_s) \quad . \tag{13.31}$$

Диференціюючи (13.31) по λ, маємо:

$$\sum_{\alpha=1}^{s} \frac{\partial f}{\partial(\lambda x_{\alpha})} \cdot x_{\alpha} = n\lambda^{n-1} f \quad .$$

Полягаючи тут, що $\lambda = 1$, ми приходимо до (13.30).

На підставі теореми Ейлера (13.30) для кінетичної енергії $T^{(2)}$ маємо наступну рівність:

$$\sum_{\alpha=1}^{s} \dot{q}_{\alpha} \frac{\partial T^{(2)}}{\partial \dot{q}_{\alpha}} = 2T^{(2)} \quad , \tag{13.32}$$

якою ми надалі скористаємося.

<u>Зауваження</u>. Найважливіше значення рівнянь Лагранжа у формі (13.18) полягає в тому, що при відповідному узагальненні понять їх можна використовувати не тільки в механіці, але й в інших розділах фізики, наприклад для вивчення руху класичних <u>фізичних полів</u>, тобто систем з нескінченним числом ступенів свободи.

§ 14. <u>Функція Лагранжа і закони збереження.</u>

В § 13 ми дали формальне визначення (13.19) функції Лагранжа. Тут ми покажемо, що функція Лагранжа має глибокий фізичний зміст – вона є <u>найважливіша характеристична функція механічної системи</u>, що <u>містить у собі величезну фізичну інформацію про стан системи в довільний момент часу</u>. Щоб переконатися в цьому, досить показати, що вже по зовнішньому вигляді функції Лагранжа досить просто відшукати <u>закони збереження</u>, тобто такі найважливіші перші інтеграли рівнянь Лагранжа, які пов'язані із <u>симетріями</u> простору й часу (або зовнішнього силового поля) і накладених на систему в'язів (див. р. 2).

Розглянемо механічну систему, функція Лагранжа якої явно від часу не залежить, тобто $\partial L / \partial t = 0$; допустимо також, що на систему не діють дисипативні сили. Покажемо, що цієї інформації досить для одержання закону збереження повної енергії зазначеної системи.

Для цього записуємо повну похідну по часом від $L(q, \dot{q}, t)$:

$$\frac{dL}{dt}=\sum_{\alpha=1}^{s}\left(\frac{\partial L}{\partial q_\alpha}\dot{q}_\alpha+\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha}\ddot{q}_\alpha\right)+\frac{\partial L}{\partial t} \quad .$$

Заміняючи тут $\partial L / \partial q_\alpha$ відповідно з (13.18) на $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha}\right)$, одержуємо:

$$\frac{dL}{dt}=\sum_{\alpha=1}^{s}\left(\dot{q}_\alpha\cdot\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha}\right)+\ddot{q}_\alpha\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha}\right)+\frac{\partial L}{\partial t}=\sum_{\alpha=1}^{s}\frac{d}{dt}\left(\dot{q}_\alpha\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha}\right)+\frac{\partial L}{\partial t}$$

або

$$\frac{d}{dt}\left(\sum_{\alpha=1}^{s}\dot{q}_\alpha\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha}-L\right)=-\frac{\partial L}{\partial t} \quad . \tag{14.1}$$

З (14.1) видно, що якщо $\partial L / \partial t = 0$, то в процесі руху системи зберігається величина:

$$E\equiv\sum_{\alpha=1}^{s}\dot{q}_\alpha\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha}-L=const \quad , \tag{14.2}$$

називана <u>повною механічною енергією</u>. Умову <u>консервативності</u> системи $\partial L / \partial t = 0$ можна розглядати як вимогу інваріантності її функції Лагранжа відносно перетворень «зсуву» у часі: $t\to t+\delta t$ (див. § 9). Фізично ця вимога є наслідком виконання двох умов: 1) <u>однорідності часу</u> для замкнутих систем (або незалежності від часу зовнішніх силових полів); 2) <u>стаціонарності</u> в'язів, накладених на систему.

Нове (у порівнянню з даним в § 9) визначення (14.2) повної енергії є більш загальним (тому перший інтеграл руху (14.2) іноді називають законом збереження <u>узагальненої</u> енергії), але у всіх випадках, коли можна користуватися поняттям повної потенціальної енергії, визначення (14.2) збігається зі звичайним визначенням повної енергії як суми кінетичної й потенціальної енергій. Наприклад, для системи, на яку діють тільки потенційні сили, функція Лагранжа має вигляд (13.29), при цьому згідно (13.32):

$$\sum_{\alpha=1}^{s}\dot{q}_\alpha\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha}=\sum_{\partial=1}^{s}\dot{q}_\alpha\frac{\partial T^{(2)}}{\partial \dot{q}_\alpha}=2T^{(2)}=2T$$

і, отже, повна енергія (14.2) дорівнює: $E=2T-(T-U)=T+U$. Розглянемо ще один приклад <u>консервативної</u> системи (для який $T=T^{(2)}$) з узагальнено-потенційними силами, узагальнений потенціал $V(q,\dot{q})$ якої <u>можна представити у вигляді суми</u> $V(q,\dot{q})=V^{(1)}(q,\dot{q})+U(q)$, де $V^{(1)}(q,\dot{q})$ - <u>однорідна</u> <u>лінійна</u> функція узагальнених швидкостей $\dot{q}$, і $U(q)$ - звичайна потенціальна енергія, що залежить тільки від узагальнених координат q. У цьому випадку, згідно (13.30)

$$\sum_{\alpha=1}^{s}\dot{q}_\alpha\frac{\partial V^{(1)}}{\partial \dot{q}_\alpha}=V^{(1)} \text{ і :}$$

$$\sum_{\alpha=1}^{s}\dot{q}_\alpha\frac{\partial L}{\partial\dot{q}_\alpha}=\sum_{\alpha=1}^{s}\dot{q}_\alpha\frac{\partial(T-V)}{\partial\dot{q}_\alpha}=\sum_{\alpha=1}^{s}\dot{q}_\alpha\frac{\partial T}{\partial\dot{q}_\alpha}-\sum_{\alpha=1}^{s}\dot{q}_\alpha\frac{\partial V^{(1)}}{\partial\dot{q}_\alpha}=2T-V^{(1)}$$

і, отже, повна енергія (14.2) дорівнює:

$$E=2T-V^{(1)}-(T-V)=2T-V^{(1)}-(T-V^{(1)}-U)=T+U\ ,$$

тобто в цьому випадку з повної енергії (14.2) обов'язково випадає лінійний по узагальнених швидкостях член $V^{(1)}(q,\dot{q})$.

Розглянемо тепер питання про зв'язок виду функції Лагранжа із законами збереження імпульсу й моменту імпульсу системи (див. §§ 10-11). При цьому варто врахувати, що використовуючи «мову» узагальнених координат потрібно вживати поняття узагальнених імпульсів, тобто деяких узагальнень звичайних понять імпульсу й моменту імпульсу. Тому дамо спочатку відповідне визначення.

Узагальненими імпульсами p_α механічної системи називають скалярні величини, які визначаються формулою:

$$p_\alpha=\frac{\partial L}{\partial\dot{q}_\alpha}\ ,\ \ \alpha=1,2,...,s\ , \qquad (14.3)$$

Якщо узагальнена координата q_α має розмірність довжини, то відповідний їй узагальнений імпульс p_α має розмірність звичайного імпульсу (наприклад, узагальнені імпульси вільної системи збігаються із проекціями звичайних імпульсів); якщо q_α - безрозмірна кутова змінна, то p_α має розмірність моменту імпульсу.

Природно, що структура узагальнених імпульсів невільної системи виявляється більш складною в порівнянні з виразами для імпульсу й моменту імпульсу (див. § 3) вільної системи. Наприклад, для системи, описуваною функцією Лагранжа (13.29), p_α мають вигляд:

$$p_\alpha=\sum_{\beta=1}^{s}f_{\alpha\beta}\dot{q}_\beta\ ,\ \ \alpha=1,2,\ldots,s\ . \qquad (14.4)$$

Використовуючи поняття узагальненого імпульсу (14.3), рівняння Лагранжа (13.18) можна переписати у вигляді:

$$\dot{p}_\alpha=\frac{\partial L}{\partial q_\alpha}\ ,\ \ \alpha=1,2,\ldots,s\ . \qquad (14.5)$$

Нерідко трапляється так, що деякі з q_α у L явно не входять (а входять лише їхні похідні по часом $\dot{q}_\alpha$); такі q_α називаються циклічними координатами й для них $\frac{\partial L}{\partial q_\alpha}=0$. Тоді з (14.5) одержуємо наступний закон збереження: якщо узагальнена координата q_α є циклічної, то зберігається відповідний їй узагальнений імпульс p_α, тобто

$$p_\alpha = const\,, \text{ якщо } \frac{\partial L}{\partial q_\alpha} = 0\ . \qquad (14.6)$$

Помітимо, що циклічність деякої координати q_α (тобто вимога $\frac{\partial L}{\partial q_\alpha} = 0$) фізично є умовою інваріантності функції Лагранжа L системи відносно перетворення або повороту системи як єдиного цілого, тобто перетворення вигляду:

$$q_\alpha \to q_\alpha + \delta q_\alpha\ ,\ q_\beta \to q_\beta\ (\beta \neq \alpha)\ . \qquad (14.7)$$

Дійсно, якщо L інваріантною відносно перетворень (14.7), то її збільшення $\delta L = \frac{\partial L}{\partial q_\alpha}\delta q_\alpha$, обумовлене цими перетвореннями, повинне обертатися в нуль, тобто $\delta L = 0$, що еквівалентно вимозі $\frac{\partial L}{\partial q_\alpha} = 0$.

У свою чергу, інваріантність L відносно перетворень (14.7) є наслідком виконання наступних двох фізичних умов: 1) однорідності або ізотропності простору (або наявності відповідної симетрії зовнішніх силових полів) – див. §§ 10-11; 2) наявністю відповідної симетрії накладених на систему в'язів.

Звідси випливає методична рекомендація:

хоча набори узагальнених координат, пов'язаних між собою точковими перетвореннями (13.14), теоретично рівноправні, однак для спрощення рішень конкретних задач механіки методом Лагранжа узагальнені координати системи варто вибирати з урахуванням симетрії задачі; тільки в цьому випадку окремі q_α можуть виявитися циклічними, а відповідні їм p_α - постійними (а значення цих найважливіших інтегралів руху, як указувалося в § 8, значно спрощує інтегрування диференціальних рівнянь руху Лагранжа).

Т. ч., функція Лагранжа дійсно є найважливішою функцією стану механічної системи: знання явного вигляду $L(q,\dot{q},t)$ дозволяє не тільки скласти рівняння руху для систем з потенційними й узагальнено-потенційними активними силами, але й одержати закони збереження для таких систем.

§ 15. Основна задача варіаційного числення. Рівняння Ейлера.

З метою подальшого розвитку методу Лагранжа в цьому параграфі ми попередньо познайомимося з деякими елементами варіаційного числення – спеціального розділу математики, що займається дослідженням екстремальних властивостей криволінійних інтегралів, що залежать від вибору однієї або декількох функцій (такі криволінійні інтеграли називають функціоналами).

Найпростішим функціоналом є криволінійний інтеграл:

$$I = \int_{x_1}^{x_2} F[x, y(x), y'(x)]dx \quad , \qquad (15.1)$$

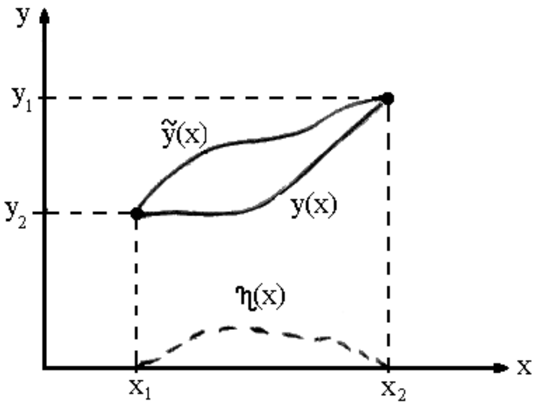
залежний від вибору однієї функції $y(x)$. Тут $y' \equiv \frac{dy}{dx}$.

<u>Основна задача варіаційного числення</u> (у застосуванні до (15.1)) складається в знаходженні такої функції $y(x)$, що: 1) забезпечує екстремум функціоналові (15.1) і 2) задовольняє граничним умовам:

$$y(x_1) = y_1 \quad , \quad y(x_2) = y_2 \quad , \qquad (15.2)$$

де y_1, y_2 – наперед <u>задані</u> величини.

Найпростіший шлях розв'язок поставленої задачі полягає в наступному. Допустимо, що задача вирішена і функція $y(x)$ є шукане розв'язок варіаційної задачі. <u>Знайдемо необхідні умови, яким повинна задовольняти ця функція, щоб функціонал I мав екстремум</u>. Із цією метою побудуємо нову функцію $\tilde{y}(x)$, близьку до $y(x)$ (див. мал.)



$$\tilde{y}(x) = y(x) + \alpha\eta(x) \ , \qquad (15.3)$$

де $\eta(x)$ - <u>довільна</u> функція, що задовольняє таким граничним умовам щоб $\tilde{y}(x)$ підкорялася тим же умовам (15.2), що й $y(x)$, тобто:

$$\eta(x_1) = \eta(x_2) = 0 \quad , \qquad (15.4)$$

і α - <u>малий</u> чисельний параметр.

Підстановка (15.3) в (15.1) приводить до деякої допоміжної функції параметра α :

$$\tilde{I}(\alpha) = \int_{x_1}^{x_2} \tilde{F}\left[x; \underbrace{y(x) + \alpha\eta(x)}_{\tilde{y}(x)}; \underbrace{y'(x) + \alpha\eta'(x)}_{\tilde{y}'(x)}\right]dx \quad . \qquad (15.5)$$

Тим самим задача знаходження екстремуму функціонала (15.1) звелася до дослідження на екстремум функції однієї змінної $\widetilde{I}(\alpha)$. А для цього, як відомо, необхідно знайти значення похідної $d\widetilde{I}/d\alpha$ при $\alpha = 0$ й прирівняти його нулю (при цьому екстремум функціоналові (15.1) забезпечує по нашому припущенню функція $y(x)$, що виходить із функції $\widetilde{y}(x)$ (15.3) при $\alpha = 0$).

Обчислимо спочатку похідну $d\widetilde{I}/d\alpha$ від (15.5), використовуючи відоме правило диференціювання інтеграла по параметру:

$$\frac{d\widetilde{I}}{d\alpha} = \int_{x_1}^{x_2} \frac{d}{d\alpha}\widetilde{F}\left[x; \widetilde{y}(x); \widetilde{y}'(x)\right]dx = \int_{x_1}^{x_2}\left[\frac{\partial \widetilde{F}}{\partial \widetilde{y}}\eta(x) + \frac{\partial \widetilde{F}}{\partial \widetilde{y}'}\eta'(x)\right]dx \quad . \qquad (15.6)$$

Інтегруючи другий інтеграл у правій частині (15.6) по частинам з урахуванням граничних умов (15.4) одержуємо:

$$\int_{x_1}^{x_2}\frac{\partial \widetilde{F}}{\partial \widetilde{y}'}\eta'(x)dx = \frac{\partial \widetilde{F}}{\partial \widetilde{y}'}\eta(x)\Bigg|_{x_1}^{x_2} - \int_{x_1}^{x_2}\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial \widetilde{F}}{\partial \widetilde{y}'}\right)\eta(x)dx =$$

$$= \left(\frac{\partial \widetilde{F}}{\partial \widetilde{y}'}\right)_{x=x_2}\cdot\eta(x_2) - \left(\frac{\partial \widetilde{F}}{\partial \widetilde{y}'}\right)_{x=x_1}\cdot\eta(x_1) - \int_{x_1}^{x_2}\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial \widetilde{F}}{\partial \widetilde{y}'}\right)\eta(x)dx = -\int_{x_1}^{x_2}\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial \widetilde{F}}{\partial \widetilde{y}'}\right)\eta(x)dx \ . \qquad (15.7)$$

З врахуванням (15.7) перепишемо (15.6) у вигляді:

$$\frac{d\widetilde{I}}{d\alpha} = \int_{x_1}^{x_2}\left[\frac{\partial \widetilde{F}}{\partial \widetilde{y}} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right)\right]\eta(x)dx \quad ,$$

звідки умова екстремуму $I(\alpha)$, а, отже, і функціонала I запишеться у вигляді:

$$\left(\frac{d\widetilde{I}}{dx}\right)_{\alpha=0} = \int_{x_1}^{x_2}\left[\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right)\right]\eta(x)dx = 0 \quad , \qquad (15.8)$$

де ми врахували, що $\left(\frac{\partial \widetilde{F}}{\partial \widetilde{y}}\right)_{\alpha=0} = \frac{\partial F}{\partial y}$ й $\left(\frac{\partial \widetilde{F}}{\partial \widetilde{y}'}\right)_{\alpha=0} = \frac{\partial F}{\partial y'}$.

Так як $\eta(x)$ - довільна функція, то ми дійдемо висновку, що рівність (15.8) має місце тільки в тому випадку, якщо коефіцієнт, що міститься перед $\eta(x)$ у підінтегральному виразі, тотожно звертається в нуль, тобто:

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right) - \frac{\partial F}{\partial y} = 0 \quad . \qquad (15.9)$$

Рівність (15.9) називається <u>рівнянням Ейлера</u>. Так як функція $F(x, y, y')$ містить першу похідну $y' = \frac{dy}{dx}$, то ліва частина (15.9) буде містити другу похідну $y'' = \frac{d^2y}{dx^2}$, тому рівняння Ейлера є <u>звичайним диференціальним рівнянням другого порядку</u> відносно шуканої функції $y(x)$, і, отже, загальне розв'язок рівняння (15.9) містить <u>дві довільні сталі</u>, які <u>визначаються граничними умовами (15.2)</u>. Т. ч., ми довели, що функція $y(x)$, що реалізує екстремум (15.1), повинна задовольняти рівнянню Ейлера (15.9).

Узагальнимо отримані результати для функціонала

$$I = \int_{x_1}^{x_2} F\left[x; y_1(x), y_2(x), ..., y_s(x); y_1'(x), y_2'(x), ..., y_s'(x)\right] dx \quad , \qquad (15.10)$$

залежного від *S* <u>незалежних</u> функцій $y_i(x)$ й їхніх похідних $y_i'(x) \equiv \frac{dy_i}{dx}$. <u>Основна варіаційна задача</u> в застосуванні до (15.10) складається в знаходженні такого набору функцій $y_1(x), y_2(x), ..., y_s(x)$, які: 1) реалізують екстремум функціонала (15.10) і 2) задовольняють граничним умовам:

$$y_i(x_1) = y_{i_1} \quad , \quad y_i(x_2) = y_{i_2} \quad , \quad i = 1,2,...,s \quad , \qquad (15.11)$$

де y_{i_1}, y_{i_2} - <u>задані</u> величини.

У повній аналогії з попереднім, будуємо нові функції $\tilde{y}_i(x)$, <u>близькі</u> до $y_i(x)$:

$$\tilde{y}_i(x) = y_i(x) + \alpha_i \eta_i(x) \quad , \quad i = 1,2,...,s \quad , \qquad (15.12)$$

де $\eta_i(x)$ - <u>довільні</u> функції, що задовольняють граничним умовам:

$$\eta_i(x_1) = \eta_i(x_2) = 0 \quad , \quad i = 1,2,...,s \quad , \qquad (15.13)$$

і α_i - <u>малі</u> чисельні параметри. Зводимо задачу до відшукання екстремуму функції:

$$\tilde{I}(\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_s) = \int_{x_1}^{x_2} \tilde{F}\left[x; \tilde{y}_1(x), ..., \tilde{y}_s(x); \tilde{y}_1'(x), ..., \tilde{y}_s'(x)\right] dx =$$

$$= \int_{x_1}^{x_2} \tilde{F}\left[x; y_1 + \alpha_1 \eta_1, ..., y_s + \alpha_s \eta_s; \quad y_1' + \alpha_1 \eta_1', ..., y_s' + \alpha_s \eta_s'\right] dx \quad . \qquad (15.14)$$

Умову екстремуму функції (15.14) можна записати у вигляді:

$$\left(\frac{\partial \tilde{I}}{\partial \alpha_i}\right)_{\alpha=0} = 0 \ , \ i = 1,2,...,s \quad , \qquad (15.15)$$

де ми позначимо $\alpha \equiv \{\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_s\}$. Множачи кожне ***i***-ту рівність (15.15) на α_i й складаючи отримані результати почленно, одержуємо наступний еквівалентний запис умови екстремуму у вигляді одного рівняння:

$$\sum_{i=1}^{s} \alpha_i \left(\frac{\partial \tilde{I}}{\partial \alpha_i}\right)_{\alpha=0} = 0 \quad . \qquad (15.16)$$

Підставляючи сюди (15.14) і використовуючи правило диференціювання інтеграла по параметру, перепишемо (15.16) у такий спосіб:

$$\sum_{i=1}^{s} \alpha_i \left(\frac{\partial \tilde{I}}{\partial \alpha_i}\right)_{\alpha=0} = \int_{x_1}^{x_2} \sum_{i=1}^{s} \alpha_i \left(\frac{\partial \tilde{F}}{\partial \alpha_i}\right)_{\alpha=0} dx = 0 \qquad (15.17)$$

Для підінтегральної функції в лівій частині (15.17) маємо:

$$\sum_{i=1}^{s} \alpha_i \left(\frac{\partial \tilde{F}}{\partial \alpha_i}\right)_{\alpha=0} = \sum_{i=1}^{s} \alpha_i \left[\left(\frac{\partial \tilde{F}}{\partial \tilde{y}_i}\right)_{\alpha=0} \eta_i(x) + \left(\frac{\partial \tilde{F}}{\partial \tilde{y}'_i}\right)_{\alpha=0} \eta'_i(x) \right] =$$

$$= \sum_{i=1}^{s} \alpha_i \left(\frac{\partial F}{\partial y_i} \eta_i + \frac{\partial F}{\partial y'_i} \eta'_i \right) \quad . \qquad (15.18)$$

Підставляючи (15.18) в (15.17) і інтегруючи другий інтеграл по частинам з урахуванням граничних умов (15.13), одержуємо:

$$\sum_{i=1}^{s} \alpha_i \left(\frac{\partial \tilde{I}}{\partial \alpha_i}\right)_{\alpha=0} = \int_{x_1}^{x_2} \sum_{i=1}^{s} \alpha_i \left(\frac{\partial F}{\partial y_i} \eta_i + \frac{\partial F}{\partial y'_i} \eta'_i \right) dx =$$

$$= \sum_{i=1}^{s} \alpha_i \int_{x_1}^{x_2} \left[\frac{\partial F}{\partial y_i} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y'_i}\right) \right] \eta_i(x) dx = 0 \quad . \qquad (15.19)$$

В силу дозвілля свободи функцій $\eta_i(x)$ з (15.19) випливає висновок: функції $y_i(x)$, що реалізують екстремум функціонала (15.10), повинні задовольняти системі рівнянь Ейлера:

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y'_i}\right) - \frac{\partial F}{\partial y_i} = 0 \ , \ i = 1,2,\ldots,s \ . \qquad (15.20)$$

Отримані результати можна сформулювати в трохи іншому (еквівалентному) вигляді, якщо скористатися поняттям варіації функції й варіації функціонала. У повній відповідності з визначенням варіації функції в § 12, ми <u>визначаємо</u> варіації δy_i функцій $y_i(x)$ згідно (15.12) у такий спосіб:

$$\delta y_i = \tilde{y}_i(x) - y_i(x) = \alpha_i \eta_i(x) \ . \tag{15.21}$$

Варіювання будь-якої функції $y_i(x)$ спричиняє варіювання і її похідної $y_i'(x)$; варіацію $\delta y_i' \equiv \delta\left(\frac{dy_i}{dx}\right)$ ми згідно (15.14) <u>визначаємо</u> формулою:

$$\delta y_i' = \tilde{y}_i'(x) - y_i'(x) = \alpha_i \eta_i'(x) \tag{15.22}$$

З визначень (15.21) і (15.22) випливає важливе правило обчислення варіацій: <u>операції варіювання й диференціювання можна переміщувати</u>, тобто:

$$\delta\left(\frac{dy_i}{dx}\right) = \frac{d}{dx}(\delta y_i) \ . \tag{15.23}$$

Дійсно, диференціюючи по x рівність (15.21)

$$\frac{d}{dx}(\delta y_i) = \tilde{y}_i'(x) - y_i'(x) = \alpha_i \eta_i'(x) \ ,$$

і порівнюючи цей результат з (15.22), одержуємо (15.23).

У результаті варіювання функцій $y_i(x)$ й їхніх похідних $y_i'(x)$ одержує приріст і будь-яка функція виду $F(x; y_1, y_2, ..., y_s; y_1', ..., y_s')$; варіацією δF функції F називається <u>лінійна</u> по δy_i й $\delta y_i'$ <u>частина</u> приросту $(\tilde{F} - F)$ цієї функції, тобто:

$$\delta F = \sum_{i=1}^{s}\left(\frac{\partial F}{\partial y_i}\delta y_i + \frac{\partial F}{\partial y_i'}\delta y_i'\right) \ . \tag{15.24}$$

(Для одержання (15.24) потрібно розкласти $\tilde{F}$ в ряд по δy_i й $\delta y_i'$ й обмежитися для $(\tilde{F} - F)$ першим не зникаючим доданком).

Нагадаємо, що відповідно до (15.14), $\tilde{F} \equiv \tilde{F}(x; \tilde{y}_1, \tilde{y}_2, ..., \tilde{y}_s; \tilde{y}_1', ..., \tilde{y}_s') =$ $\tilde{F}(x; y_1 + \delta y_1, y_s + \delta y_s; y_1' + \delta y_1', ..., y_s' + \delta y_s')$. Праві частини рівностей (15.24) і (15.18) рівні (з врахуванням (15.21) і (15.22)), тому формула:

$$\delta F = \sum_{i=1}^{s}\alpha_i\left(\frac{\partial \tilde{F}}{\partial \alpha_i}\right)_{\alpha=0} \tag{15.25}$$

дає <u>еквівалентне</u> (15.24) визначення варіації функції F.

За аналогією з (15.25), <u>першою варіацією функціонала</u> (15.10) або просто <u>варіацією функціонала</u> (15.10) називають величину δI, обумовлену виразенням:

$$\delta I = \sum_{i=1}^{s}\alpha_i\left(\frac{\partial \tilde{I}}{\partial \alpha_i}\right)_{\alpha=0} \tag{15.26}$$

Визначення (15.26) дозволяє переписати результат (15.19) у вигляді:

$$\delta I = \sum_{i=1}^{s} \int_{x_1}^{x_2} \left[\frac{\partial F}{\partial y_i} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y_i'} \right) \right] \delta y_i \, dx = 0 . \tag{15.27}$$

Тим самим ми одержали інше формулювання результату розв'язку основної варіаційної задачі: функції $y_i(x)$, $i = 1,2,...,s$, що реалізують екстремум функціонала (15.10), повинні перетворювати в нуль варіацію функціонала δI. Це твердження, як видно з (15.27), рівносильні вимозі (15.20); дійсно, так як функції $y_i(x)$ незалежні, то δy_i також незалежні й, отже, довільні, тому рівність $\delta I = 0$ має місце тільки при виконанні рівнянь Ейлера (15.20).

Визначення (15.25) і (15.26) дозволяють «витягти» з (15.17) важливе правило: операції варіювання й інтегрування можна міняти місцями, тобто:

$$\delta \int_{x_1}^{x_2} F dx = \int_{x_1}^{x_2} \delta F dx \; . \tag{15.28}$$

Зауваження. За аналогією з визначенням δF (15.24) можна дати інше (еквівалентне (15.26)) визначення першої варіації функціонала: варіацією δI функціонала (15.10) називається лінійна (головна) частина приросту:

$$\tilde{I} - I = \int_{x_1}^{x_2} \tilde{F}(x; y_1 + \delta y_1, ..., y_s + \delta y_s ; y_1' + \delta y_1', ..., y_s' + \delta y_s') dx -$$

$$- \int_{x_1}^{x_2} F(x; y_1, ..., y_s ; y_1', ..., y_s') dx = = \int_{x_1}^{x_2} (\tilde{F} - F) dx \quad , \tag{15.29}$$

яке одержує функціонал I внаслідок варіації функцій $y_i(x)$ й їхніх похідних $y_i'(x)$ у підінтегральному виразі (відзначимо тут, що у фізичній літературі іноді варіацією δI називають саме приріст (15.29), тобто величину $\tilde{I} - I$, що математично некоректно). Для одержання явного виразу для δI розкладемо функцію $\tilde{F}$ в (15.29) у ряд по ступенях δy_i й $\delta y_i'$ й обмежимося в цьому розкладанні тільки членами першого порядку малості (тим самим ми і одержуємо лінійну частину різниці $\tilde{I} - I$):

$$\delta I = \int_{x_1}^{x_2} \left[F + \sum_{i=1}^{s} \left(\frac{\partial \tilde{F}}{\partial \tilde{y}_i} \right)_{\delta y = 0} \cdot \delta y_i + \sum_{i=1}^{s} \left(\frac{\partial \tilde{F}}{\partial \tilde{y}_i'} \right)_{\delta y' = 0} \cdot \delta y' - F \right] dx =$$

$$= \int_{x_1}^{x_2} \sum_{i=1}^{s} \left(\frac{\partial F}{\partial y_i} \delta y_i + \frac{\partial F}{\partial y_i'} \delta y_i' \right) dx \quad . \tag{15.30}$$

З огляду на визначення δF (15.24) і (15.25), дійдемо висновку, що визначення варіації функціонала (15.30) еквівалентно визначенню (15.26). Помітимо, що визначення (15.30) з врахуванням (15.24) фактично збігається із властивістю операції варіювання (15.28).

§ 16. Принципи найменшої дії Гамільтона-Остроградського.

Математичні методи, розвинені в § 15, дозволяють одержати нове формулювання класичної механіки, коли в якості основної її аксіоми приймається деякий інтегральний варіаційний принцип – принцип найменшої дії. Цей принцип пов'язаний з вивченням екстремальних властивостей деякої інтегральної характеристики руху механічної системи, що є в математичному плані функціоналом типу (15.10).

На справедливість зробленого твердження нас наштовхують наступні формальні міркування. Якщо в рівняннях Ейлера (15.20) зробити формальні заміни: $x \to t$, $y_i(x) \to q_i(t)$, $y_i'(x) \to \dot{q}_i(t)$ і $F \to L$, то рівняння (15.20) збіжаться з рівняннями Лагранжа у формі (13.18). Це означає, що рівняння Лагранжа (13.18), які є диференціальними рівняннями руху голономних механічних систем з ідеальними в'язями й потенційними (або узагальнено-потенційними) активними силами, можна розглядати як рівняння Ейлера стосовно основного варіаційної задачі для деякого функціонала S типу (15.10), що має з врахуванням зазначених формальних замін вигляд:

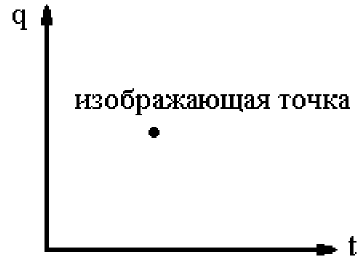
$$S = \int_{t_1}^{t_2} L\left[q_1(t), q_2(t), ..., q_s(t); \dot{q}_1(t), \dot{q}_2(t), ..., \dot{q}_s(t); t\right] dt \quad . \qquad (16.1)$$

Т. ч., результати § 15 дозволяють стверджувати: рівняння Лагранжа (13, 18) рівносильні вимозі обернення до нуля варіації δS функціонала (16, 1):

$$\delta S = 0 \quad . \qquad (16.2)$$

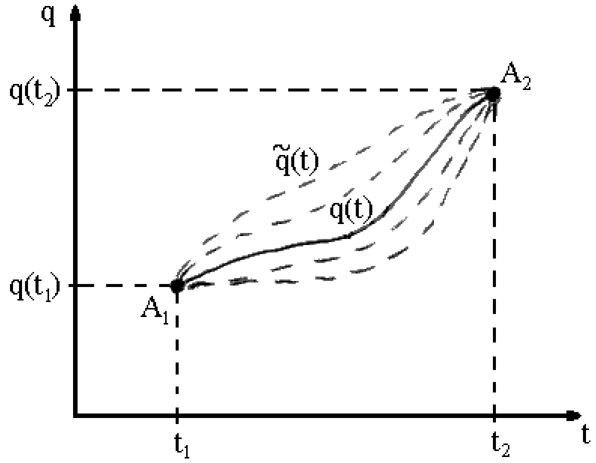
Для того, щоб розкрити фізичний зміст варіаційного рівняння (16,2), тобто звести його в статус фізичного принципу, необхідно осмислити фізичну постановку задачі, що приводить до необхідності й достатності вимоги (16,2), а також додати фізичний зміст функціоналові S. Із цією метою зручно скористатися поняттям розширеного конфігураційного простору механічної системи, яким називається абстрактний простір узагальнених координат $q_1, q_2, \ldots, q_s$ і часу t розмірності $S+1$, де S - число ступенів свободи системи (просто конфігураційним простором називається простір S вимірів $q_1(t), q_2(t), \ldots, q_s(t)$ – див. напр., Голдстейна).

Так як кожен набір координат $q(t)$ задає просторове положення системи в момент часу t (тобто конфігурацію системи), то кожній точці розглянутого конфігураційного простору з координатами (q,t) однозначно відповідає певна конфігурація системи в момент t. Для наочності вмовимося використовувати наступне геометричне зображення розглянутого конфігураційного простору на площині: по осі абсцис будемо відкладати час t, а по осі ординат – сукупність значень всіх узагальнених координат $q = \{q_1, q_2, ..., q_s\}$; тоді маємо відповідність: точки на площині (q,t) відповідає певна конфігурація системи в момент t.



Тепер поставимо наступну фізичну задачу.

Нехай за невеликий (але кінцевий) проміжок часу $t_2 - t_1$ зв'язана система переходить у результаті свого руху з деякої заданої конфігурації A_1 в нову задану конфігурацію A_2 (див. мал. (16.1)).



Накладені на систему в'язі допускають безліч різних кінематично можливих рухів за той самий час $t_2 - t_1$ системи (див. тему (5) § 12, особливо мал. (12.3)), які на мал. (16.1) зображені пунктирними конфігураційними траєкторіями $\tilde{q}(t) = q''(t) + \delta q(t)$; при цьому один із цих рухів є дійсним (суцільна траєкторія $q(t)$ на мал. (16,1)). Виникає задача: як із всіх кінематично можливих за той самий час $t_2 - t_1$ рухів виділити дійсний рух системи, тобто, інакше кажучи, як знайти закон руху $q_1(t), q_2(t), \ldots, q_s(t)$ механічної системи, якщо $q(t_1)$ й $q(t_2)$ задані $2S$ граничними умовами:

$$\left.\begin{aligned} q_\alpha(t_1) &= q_{\alpha 1} \\ q_\alpha(t_2) &= q_{\alpha 2} \end{aligned}\right\}, \ \alpha = 1, 2, ..., S \ \to \delta\, q(t_1) = \delta\, q(t_2) = 0 \qquad (16.3)$$

Вимога (16.2) і є достатньою умовою розв’язку поставленої фізичної задачі, тобто з (16.2) автоматично випливає закон руху системи.

Дійсно, для досліджуваної системи, як ми показали на початку цього параграфа, з (16.2) автоматично з необхідністю випливають (як рівняння Ейлера) рівняння Лагранжа (13.18), розв’язок яких і дають закон руху $q(t)$ системи.

Покажемо тепер необхідність вимоги (16.2) для дійсного руху голономної системи з ідеальними в'язями й узагальнено-потенційними активними силами, тобто доведемо, що з рівнянь Лагранжа (13.18) з необхідністю випливає умова (16.2). Для цього кожне з рівнянь (13.18):

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha}-\frac{\partial L}{\partial q_\alpha}=0 \ , \ \alpha=1,2,...,s \ ,$$

з номером α помножимо на δq_α й складемо отримані результати, що приводить до рівняння:

$$\sum_{\alpha=1}^{s}\left(\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha}-\frac{\partial L}{\partial q_\alpha}\right)\delta q_\alpha=0 \quad . \tag{16.4}$$

За допомогою очевидної тотожності:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha}\delta q_\alpha\right)=\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha}\right)\delta q_\alpha+\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha}\frac{d}{dt}\left(\delta q_\alpha\right)=\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha}\right)\delta q_\alpha+\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha}\delta \dot{q}_\alpha$$

перепишемо (16.4) у вигляді:

$$\underbrace{\sum_{\alpha=1}^{S}\left(\frac{\partial L}{\partial q_\alpha}\delta q_\alpha+\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha}\delta \dot{q}_\alpha\right)}_{\uparrow(8.24)\ \delta L}-\frac{d}{dt}\sum_{\alpha=1}^{s}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha}\delta q_\alpha=0$$

або з урахуванням визначення варіації функції δL (див. § 15) і $\underbrace{\partial L/\partial \dot{q}_\alpha}_{\uparrow(7.5)}=p_\alpha$, у вигляді:

$$\delta L-\frac{d}{dt}\left(\sum_{\alpha=1}^{S}p_\alpha\delta q_\alpha\right)=0 \quad . \tag{16.4'}$$

Множачи (16.4’) на dt й інтегруючи в межах від t_1 до t_2, одержуємо:

$$\int_{t_1}^{t_2}\delta L dt-\sum_{\alpha=1}^{S}p_\alpha\delta q_\alpha\Big|_{t_1}^{t_2}=0 \ ,$$

звідки, з огляду на те, що згідно (16.3) $\delta q_\alpha(t_1)=\delta q_\alpha(t_2)=0$, і беручи до уваги можливість переміщення операцій інтегрування й варіювання (15.28), ми й приходимо до необхідності умови (16.2).

Викладене приводить нас до висновку, що функціонал S, визначений формулою (16.1), є найважливішою скалярною характеристикою руху механічної системи, що називається функцією дії або просто дією по Гамільтону. Дія S, що має розмірність добутку енергії на час ($[L]=[E]\to[S]=[E]\cdot[t]$), має наступні загальні властивості: 1) S є функціонал, областю визначення якого є клас кінематично можливих рухів системи за той самий час; 2) S приймає екстремальне (мінімальне при досить малому часі розгляду руху) значення для дійсного (фактично відбувається) руху системи.

Тепер ми можемо сформулювати один з найважливіших варіаційних принципів класичної механіки – принцип найменшої дії (ПНД) Гамільтона-Остроградського (перша половина XIX ст.): серед всіх кінематично можливих рухів механічної системи з однієї конфігурації в іншу (близьку до першого), що відбуваються за той самий проміжок часу, дійсним є той рух, для якого дія по Гамільтону S буде найменшою; математичне вираження ПНД має вигляд $\delta S = 0$ (16.2), де δ - символ неповної (ізохронної) варіації (тобто на відміну від повної варіації в ній час не варіюється).

Хоча вище ми привели доказ справедливості ПНД у формі Гамільтона-Остроградського тільки для голономних механічних систем з ідеальними в'язями й потенційними (або узагальнено-потенційними) активними силами, однак його можна узагальнити й на голономні системи з неконсервативними активними силами й навіть поширити на неголономні механічні системи (див. Ольховський, Жирнов, Голдстейн).

Це фактично означає, що крім індуктивного методу побудови класичної механіки (коли за основу побудови приймаються диференціальні рівняння Ньютона) існує й дедуктивний метод, коли в якості основної і єдиної аксіоми приймається ПНД Гамільтона-Остроградського, при цьому рівняння руху (13.13) виступають як рівняння Ейлера деякого варіаційної задачі.

Зауваження 1. Крім ПНД у формі Гамільтона-Остроградського відомий також ПНД у формі Мопертюі - Лагранжа, у якому використовується дія по Лагранжу й поняття повної варіації (коли варіюються не тільки $q(t)$ й $\dot{q}(t)$, але й час руху системи з однієї конфігурації в іншу). Цей принцип є менш загальним, тому що застосовується тільки для консервативних і при тім голономних систем (див. Ольховський, Голдстейн).

Зауваження 2. Перевага варіаційної концепції класичної механіки (у порівнянні з індуктивним способом її побудови) полягає насамперед у наступному. По-перше, ПНД (16.2) інваріантний відносно будь-якого точкового перетворення узагальнених координат (13.14), у тому числі й відносно точкового перетворення, пов'язаного з переходом від інерціальної системи відліку до будь-який неінерціальних систем відліку, тобто варіаційна концепція не залежить від вибору системи відліку. По-друге, ПНД (16.2) неважко поширити на системи, що мають нескінченно велику кількість ступенів свободи, тобто на системи, що не є механічними (наприклад, на електромагнітні поля й поля елементарних часток); інакше кажучи, у всіх відомих ФКС при побудові фізичних теорій можна сформулювати варіаційні принципи, аналогічні принципу (16.2) і що дозволяють одержувати відповідні їм «рівняння руху» (наприклад, рівняння Максвелла в класичній електродинаміці, рівняння Шредингера у квантовій механіці й т.д.). Можливість формулювання ПНД у різних галузях фізики свідчить про єдність фізичної реальності й спільності форм прояву різних фізичних процесів.

Зауваження 3. Із ПДН (16.2) випливає важливий наслідок: функція Лагранжа механічної системи визначена лише з точністю до повної похідної по часом від довільної функції узагальнених координат (але не швидкостей!) і часу, тобто (16.2) і, отже, рівняння Лагранжа (13.18) інваріанти відносно перетворення:

$$L^*(q,\dot{q},t) = L(q,\dot{q},t) + \frac{d}{dt} f(q,t) \quad . \tag{16.5}$$

Дійсно, дії S^* й S, обумовлені функціями Лагранжа L^* й L по формулі (16.1), пов’язані співвідношенням:

$$S^* = \int L^* dt = \int L dt + \int_{t_1}^{t_2} \frac{df}{dt} dt = S + f(q(t_2), t_2) - f(q(t_1), t_1) = S + const \quad ,$$

звідки видно, що умова $\delta S = 0$ збігається з умовою $\delta S^* = 0$, що й було потрібно довести. Правилом (16.5) часто користуються для вибору найпростішої і зручної L.

Зауваження 4. Так як для рівнянь руху суттєва не сама варіація δS, а тільки факт її рівності нулю, $\delta S = 0$, то множення L на довільну константу також не змінить рівнянь руху. Тому, здавалося б, що можна вважати, що L визначається також і з точністю до мультиплікативної постійної. Цьому, однак, перешкоджає одне фізичне міркування, яке можна назвати умовою асимптотичної адитивності: якщо деяка механічна система (I+II) розділяється на дві підсистеми I й II так, що мінімум відстані між матеріальними точками різних підсистем $r_{I,II} \to \infty$, то фізично очевидно, що:

$$L_{I+II} \underset{r_{I,II} \to \infty}{\to} L_I + L_{II} \quad . \tag{16.6}$$

Тому при множенні L_I й L_{II} на різні (довільні) множники рівність (16.6) зруйнувалася б, що неприпустимо. Т. ч., залишається тільки можливість множити одночасно всі функції L на ту саму константу – але така операція власне кажучи зводиться до зміни системи одиниць. Тому вільність множення L на довільну константу зникає.

Зауваження 5. Ядро S, тобто $L(q, \dot{q}, t)$ містить тільки від узагальнених швидкостей $\dot{q}$ (а не $\ddot{q}, \dddot{q}, \ldots$), внаслідок чого рівняння руху (Лагранжа-Ейлера) є рівняння $2^{го}$ порядки, тобто їхнього розв'язок (часткові) однозначно визначаються завданням стану системи $q(t_0)$ й $\dot{q}(t_0)$ у момент t_0.

Насправді аргументація розвивається в протилежному напрямку: ми тому й допустимо в L тільки $\dot{q}$ (але не $\ddot{q}, \dddot{q}, \ldots$) щоб стан системи визначався q й $\dot{q}$. Можна розвивати теорії з вищими похідними , для яких у L входять й $\ddot{q}$, і $\dddot{q}$ й т.д. (Розгляд цих теорій корисний в деяких спеціальних розділах фізики (наприклад, у деяких напрямках розвитку теорії фізичних полів).

Зауваження 6. Якщо характерні для фізичної задачі величини розмірності дії порівняні по величині із квантом дії $\hbar \approx 1{,}05 \cdot 10^{-34}$ *Дж·сек* (постійної Планка), то розгляд руху фізичної системи варто вести на основі більш загальної механіки – квантової механіки (див. частина IV).

§ 17. Канонічні рівняння руху.

Усі раніше розглянуті типи рівнянь руху (рівняння Ньютона для вільних механічних систем і рівняння Лагранжа для невільних голономних систем з ідеальними в'язями) є диференціальними рівняннями другого порядку (число таких рівнянь у найкращому разі дорівнює числу ступенів свободи системи S). З математики відомо, що будь-яку систему S диференціальних рівнянь другого порядку можна замінити системою 2S рівнянь першого порядку. Цей математичний результат використав Гамільтон з метою запису рівнянь руху механічної системи у формі диференціальних рівнянь першого порядку (їх називають канонічними рівняннями руху). Отриманий Гамільтоном результат (очевидний з математичної точки зору) виявився новим нетривіальним фізичним методом опису руху механічної системи, що істотно відрізняється від методу Лагранжа (тому канонічні рівняння руху часто називають рівняннями Гамільтона).

Приступаючи до викладу методу Гамільтона, попередньо нагадаємо, що хоча й функція Лагранжа $L(q,\dot{q},t)$, і рівняння Лагранжа явно містять як узагальнені координати q_α, так й узагальнені швидкості $\dot{q}_\alpha$, однак незалежними змінними вважаються тільки узагальнені координати q_α й час t (змінні $\dot{q}_\alpha$ вважаються залежними). Ця обставина в методі Лагранжа відбита в істотному використанні конфігураційного простору, завдання будь-якої точки якого, дає тільки знання S координат q_α; швидкості ж $\dot{q}_\alpha$ при цьому залишаються невизначеними (інакше кажучи, завдання точки конфігураційного простору дає тільки S початкових умов типу $q_\alpha(0) = q_{\alpha 0}$, і отже, для повного визначення руху системи потрібно задати додатково ще S початкових умов типу $\dot{q}_\alpha(0) = q_{\alpha 0}$). Це означає, що через будь-яку точку конфігураційного простору проходить незлічення безліч траєкторій системи. Так як стан (з в'язями) системи в будь-який момент часу визначається завданням 2S змінних q_α й $\dot{q}_\alpha$ ($\alpha = 1,2,\ldots,s$), то природно було б вважати незалежними змінними не тільки узагальнені координати, але й узагальнені швидкості (або узагальнені імпульси). Саме так і роблять у методі, запропонованому Гамільтоном.

Отже, у методі Гамільтона в якості незалежних змінних розглядаються S узагальнених координат системи $q_1, q_2, \ldots, q_s$ й S її узагальнених імпульсів $p_1, p_2, \ldots, p_s$, обумовлених рівностями (14.3) $p_\alpha = \partial L / \partial \dot{q}_\alpha$. Для геометричної інтерпретації руху механічної системи вводиться фазовий простір – 2S-мірний абстрактний простір, по осях координат якого відкладаються значення S узагальнених координат q_α й S узагальнених імпульсів p_α. Кожній точці фазового простору (яку називають точкою, що зображує) відповідає визначений стан системи. При русі системи точка, що зображує, описує у фазовому просторі деяку криву, що називають фазовою траєкторією механічної системи. На відміну від конфігураційного простору через кожну точку фазового простору проходить одна-єдина фазова траєкторія механічної системи.

Рівняння руху механічної системи, які відповідають зазначеному способу опису її станів, можна одержати різними методами. Нижче ми приведемо два таких методи. Одержимо спочатку шукані рівняння руху за допомогою так називаного перетворення Лежандра, який широко використовується в теоретичній фізиці (наприклад, у термодинаміці при перетворенні термодинамічних функцій від одних термодинамічних параметрів до інших). У випадку, що цікавить нас, перетворення Лежандра q_α від $\dot{q}_\alpha$ змінних й (використовуваних у методі Лагранжа) до q_α новим p_α змінного й (використовуваних у методі Гамільтона) зводиться до наступного.

Записуємо повний диференціал функції Лагранжа системи (ми обмежуємося системами з узагальнено-потенційними або просто потенційними активними силами) $L\ (q,\dot{q},t)$:

$$dL = \sum_{\alpha=1}^{s} \frac{\partial L}{\partial q_\alpha} dq_\alpha + \sum_{\alpha=1}^{s} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha} d\dot{q}_\alpha + \frac{\partial L}{\partial t} dt \quad .$$

Роблячи тут згідно (14.3) і (14.5) заміни $\partial L / \partial \dot{q}_\alpha \to p_\alpha$ й $\partial L / \partial q_\alpha \to \dot{p}_\alpha$ маємо:

$$dL = \sum_{\alpha=1}^{s} \dot{p}_\alpha dq_\alpha + \sum_{\alpha=1}^{s} p_\alpha d\dot{q}_\alpha + \frac{\partial L}{\partial t} dt \quad . \tag{17.1}$$

Використовуючи очевидну рівність:

$$d\left(\sum_\alpha p_\alpha \dot{q}_\alpha \right) = \sum_\alpha p_\alpha d\dot{q}_\alpha + \sum_\alpha \dot{q}_\alpha dp_\alpha \ ,$$

вираз (17.1) переписуємо у вигляді:

$$d\left(\sum_{\alpha=1}^{s} p_\alpha \dot{q}_\alpha - L \right) = -\sum_{\alpha=1}^{s} \dot{p}_\alpha dp_\alpha + \sum_{\alpha=1}^{s} \dot{q}_\alpha dp_\alpha - \frac{\partial L}{\partial t} dt \quad . \tag{17.2}$$

Наявність у першій частині (17.2) диференціалів dq_α, dp_α і dt вказує на те, що величина, що міститься під знаком диференціала в лівій частині (17.2), являє собою деяку функцію q_α, p_α і t яка <u>визначається</u> формулою:

$$H\ (q_1\ q_2,...,q_s; \quad p_1, p_2,..., p_s\ ; t) = \left(\sum_{\alpha=1}^{s} p_\alpha \dot{q}_\alpha - L \right)_{\dot{q}_\alpha \to f\ (p)} \tag{17.3}$$

і називається <u>функцією Гамільтона</u> механічної системи.

Символ $\dot{q}_\alpha \to f\ (p)$ в (17.3) означає, що для складання явного виду $H(q, p, t)$ по формулі (17.3) необхідно узагальнені швидкості виразити через узагальнені імпульси за допомогою визначення узагальнених імпульсів $p_\alpha = \partial L / \partial \dot{q}_\alpha$ згідно (14.3); помітимо, що така процедура завжди здійсненна (див., наприклад, (14. …))...Нагадаємо, (див. § 14), що якщо L не залежить <u>явно</u> від часу, то величина (17.3) <u>зберігається</u>, і її називають <u>повною енергією</u> системи, тобто $H(q, p) = E$.

Порівнюючи тепер (17.2) з формальним виразженням для повного диференціала $H(q, p, t)$:

$$dH = \sum_{\alpha=1}^{s} \frac{\partial H}{\partial q_\alpha} dq_\alpha + \sum_{\alpha=1}^{s} \frac{\partial H}{\partial p_\alpha} dp_\alpha + \frac{\partial H}{\partial t} dt \quad ,$$

одержуємо рівняння:

$$\dot{p}_\alpha = -\frac{\partial H}{\partial q_\alpha} \ , \ \dot{q}_\alpha = \frac{\partial H}{\partial p_\alpha} \quad , \quad \alpha = 1, 2,..., s \tag{17.4}$$

і

$$\frac{\partial H}{\partial t} = -\frac{\partial L}{\partial t} \quad . \tag{17.5}$$

Рівняння (17.4) і є шукані рівняння руху системи в змінних q й p, які називають <u>рівняннями Гамільтона</u> або <u>канонічними рівняннями руху</u>. Вони являють собою систему 2S диференціальних рівнянь першого порядку відносно 2S невідомих функцій $q_\alpha(t)$ й $p_\alpha(t)$. Обертає на себе увагу симетрія рівнянь (17.4) відносно змінних q й p.

Одержимо тепер рівняння Гамільтона із принципу найменшої дії (16.2).

Використовуючи визначення (17.3) маємо:

$$Ldt = \left(\sum_\alpha p_\alpha \dot{q}_\alpha - H\right) dt = \sum_\alpha p_\alpha dq_\alpha - Hdt \quad ,$$

тому (16.2) можна записати у вигляді:

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} \left(\sum_{\alpha=1}^{s} p_\alpha dq_\alpha - Hdt \right) = 0 \quad . \tag{17.6}$$

Міняючи в лівій частині (17.6) порядок інтегрування й варіювання, одержуємо:

$$\sum_{\alpha=1}^{s} \int_{t_1}^{t_2} \left[\left(\dot{q}_\alpha - \frac{\partial H}{\partial p_\alpha} \right) \delta\, p_\alpha - \frac{\partial H}{\partial q_\alpha} \delta q_\alpha \right] dt + \sum_{\alpha=1}^{s} \int_{t_1}^{t_2} p_\alpha d\,(\delta\, q_\alpha) = 0 \quad . \tag{17.7}$$

Перетворимо останній доданок у лівій частині (17.7), інтегруючи по частинам:

$$\sum_{\alpha=1}^{s} \int_{t_1}^{t_2} p_\alpha d\,(\delta\, q_\alpha) = \sum_{\alpha=1}^{s} p_\alpha \delta\, q_\alpha \Big|_{t_1}^{t_2} - \sum_{\alpha=1}^{s} \int_{t_1}^{t_2} \dot{p}_\alpha \delta\, q_\alpha \; dt \quad ,$$

звідки з урахуванням граничних умов $\delta\, q_\alpha\, (t_1) = \delta\, q_\alpha\, (t_2) = 0$ маємо:

$$\sum_{\alpha=1}^{s} \int_{t_1}^{t_2} p_\alpha d(\delta q_\alpha) = -\sum_{\alpha=1}^{s} \int_{t_1}^{t_2} \dot{p}_\alpha\, \delta\, q_\alpha dt \quad . \tag{17.8}$$

Підставляючи (17.8) в (17.7), одержуємо:

$$\sum_{\alpha=1}^{s} \int_{t_1}^{t_2} \left[\left(\dot{q}_\alpha - \frac{\partial H}{\partial p_\alpha} \right) \delta p_\alpha - \left(\dot{p}_\alpha + \frac{\partial H}{\partial q_\alpha} \right) \delta\, q_\alpha \right] dt = 0 \quad , \tag{17.9}$$

звідки в силу незалежності (і, отже, дозвілля) варіацій δp_α і $\delta\, q_\alpha$ випливають рівняння Гамільтона (17.4).

Зауваження 1. Порівнюючи метод Гамільтона з методом Лагранжа, необхідно відзначити наступне. У рамках класичної механіки важко вказати таку динамічну задачу, яку не можна було б вирішити, користуючись рівняннями Лагранжа, і для розв’язок якої варто було б звернутися до рівнянь Гамільтона (17.4). Дійсна перевага методу Гамільтона в рамках самої класичної механіки полягає в тому, що він дозволяє суттєво спростити розгляд деяких загальних проблем механіки (наприклад, проблеми відшукання інтегралів руху - див. § 18). Але головна перевага методу Гамільтона складається все-таки в тім, що він дає необхідну математичну основу для побудови квантової механіки (див. частина IV) і статистичної фізики (тобто його головна перевага проявляється поза рамками самої класичної механіки).

<u>Зауваження 2</u>. Рівняння (17.5) у методі Гамільтона важливої ролі не відіграє; воно вказує тільки на те, що функція Гамільтона механічної системи залежить або не залежить <u>явно</u> від часу <u>одночасно</u> з її функцією Лагранжа. Тому зв'язок H із законом збереження енергії точно такий же, як і L (див. § 14): якщо H <u>явно</u> не залежить від часу (тобто $\partial H / \partial t = 0$), то повна енергія системи зберігається. Дійсно, записуючи повну похідну за часом від $H(q,p,t)$:

$$\frac{dH}{dt} = \frac{\partial H}{\partial t} + \sum_{\alpha=1}^{s} \left(\frac{\partial H}{\partial q_\alpha} \dot{q}_\alpha + \frac{\partial H}{\partial p_\alpha} \dot{p}_\alpha \right) \quad ,$$

і підставляючи сюди замість $\dot{q}_\alpha$ й $\dot{p}_\alpha$ їхній вираз з (17.4), одержуємо:

$$\frac{dH}{dt} = \frac{\partial H}{\partial t} \quad . \tag{17.10}$$

Звідси видно, що при $\partial H / \partial t = 0$ функція Гамільтона збігається з повною енергією системи:

$$H(q_1, q_2, \ldots, q_s; p_1, p_2, \ldots, p_s) = E \quad . \tag{17.11}$$

<u>Зауваження 3</u>. Закон збереження узагальненого імпульсу в методі Гамільтона формулюється аналогічно закону (14,…) у методі Лагранжа. Дійсно, порівнюючи рівняння Лагранжа (14.5) $\dot{p}_\alpha = \partial L / \partial q_\alpha$ з рівняннями Гамільтона $\dot{p}_\alpha = -\partial H / \partial q_\alpha$, маємо:

$$\frac{\partial H}{\partial q_\alpha} = -\frac{\partial L}{\partial q_\alpha} \ , \quad \alpha = 1,2,\ldots,s \quad . \tag{17.12}$$

З (17.12) видно, що яка-небудь координата q_α є циклічною (див. § 14) <u>одночасно</u> й стосовно L, і стосовно H, тобто ми маємо:

$$p_\alpha = const \ , \text{ якщо } \frac{\partial H}{\partial q_\alpha} = 0 \tag{17.13}$$

у повній аналогії з (14.6).

§ 18. <u>Дужки Пуассона.</u>

Наприкінці § 17 було показано, як по вигляду функції Гамільтона можна судити про збереження повної енергії й узагальнених імпульсів механічної системи. Розглянемо тепер більш загальну проблему відшукання <u>будь-яких</u> перших інтегралів (а не тільки законів збереження – див. § 8) рівнянь Гамільтона (17.4), а саме: <u>знайдемо необхідні й достатні умови, при виконанні яких яка-небудь функція узагальнених координат, узагальнених імпульсів і часу *F(q,p,t)* є першим інтегралом рівнянь руху</u>.

З цією метою запишемо повну похідну від F по часом:

$$\frac{dF}{dt}=\frac{\partial F}{\partial t}+\sum_{\alpha=1}^{s}\left(\frac{\partial F}{\partial q_{\alpha}}\dot{q}_{\alpha}+\frac{\partial F}{\partial p_{\alpha}}\dot{p}_{\alpha}\right)$$

Підставляючи замість $\dot{q}_{\alpha}$ й $\dot{p}_{\alpha}$ їхній вираз з канонічних рівнянь руху (17.   ), одержуємо:

$$\frac{dF}{dt}=\frac{\partial F}{\partial t}+(H,F) \quad , \tag{18.1}$$

де уведене позначення:

$$(H,F)=\sum_{\alpha=1}^{s}\left(\frac{\partial H}{\partial p_{\alpha}}\frac{\partial F}{\partial q_{\alpha}}-\frac{\partial H}{\partial q_{\alpha}}\frac{\partial F}{\partial p_{\alpha}}\right) \quad . \tag{18.2}$$

Вираз (18.2) називається дужками Пуассона для величин *H* й *F*.

Т. ч., необхідна й достатня умова $dF/dt=0$ для того, щоб величина *F(q,p,t)* була першим інтегралом руху, згідно (18.1) записується у вигляді вимоги:

$$\frac{\partial F}{\partial t}+(H,F)=0 \quad . \tag{18.3}$$

Якщо ж величина *F* явно від часу не залежить, тобто $F=F(q,p)$ й, отже $\partial F/\partial t=0$, то умовою, при якій ця величина є такою, що зберігається, є вимога (наслідок (18.3)):

$$(H,F)=0 \quad , \tag{18.4}$$

т. ч. дужки Пуассона *F* з функцією Гамільтона *H* повинні звертатися в нуль. Умовами (18.3) чи (18.4) можна користуватися для відшукання перших інтегралів руху, у тому числі й законів збереження. Таким чином, метод Гамільтона дозволяє запропонувати систематичний спосіб розв'язку проблеми відшукання інтегралів руху.

Введення дужок Пуассона дає можливість представити рівняння Гамільтона (17.   ) в абсолютно симетричному вигляді стосовно змінних q й p. Для цього у виразі (18.2) покладемо $F=p_{\beta}$ й $F=q_{\beta}$ ($\beta=1,2,\ldots,s$). Користуючись в обчисленнях символом Кронекера:

$$\delta_{\alpha\beta}=\begin{cases}1, если \;\; \alpha=\beta\\ 0, если \;\; \alpha\neq\beta\end{cases} \quad , \tag{18.5}$$

маємо:

$$(H,p_{\beta})=\sum_{\alpha=1}^{s}\left(\frac{\partial H}{\partial p_{\alpha}}\underbrace{\frac{\partial p_{\beta}}{\partial q_{\alpha}}}_{=0}-\frac{\partial H}{\partial q_{\alpha}}\underbrace{\frac{\partial p_{\beta}}{\partial p_{\alpha}}}_{\delta_{\alpha\beta}}\right)=-\sum_{\alpha=1}^{s}\delta_{\alpha\beta}\frac{\partial H}{\partial q_{\alpha}}=-\frac{\partial H}{\partial q_{\beta}} \quad , \tag{18.6}$$

$$(H,q_{\beta})=\sum_{\alpha=1}^{s}\left(\frac{\partial H}{\partial p_{\alpha}}\underbrace{\frac{\partial q_{\beta}}{\partial q_{\alpha}}}_{\delta_{\alpha\beta}}-\frac{\partial H}{\partial q_{\alpha}}\underbrace{\frac{\partial q_{\beta}}{\partial p_{\alpha}}}_{=0}\right)=\sum_{\alpha=1}^{s}\delta_{\alpha\beta}\frac{\partial H}{\partial p_{\alpha}}=\frac{\partial H}{\partial p_{\beta}} \quad . \tag{18.7}$$

З урахуванням результатів (18.6) і (18.7) рівняння Гамільтона (17.) можна переписати в симетричному вигляді:

$$\dot{p}_\beta = (H, p_\beta); \qquad \dot{q}_\beta = (H, q_\beta), \qquad \beta = 1,2,...,s \tag{18.8}$$

З огляду на важливість поняття дужок Пуассона для розвитку математичного апарата сучасної теоретичної фізики (особливо квантової механіки), викладемо тут основні <u>математичні</u> відомості про дужки Пуассона для будь-якої пари функцій $f(q,p,t)$ й $g(q,p,t)$. У цьому випадку дужки Пуассона визначаються вираженням, аналогічним (18.2),

$$(f,g) = \sum_{\alpha=1}^{s} \left(\frac{\partial f}{\partial p_\alpha} \frac{\partial g}{\partial q_\alpha} - \frac{\partial f}{\partial q_\alpha} \frac{\partial g}{\partial p_\alpha} \right) \quad , \tag{18.9}$$

де, як й в (18.2) ми використаємо скорочені позначення $q = \{q_1, q_2, \ldots q_s\}$ й $p = \{p_1, p_2, \ldots p_s\}$. Дужки Пуассона (18.9) задовольняють цілому ряду <u>тотожностей</u>, що випливають безпосередньо з їхнього визначення:

$$(f,g) = -(f,g) \quad ; \tag{18.10}$$

$$(f,f) = (g,g) = 0 \quad ; \tag{18.11}$$

$$(f,c) = (c,g) = 0, \text{ якщо } c = const \quad ; \tag{18.12}$$

$$(f_1 + f_2, g) = (f_1, g) + (f_2, g) \quad ; \tag{18.13}$$

$$(f_1 f_2, g) = f_1 (f_2, g) + f_2 (f_1, g) \quad ; \tag{18.14}$$

$$\frac{\partial}{\partial x}(f, g) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, g \right) + \left(f, \frac{\partial g}{\partial x} \right) \quad , \tag{18.15}$$

де під x варто розуміти будь-яку узагальнену координату q_α, імпульс p_α або час t. Якщо одна з функцій f або g збігається з q_α або p_α, то дужки (18.9) приймають вигляд (див. обчислення (18.6) і (18.7)):

$$(f, q_\alpha) = \frac{\partial f}{\partial p_\alpha} \;\; ; \;\; (f, p_\alpha) = -\frac{\partial f}{\partial q_\alpha} \quad . \tag{18.16}$$

Припускаючи в (18.16) функцію f рівної q_β й p_β, одержуємо:

$$\left. \begin{aligned} &(p_\alpha, q_\beta) = \delta_{\alpha\beta} \;\; , \\ &(q_\alpha, q_\beta) = (p_\alpha, p_\beta) = 0 \;\; , \end{aligned} \right\} \tag{18.17}$$

де $\delta_{\alpha\beta}$ дається формулою (18.5).

Дужки (18.17) називаються <u>фундаментальними</u> (або <u>основними</u>) <u>дужками Пуассона</u>. Їхнє важливе значення полягає в тому, що вони є <u>класичними аналогами квантово-механічних переміщувальних співвідношень для операторів координати й імпульсу мікрочастинки</u> (див. частина IV).

Та обставина, що для пари величин p_α і q_α дужки Пуассона згідно (18.17) дорівнюють одиниці можна розглядати як визначення канонічної спряженості цих величин: будь-які дві величини q_α й p_α будемо називати <u>канонічно спряженими</u>, якщо вони задовольняють умовам:

$$(q_\alpha, q_\alpha) = (p_\alpha, p_\alpha) = 0 \;\; ; \;\; (p_\alpha, q_\alpha) = 1 \quad . \tag{18.18}$$

Використовуючи тотожності (18.13) – (18.15) легко перевірити справедливість тотожності для трьох функцій f, g й $h(q, p, t)$

$$(f,(g,h)) + (g,(h,f)) + (h,(f,g)) = 0 \quad , \tag{18.19}$$

яке називається <u>тотожністю Якобі</u>. З нього випливає важлива <u>теорема Пуассона</u>: якщо функції f і g є першими інтегралами рівнянь руху, то дужки (f,g) також є величиною, що зберігається.

<u>**Доведення**</u>. За умовою теореми з врахуванням (18.3):

$$\frac{\partial f}{\partial t} + (H, f) = \frac{\partial g}{\partial t} + (H, g) = 0$$

і необхідно довести, що такій же умові задовольняє і величина (f,g), тобто що справедлива вимога:

$$\frac{d}{dt}(f, g) = \frac{\partial}{\partial t}(f, g) + (H,(f, g)) = 0 \quad .$$

Дійсно, припускаючи в (18.19) $h = H$, маємо, користуючись (18.10):

$$(H,(f,g)) = (f,(H,g)) + ((H,f),g) \quad .$$

Тому, використовуючи (18.15) і (18.13) одержуємо:

$$\frac{d}{dt}(f, g) = \left(\frac{\partial f}{\partial t}, g\right) + \left(f, \frac{\partial g}{\partial t}\right) + (f,(H, g)) + ((H, f), g) =$$
$$= \left(\frac{\partial f}{\partial t} + (H, f), g\right) + \left(f, \frac{\partial g}{\partial t} + (H, g)\right) = 0 \quad ,$$

т. е. $(f,g) = const$, що й було потрібно довести. Теорему Пуассона можна, таким чином, використати для знаходження нових інтегралів руху по відомим величинам, що зберігаються, а саме: у тому випадку (f,g) якщо не зводиться до постійної або до функції від вихідних f інтегралів g і , (f,g) то <u>дає</u> новий інтеграл руху.

<u>**Приклад**</u>. Нехай відомо, що у вільної матеріальної точки зберігаються величини p_x й L_z. Тоді з теореми Пуассона випливає, що зберігається і величина (p_x, L_z). Але згідно (18.16):

$$(p_x, L_z) = \frac{\partial L_z}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(xp_y - yp_z\right) = p_y \quad ,$$

т. ч. при цьому обов'язково зберігається й проекція імпульсу p_y.

Зауваження. Алгебра дужок Пуассона (див. (18.10) – (18.15) і (18.19)) аналогічна так названій Лі алгебрі, тому математичний апарат дужок Пуассона має глибокі зв'язки з такими розділами математики, як з теорією алгебри Лі й, отже, з теорією Лі груп. Ця обставина дає можливість застосовувати ці потужні сучасні математичні методи для дослідження загальних проблем як класичної механіки, так й інших розділів фізики, де застосовується метод Гамільтона.

§ 19. Рівняння Гамільтона-Якобі.

Для формулювання принципу найменшої дії Гамільтона-Остроградського ми в §16 визначили дію S механічної системи як певний інтеграл:

$$S = \int_{t_1}^{t_2} L(q, \dot{q}, t)dt \quad , \tag{19.1}$$

залежний від вигляду конфігураційних траєкторій системи, що починаються й закінчуються у двох заданих конфігураціях A_1 й A_2 у задані моменти часу t_1 й t_2 (див. мал. 16.1)).

Можлива, однак, і постановка таких фізичних задач, коли дійсні рухи системи можуть:

1) “ закінчуватись ” у різних конфігураціях $q(t_2)$,

2) відбуваються з однієї конфігурації в іншу за різні проміжки часу $t_2 - t_1$. Такими є задачі, пов'язані з розглядом безлічі різних дійсних рухів системи, які відрізняються друг від друга різним вибором її початкового стану (точніше, різним вибором її узагальнених початкових швидкостей $\dot{q}(t_1)$ при однаковій початковій конфігурації $A_1 = q(t_1)$ – див. мал. (16.1)). Так як при такій постановці задач всі досліджувані рухи системи є дійсними, то всі розглянуті при цьому конфігураційні траєкторії автоматично задовольняють рівнянням Лагранжа (13.18). Т. ч., у самому загальному випадку (враховуючому й викладену вище можливість постановки фізичних задач), поняття про дію механічної системи (19.1) варто узагальнити й розглядати дію S як явну функцію $S = S(q,t)$ кінцевого моменту часу $t = t_2$ й кінцевої конфігурації системи $q = q(t_2)$, тобто дія системи в загальному випадку можна визначитися невизначеним інтегралом:

$$S(q,t) = \int_{t_1}^{t} L(q, \dot{q}, t)dt \quad . \tag{19.2}$$

Використовуючи (17.3), (19.2) можна переписати у вигляді (див. також (17.6)):

$$S = \int_{t_1}^{t} \left(\sum_{\alpha=1}^{s} p_\alpha dq_\alpha - Hdt \right) \quad , \tag{19.3}$$

звідки для повного диференціала $dS(q,t)$ одержуємо вираз :

$$dS = \sum_{\alpha=1}^{s} p_\alpha dq_\alpha - Hdt \quad . \tag{19.4}$$

З іншого боку, формальний вираз для повного диференціала від функції $S(q,t)$ має вигляд:

$$dS = \sum_{\alpha=1}^{s} \frac{\partial S}{\partial q_\alpha} dq_\alpha + \frac{\partial S}{\partial t} dt \quad . \tag{19.5}$$

З порівнянням (19.4) і (19.5) знаходимо:

$$\frac{\partial S}{\partial t} = -H(q, p, t) \tag{19.6}$$

$$\frac{\partial S}{\partial q_\alpha} = p_\alpha \ , \quad \alpha = 1,2,...,s \tag{19.7}$$

Якщо тепер у співвідношенні (19.6) узагальнені імпульси p_α, що входять у функцію Гамільтона, замінити згідно (19.7) частковими похідними $\partial S / \partial q_\alpha$, то ми одержимо рівняння:

$$\frac{\partial S}{\partial t} + H(q_1, q_2, ..., q_s; \frac{\partial S}{\partial q_1}, \frac{\partial S}{\partial q_2}, ..., \frac{\partial S}{\partial q_s}; t) = 0 \quad , \tag{19.8}$$

якому повинна задовольняти функція дії $S(q,t)$ механічної системи з узагальнено-потенційними активними силами й голономними ідеальними в'язями. Це рівняння в частинних похідних першого порядку називається рівнянням Гамільтона-Якобі. Воно є нелінійним рівнянням, тому що часткові похідні $\partial S / \partial q_\alpha$ входять у нього в другому ступені. Наприклад, для вільної матеріальної точки маси m, що рухається в потенціальному полі $U(\vec{r})$, функція Гамільтона має вигляд $H = \frac{p^2}{2m} + U = \frac{1}{2m}\left(p_x^{\ 2} + p^2_{\ y} + p^2_{\ z}\right) + U$; тому рівняння Гамільтона-Якобі (19.8) для такої системи записується у вигляді (якщо як узагальнені координати точки використати її декартові координати):

$$\frac{\partial S}{\partial t} + \frac{1}{2m}\left[\left(\frac{\partial S}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial S}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial S}{\partial z} \right)^2 \right] + U(\vec{r}) = 0 \quad . \tag{19.9}$$

Поряд з методом Лагранжа й Гамільтона рівняння (19.8) становить основу ще одного методу інтегрування рівняння руху, що тут не викладається.

Важливе значення рівняння Гамільтона-Якобі (19.8) полягає в тому, що воно допомагає: 1) розкрити аналогію між класичною механікою частки й хвильовим процесом (т.зв. оптико-механічну аналогію), що відіграє важливу роль при поясненні хвильових властивостей мікрочастинок у квантовій механіці; 2) установити граничний перехід від квантової механіки до механіки класичної (див. частина IV).

Заключне зауваження. Аналітичні методи дослідження механічного руху, викладені в главі 3, розвинені на основі механічної картини світу, тобто на основі примітивних (із сучасної точки зору) уявлень про фізичну форму руху матерії, і тому, на перший погляд, не можуть бути використані за межами МКС. Однак, як ми вже неодноразово підкреслювали, ці методи при відповідному їхньому узагальненні з більшим успіхом застосовуються й у рамках інших ФКС – ЕМКС і КПКС. Ця обставина чітко підтверджує єдність фізичної реальності і є переконливою природно науковою ілюстрацією положення діалектичного матеріалізму про єдність матеріального світу. Ця ж обставина дає переконливу відповідь на питання, чому серйозне вивчення «древньої» науки – класичної механіки так необхідно для виховання сучасного фізика-дослідника.