

Розділ 1. ЧИСЛОВІ ТА СТЕПЕНЕВІ РЯДИ

1.1. Загальні поняття. Необхідна ознака збіжності

Розглянемо ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n + \dots$. Вираз $S_n = \sum_{k=1}^n a_k = a_1 + a_2 + \dots + a_n$ є його n -ою *частковою сумою*. Границя послідовності часткових сум $S_1, S_2, \dots, S_n, \dots$ при $n \rightarrow \infty$ називається *сумою* S ряду, тобто $S = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n$. Якщо ряд має скінченну суму, то він *збіжний*. Якщо вказана границя нескінченна або взагалі не існує, то ряд *розбіжний*.

Для збіжності ряду необхідно, щоб його загальний член прямував до нуля, коли n нескінченно зростає. Тобто, *якщо ряд збігається, то $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$* . (Необхідна ознака збіжності числового ряду).

Але не навпаки: коли $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$, то не можна зробити висновок, що ряд обов'язково збігається: він може, як збігатись, наприклад $\sum_{n=1}^{\infty} 1/n^2$, так і розбігатись, наприклад $\sum_{n=1}^{\infty} 1/n$, хоча як $\lim_{n \rightarrow \infty} 1/n^2 = 0$, так і $\lim_{n \rightarrow \infty} 1/n = 0$. Ця ознака є лише необхідною, але не є достатньою для збіжності.

Якщо $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \neq 0$, то ряд розбігається. (Достатня ознака розбіжності числового ряду).

1.2. Приклади розв'язання задач

Приклад. Дослідити на збіжність дані числові ряди:

$$\begin{array}{lll} \text{а) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n+1}{2n-3}; & \text{б) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{3n^2+2n+5}; & \text{в) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n-2}{\sqrt{n+4}} \\ \text{г) } \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{\frac{n}{2n+1}}; & \text{д) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3}{n^2+2}; & \text{е) } \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n+3}{n} \right)^n; \end{array}$$

$$\begin{aligned}
 \epsilon) \sum_{n=1}^{\infty} n^2 \sin \frac{1}{n^2}; \quad \text{ж) } \sum_{n=1}^{\infty} n \operatorname{tg} \frac{n}{n^2+1}; \quad \text{з) } \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3n+2}{2n-3} \right)^n; \\
 \text{и) } \sum_{n=1}^{\infty} n \operatorname{arctg} \frac{1}{n}; \quad \text{і) } \sum_{n=1}^{\infty} \arcsin \frac{n}{n+1}; \quad \text{ї) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4n^2-3}{n+1}; \\
 \text{й) } \sum_{n=1}^{\infty} n^2 \operatorname{arctg} \frac{n}{n^3+1}; \quad \text{к) } \sum_{n=1}^{\infty} n \ln \left(\frac{n+1}{n} \right); \quad \text{л) } \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt[3]{\frac{n^2+n-1}{n^2+1}}.
 \end{aligned}$$

Розв'язання.

а) Перевіримо виконання необхідної ознаки збіжності рядів:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n+1}{2n-3} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3+1/n}{2-3/n} = \frac{3}{2} \neq 0.$$

Оскільки $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \neq 0$, то ряд розбігається.

б) Перевіримо виконання необхідної ознаки збіжності:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2}{3n^2+2n+5} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{3+2/n+5/n^2} = \frac{1}{3} \neq 0.$$

Оскільки $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \neq 0$, то ряд розбігається.

в) Перевіримо виконання необхідної ознаки збіжності:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n-2}{\sqrt{n}+4} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3-2/n}{1/\sqrt{n}+4/n} = \left| \frac{3}{0} \right| = \infty \neq 0.$$

Оскільки $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \neq 0$, то ряд розбігається.

г) Перевіримо виконання необхідної ознаки збіжності:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{\frac{n}{2n+1}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{\frac{1}{2+1/n}} = \sqrt{\frac{1}{2}} \neq 0.$$

Отже, даний ряд розбігається.

д) Перевіримо виконання необхідної ознаки збіжності:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^3}{n^2+2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{1/n+2/n^3} = \left| \frac{1}{0} \right| = \infty \neq 0.$$

Отже, даний ряд розбігається.

е) Перевіримо виконання необхідної ознаки збіжності:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n+3}{n} \right)^n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{3}{n} \right)^n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{3}{n} \right)^{(n/3) \cdot 3} =$$

$$= \left(\lim_{n \rightarrow \infty} (1 + 3/n)^{n/3} \right)^3 = e^3 \neq 0. \text{ Отже, даний ряд розбігається.}$$

є) Перевіримо виконання необхідної ознаки збіжності:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} n^2 \sin \frac{1}{n^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sin 1/n^2}{1/n^2} = \left| \alpha = 1/n^2 \rightarrow 0 \right|_{\text{при } n \rightarrow \infty} =$$

$$= \lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{\sin \alpha}{\alpha} = 1 \neq 0. \text{ Отже, даний ряд розбігається.}$$

ж) Перевіримо виконання необхідної ознаки збіжності:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} n \operatorname{tg} \frac{n}{n^2 + 1} = \left| \alpha = n/(n^2 + 1) \rightarrow 0 \right|_{\text{при } n \rightarrow \infty; \operatorname{tg} \alpha \sim \alpha} =$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} n \cdot \frac{n}{n^2 + 1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2}{n^2 + 1} = 1 \neq 0. \text{ Ряд розбігається.}$$

з) Перевіримо виконання необхідної ознаки збіжності:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{3n+2}{2n-3} \right)^n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{3+2/n}{2-3/n} \right)^n = \left| \left(\frac{3}{2} \right)^{+\infty} \right| = +\infty \neq 0.$$

Отже, даний ряд розбігається.

и) Застосуємо необхідну ознаку:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} n \operatorname{arctg} \frac{1}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\operatorname{arctg} 1/n}{1/n} = 1 \neq 0.$$

$$(\text{Оскільки } \alpha = \frac{1}{n} \rightarrow 0 \text{ при } n \rightarrow \infty \text{ і } \lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{\operatorname{arctg} \alpha}{\alpha} = 1).$$

Необхідна ознака не виконується. Ряд розбігається.

і) За необхідною ознакою:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \arcsin \frac{n}{n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \arcsin \frac{1}{1+1/n} = \arcsin 1 = \frac{\pi}{2} \neq 0.$$

Даний ряд розбігається.

і) Необхідна ознака збіжності не виконується:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4n^2 - 3}{n + 1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4 - 3/n^2}{1/n + 1/n^2} = \left| \frac{4}{0} \right| = \infty \neq 0.$$

Отже, даний ряд розбігається.

й) Перевіримо виконання необхідної ознаки збіжності:

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} a_n &= \lim_{n \rightarrow \infty} n^2 \operatorname{arctg} \frac{n}{n^3 + 1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\operatorname{arctg}(n/(n^3 + 1))}{1/n^2} = \\ &= \left| \operatorname{arctg} \frac{n}{n^3 + 1} \sim \frac{n}{n^3 + 1} \text{ при } n \rightarrow \infty \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n/(n^3 + 1)}{1/n^2} = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^3}{n^3 + 1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{1 + 1/n^3} = 1 \neq 0. \quad \text{Ряд розбігається.} \end{aligned}$$

к) Перевіримо виконання необхідної ознаки збіжності:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} n \ln \frac{n+1}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln(1 + 1/n)}{1/n} = 1 \neq 0.$$

Ряд розбігається.

л) За необхідною ознакою збіжності:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[3]{\frac{n^2 + n - 1}{n^2 + 1}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[3]{\frac{1 + 1/n - 1/n^2}{1 + 1/n^2}} = \sqrt[3]{1} = 1 \neq 0.$$

Необхідна ознака не виконується. Ряд розбігається.

1.3. Задачі для самостійної роботи

Завдання. Дослідити на збіжність дані числові ряди:

№	Завдання	№	Завдання
1	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{3n-4}$	9	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{4n^2 - 2n + 7}$
2	$\sum_{n=1}^{\infty} n^2 \arcsin \frac{n^2}{n^4 + 3}$	10	$\sum_{n=1}^{\infty} n^2 \ln \frac{n^2 + 1}{n^2}$

3	$\sum_{n=1}^{\infty} n \ln(1 + 4/n)$	11	$\sum_{n=1}^{\infty} n(e^{3/n} - 1)$
4	$\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt[3]{\frac{2n^3 + n - 3}{n^3 + 5}}$	12	$\sum_{n=1}^{\infty} n^3 \operatorname{arctg} \frac{2}{n^3}$
5	$\sum_{n=1}^{\infty} n^2 \cdot \sin \frac{n^2}{n^4 + 1}$	13	$\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{\frac{n}{3n + 4}}$
6	$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{4n + 1}{3n - 2} \right)^n$	14	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^4}{n^3 + 3}$
7	$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n + 7}{n} \right)^{n+1}$	15	$\sum_{n=1}^{\infty} n \sin \frac{3}{n}$
8	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5n^2 + 1}{3n - 4}$	16	$\sum_{n=1}^{\infty} \arcsin \frac{2n + 3}{2n + 5}$

1.4. Достатні ознаки збіжності рядів з додатними членами

Розглянемо найпоширеніші достатні ознаки збіжності *знакододатних числових рядів* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, де $a_n \geq 0$.

1.4.1. Ознаки порівняння

При застосуванні ознак порівняння ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, що досліджується на збіжність, порівнюється з **еталонним рядом** $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$, про який відомо збігається він чи розбігається.

Перша (основна) ознака порівняння.

а) Нехай маємо збіжний еталонний ряд $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$, причому $a_n \leq b_n$. Тоді ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ теж збігається.

(Якщо $a_n > b_n$, то жодних висновків робити не можна).

б) Нехай маємо розбіжний еталонний ряд $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$, причому $a_n \geq b_n$. Тоді ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ теж розбігається. (Якщо $a_n < b_n$, то ніяких висновків робити не можна).

Таким чином, з розбіжним рядом порівнюємо «у бік більше»; а зі збіжним рядом – «у бік менше».

Друга (гранична) ознака порівняння.

$$\text{Якщо} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = l \quad (l \neq 0, l \neq \infty), \quad (*)$$

то обидва ряди поводять себе однаково щодо збіжності: одночасно збігаються чи розбігаються.

Співвідношення (*) говорить про те, що загальні члени a_n і b_n цих рядів є нескінченно малими одного порядку. Це треба мати на увазі також при використанні першої ознаки, тобто підбирати для порівняння еталонний ряд, загальний член якого b_n є нескінченно малою того ж порядку, що і загальний член a_n ряду, що досліджується: $a_n \sim b_n$.

За еталонні ряди часто приймають:

а) **узагальнений гармонічний ряд** $\sum_{n=1}^{\infty} 1/n^p$, що збігається, коли $p > 1$, і розбігається при $p \leq 1$;

б) **геометричний ряд** (ряд, складений із членів геометричної прогресії) $\sum_{n=1}^{\infty} aq^n$, що збігається при $q < 1$ і розбігається при $q \geq 1$.

1.4.2. Приклади розв'язання задач

Приклад. Дослідити на збіжність дані числові ряди:

$$\begin{aligned} \text{а) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n^2 + 4}; \quad \text{б) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n^3 + 4}; \quad \text{в) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 - 4n + 1}; \quad \text{г) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n}}{n + 3}; \\ \text{д) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3 + 4}{4n^6 - 2n^2 + 5n}; \quad \text{е) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{n^2(n+3)}}; \quad \text{є) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[4]{3n^5 + 1}}; \end{aligned}$$

$$\text{ж) } \sum_{n=1}^{\infty} \ln(1+3/n); \text{ з) } \sum_{n=1}^{\infty} \sin \frac{n}{n^2+3}; \text{ и) } \sum_{n=1}^{\infty} \arcsin(1/n^2);$$

$$\text{і) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(3^n+2)}.$$

Розв'язання. а) Необхідна ознака збіжності виконується:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n^2+4} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1/n}{1+4/n^2} = 0.$$

Застосуємо достатню граничну ознаку порівняння. Оскільки $a_n = \frac{n}{n^2+4} \sim \frac{n}{n^2} = \frac{1}{n} = b_n$, то порівнюємо даний ряд з гармонічним рядом $\sum_{n=1}^{\infty} 1/n$, що розбігається:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2}{n^2+4} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{1+4/n^2} = 1.$$

Одержана границя є скінченною і відмінною від нуля. Отже ці ряди поведуть себе однаково, тобто ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n^2+4}$ також розбігається.

б) Необхідна ознака виконується:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n^3+4} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1/n^2}{1+4/n^2} = 0.$$

Застосуємо основну ознаку порівняння з більшим збіжним рядом $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$: $a_n = \frac{n}{n^3+4}$, $b_n = \frac{1}{n^2}$. $\frac{n}{n^3+4} < \frac{n}{n^3} = \frac{1}{n^2}$. Оскільки $a_n < b_n$, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n^3+4}$ також збігається.

в) Необхідна ознака виконується:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^2-4n+1} = 0.$$

Застосуємо граничну ознаку збіжності, порівнюючи даний ряд

зі збіжним рядом $\sum_{n=1}^{\infty} 1/n^2$:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2}{n^2 - 4n + 1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{1 - 4/n + 1/n^2} = 1 \left(\begin{array}{l} \neq 0 \\ \neq \infty \end{array} \right).$$

Ряди поведуть себе однаково щодо збіжності. Отже, даний ряд збігається.

г) Необхідна ознака виконується:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n}}{n+3} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n}/n}{n/n + 3/n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1/\sqrt{n}}{1 + 3/n} = 0.$$

Оскільки $a_n = \frac{\sqrt{n}}{n+3} \sim \frac{1}{\sqrt{n}} = b_n$, $b_n = \frac{1}{\sqrt{n}}$, то застосуємо граничну ознаку порівняння з розбіжним узагальненим гармонічним рядом $\sum_{n=1}^{\infty} 1/n^{1/2}$:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n} \cdot \sqrt{n}}{n+3} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n+3} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{1+3/n} = 1 \left(\begin{array}{l} \neq 0 \\ \neq \infty \end{array} \right).$$

Ряди поведуть себе однаково щодо збіжності. Таким чином, даний ряд розбігається.

д) Необхідна ознака виконується:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^3 + 4}{4n^6 - 2n^2 + 5n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1/n^3 + 4/n^6}{4 - 2/n^4 + 5/n^5} = 0.$$

Оскільки $a_n = \frac{n^3 + 4}{4n^6 - 2n^2 + 5n} \sim \frac{n^3}{4n^6} \sim \frac{1}{n^3} = b_n$, застосуємо граничну ознаку порівняння з рядом $\sum_{n=1}^{\infty} b_n = \sum_{n=1}^{\infty} 1/n^3$, що збігається:

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^3(n^3 + 4)}{4n^6 - 2n^2 + 5n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^5 + 4n^2}{4n^5 - 2n + 5} = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + 4/n^3}{4 - 2/n^4 + 5/n^5} = \frac{1}{4} \left(\begin{array}{l} \neq 0 \\ \neq \infty \end{array} \right). \end{aligned}$$

Отже, ці ряди поведуть себе однаково щодо збіжності, тобто

даний ряд теж збігається.

е) Необхідна ознака збіжності виконується:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt[3]{n^2(n+3)}} = \left| \frac{1}{\infty} \right| = 0.$$

Оскільки $a_n = 1/\sqrt[3]{n^3 + 3n^2} \sim 1/\sqrt[3]{n^3} = 1/n = b_n$, то застосуємо граничну ознаку порівняння з розбіжним рядом $\sum_{n=1}^{\infty} 1/n$:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{\sqrt[3]{n^3 + 3n^2}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt[3]{1 + 3/n}} = 1 \quad \left(\begin{array}{l} \neq 0 \\ \neq \infty \end{array} \right).$$

Оскільки гармонічний ряд $\sum_{n=1}^{\infty} 1/n$ розбігається, то і даний ряд теж розбігається.

є). Необхідна ознака виконується:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt[4]{3n^5 + 1}} = \left| \frac{1}{\infty} \right| = 0.$$

Оскільки $a_n = \frac{1}{\sqrt[4]{3n^5 + 1}} \sim \frac{1}{\sqrt[4]{3n^5}} \sim \frac{1}{\sqrt[4]{n^5}} = \frac{1}{n^{5/4}} = b_n$, то застосуємо граничну ознаку порівняння з рядом $\sum_{n=1}^{\infty} 1/n^{5/4}$. Узагальнений гармонічний ряд $\sum_{n=1}^{\infty} 1/n^p$ збігається при $p > 1$. Оскільки $5/4 > 1$, то еталонний ряд $\sum_{n=1}^{\infty} 1/n^{5/4}$ – збіжний.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^{5/4}}{\sqrt[4]{3n^5 + 1}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[4]{\frac{n^5}{3n^5 + 1}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[4]{\frac{1}{3 + 1/n^5}} = \frac{1}{\sqrt[4]{3}}.$$

Тобто a_n і b_n є нескінченно малі одного порядку, два ряди поведуть себе однаково щодо збіжності. Отже, даний ряд збігається.

ж) Відомо, що $\lim_{\alpha \rightarrow 0} (1/\alpha) \ln(1 + \alpha) = 1$. Тому для даного ряду

можна застосувати граничну ознаку порівняння з рядом $\sum_{n=1}^{\infty} 1/n$, що розбігається:

$$\begin{aligned}
 a_n &= \ln(1+3/n), \quad b_n = 1/n; \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln(1+3/n)}{1/n} = \\
 &= 3 \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln(1+3/n)}{3/n} = \left| \alpha = 3/n \rightarrow 0 \text{ при } n \rightarrow \infty \right| = \\
 &= 3 \lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{\ln(1+\alpha)}{\alpha} = 3 \begin{pmatrix} \neq 0 \\ \neq \infty \end{pmatrix}. \quad \text{Ряд розбігається.}
 \end{aligned}$$

з) Необхідна ознака виконується:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \sin \frac{n}{n^2 + 3} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sin \frac{1/n}{1 + 3/n^2} = \sin 0 = 0.$$

Порівняємо даний ряд з розбіжним гармонічним рядом $\sum_{n=1}^{\infty} 1/n$. За граничною ознакою:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sin(n/(n^2 + 3))}{1/n} = 1 \begin{pmatrix} \neq 0 \\ \neq \infty \end{pmatrix}. \quad \text{Ряд розбігається.}$$

и) Необхідна ознака виконується:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \arcsin(1/n^2) = \arcsin 0 = 0.$$

Порівняємо цей ряд за граничною ознакою порівняння зі збіжним рядом $\sum_{n=1}^{\infty} 1/n^2$: $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\arcsin(1/n^2)}{1/n^2} = 1 \begin{pmatrix} \neq 0 \\ \neq \infty \end{pmatrix}.$

Отже, даний ряд збігається.

i) Очевидно, необхідна ознака виконується:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n(3^n + 2)} = 0.$$

Застосуємо основну ознаку порівняння з рядом $\sum_{n=1}^{\infty} (1/3)^n$.

Цей ряд збігається, як складений з членів геометричної прогресії зі знаменником $q = 1/3 < 1$. Справедлива нерівність

$$a_n = \frac{1}{n(3^n + 2)} \leq \frac{1}{3^n + 2} \leq \frac{1}{3^n} = b_n,$$

тобто члени даного ряду не перевищують членів збіжного еталонного ряду. Таким чином, цей ряд збігається.

1.4.3. Задачі для самостійної роботи

Завдання. Дослідити на збіжність дані числові ряди:

№	Завдання	№	Завдання
1	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(5^n + 2)}$	9	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n^2 + 9}$
2	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n^3 - 5}$	10	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 + 2n - 3}$
3	$\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{tg} \frac{n^2}{n^3 + 1}$	11	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3 - 3}{5n^6 + n^2 - 4n + 1}$
4	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n}}{n + 7}$	12	$\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{arctg} \frac{n}{n^3 + 8}$
5	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{n^2(n+5)}}$	13	$\sum_{n=1}^{\infty} \ln(1 + 5/n^2)$
6	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[4]{n^6 + 7}}$	14	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{7^n + 3n}$
7	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4^n + 3^n}$	15	$\sum_{n=1}^{\infty} \sin \frac{n^3}{n^5 + 4}$
8	$\sum_{n=1}^{\infty} \arcsin \frac{1}{2^n}$	16	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n + n^2}$

1.4.4. Інтегральна ознака Коші

Ця ознака заснована на порівнянні числового ряду з невластним інтегралом.

Якщо функція $f(x)$ неперервна, монотонно спадає і додатна при $x \geq a$, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} f(n) = f(1) + f(2) + \dots + f(n) + \dots$

а) збігається, коли збігається невластний інтеграл $\int_a^{+\infty} f(x)dx$, тобто якщо він дорівнює деякій скінченній величині;

б) розбігається, коли вказаний інтеграл розбігається, тобто $\int_a^{+\infty} f(x)dx = +\infty$.

На практиці функцію $f(x)$ одержуємо, замінюючи у виразі загального члена a_n ряду дискретну змінну n на неперервну змінну x , причому нижня межа a дорівнює початковому значенню n для даного ряду.

Наприклад, $\sum_{n=2}^{\infty} a_n = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln^2 n}$. Тоді $f(x) = \frac{1}{x \ln^2 x}$, $a = 2$, і

будемо розглядати невласний інтеграл $\int_2^{\infty} \frac{dx}{x \ln^2 x}$.

1.4.5. Приклади розв'язання задач

Приклад. Дослідити на збіжність дані числові ряди:

$$\text{а) } \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \sqrt{\ln n}}; \text{ б) } \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln^4 n}; \text{ в) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\arctg n}{1+n^2}; \text{ г) } \sum_{n=1}^{\infty} n \cdot e^{-n^2}.$$

Розв'язання. а) Застосуємо достатню інтегральну ознаку Коші.

Розглянемо функцію $f(x) = \frac{1}{x \sqrt{\ln x}}$, що приймає додатні значення, неперервна і монотонно спадає на інтервалі $[2; +\infty)$, причому $f(n) = a_n$. Дослідимо невласний інтеграл:

$$\begin{aligned} \int_2^{+\infty} f(x)dx &= \int_2^{+\infty} \frac{dx}{x \sqrt{\ln x}} = \lim_{A \rightarrow +\infty} \int_2^A \frac{dx}{x \sqrt{\ln x}} = \lim_{A \rightarrow +\infty} \int_2^A \frac{d \ln x}{\sqrt{\ln x}} = \\ &= \lim_{A \rightarrow +\infty} 2 \sqrt{\ln x} \Big|_x^A = 2 \lim_{A \rightarrow +\infty} (\sqrt{\ln A} - \sqrt{\ln 2}) = +\infty. \end{aligned}$$

Оскільки цей невласний інтеграл розбігається, то даний ряд теж розбігається.

б) Застосуємо інтегральну ознаку Коші, вводячи функцію $f(x) = 1/(x \ln^4 x)$, що приймає додатні значення, неперервна і монотонно спадає на інтервалі $[2; +\infty)$, причому $f(n) = a_n$. Розглянемо невласний інтеграл:

$$\begin{aligned}
\int_2^{+\infty} f(x) dx &= \int_2^{+\infty} \frac{dx}{x \ln^4 x} = \lim_{A \rightarrow +\infty} \int_2^A \frac{dx}{x \ln^4 x} = \lim_{A \rightarrow +\infty} \int_2^A \frac{d \ln x}{\ln^4 x} = \\
&= \lim_{A \rightarrow +\infty} \int_2^A \ln^{-4} x d(\ln x) = \lim_{A \rightarrow +\infty} \left. \frac{\ln^{-3} x}{-3} \right|_2^A = -\frac{1}{3} \lim_{A \rightarrow +\infty} \left. \frac{1}{\ln^3 x} \right|_2^A = \\
&= -(1/3) \lim_{A \rightarrow +\infty} \left(1/\ln^3 A - 1/\ln^3 2 \right) = 1/(3 \ln^3 2) \neq \infty.
\end{aligned}$$

Отже, цей невласний інтеграл збігається, а тому даний ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n \ln^4 n}$ теж збігається.

в) Оскільки $(\arctg x)' = 1/(1+x^2)$, зручно застосувати інтегральну ознаку Коші. Розглянемо функцію $f(x) = \frac{\arctg x}{1+x^2}$, що на інтервалі $[1; +\infty)$ задовольняє умовам цієї ознаки. Дослідимо невласний інтеграл:

$$\begin{aligned}
\int_1^{\infty} f(x) dx &= \int_1^{\infty} \frac{\arctg x}{1+x^2} dx = \lim_{A \rightarrow \infty} \int_1^A \frac{\arctg x}{1+x^2} dx = \\
&= \lim_{A \rightarrow \infty} \int_1^A \arctg x d(\arctg x) = \lim_{A \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{2} \arctg^2 x \right) \Big|_1^A = \\
&= 1/2 \cdot \lim_{A \rightarrow \infty} (\arctg^2 A - \arctg^2 1) = 1/2 \cdot (\arctg^2 \infty - \arctg^2 1) = \\
&= 1/2 \cdot \left((\pi/2)^2 - (\pi/4)^2 \right) = 3\pi^2/32 \neq \infty.
\end{aligned}$$

Невласний інтеграл збігається, тому даний ряд теж збігається.

г) Необхідна ознака виконується:

$$\begin{aligned}
\lim_{n \rightarrow \infty} a_n &= \lim_{n \rightarrow \infty} n \cdot e^{-n^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{e^{n^2}} = \left| \frac{\infty}{\infty} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n'}{(e^{n^2})'} = \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{e^{n^2} \cdot 2n} = \left| \frac{1}{\infty} \right| = 0.
\end{aligned}$$

Застосуємо інтегральну ознаку Коші, вводячи функцію $f(x) = x \cdot e^{-x^2}$, що на інтервалі $[1; +\infty)$ відповідає умовам цієї

ознаки. Розглянемо невласний інтеграл:

$$\begin{aligned}\int_1^{\infty} f(x) dx &= \int_1^{\infty} x e^{-x^2} dx = \lim_{A \rightarrow \infty} \int_1^A x e^{-x^2} dx = -\frac{1}{2} \lim_{A \rightarrow \infty} \int_1^A e^{-x^2} d(-x^2) = \\ &= -\frac{1}{2} \lim_{A \rightarrow \infty} e^{-x^2} \Big|_1^A = -\frac{1}{2} \lim_{A \rightarrow \infty} (e^{-A^2} - e^{-1}) = -\frac{1}{2} \left(0 - \frac{1}{e} \right) = \frac{1}{2e} \neq \infty.\end{aligned}$$

Оскільки невласний інтеграл збігається, то і даний ряд теж збігається.

1.4.6. Задачі для самостійної роботи

Завдання. Дослідити на збіжність дані числові ряди:

№	Завдання	№	Завдання
1	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)\sqrt{\ln(n+1)}}$	9	$\sum_{n=1}^{\infty} n^2 \cdot e^{-n^3}$
2	$\sum_{n=1}^{\infty} n e^{-n}$	10	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\arctg 3n}{1+9n^2}$
3	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\arctg^2 n}{1+n^2}$	11	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln^2 n}{n^3}$
4	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(3n+2)\ln^4(3n+2)}$	12	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln(3n-1)}{(3n-1)}$
5	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln^2 n}{\sqrt{n}}$	13	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln(n^2+1)}{n^2+1}$
6	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(4n+1)\ln(4n+1)}$	14	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{-\sqrt{n}}}{\sqrt{n}}$
7	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(1+4n^2)\arctg 2n}$	15	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4^{1/n}}{n^2}$
8	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+2)\ln^2(n+2)}$	16	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{1/n^2}}{n^3}$

1.4.7. Ознака Даламбера

Ця достатня ознака в своїй основі має порівняння даного числового ряду з відповідним узагальненим геометричним рядом.

Якщо $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = q$, то при $q < 1$ ряд збігається, при $q > 1$

ряд розбігається, а при $q = 1$ не можна зробити висновок, збігається ряд чи розбігається.

Щоб не натрапити на останній випадок невизначеності, ознаку Даламбера застосовують до таких рядів, загальний член яких має в своєму складі факторіал або показникову функцію від n , наприклад

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{3^{2n+1}} \text{ або } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4n-3}{(3n-1)!}.$$

Зауважимо, що a_{n+1} одержуємо з a_n , замінюючи n на $n+1$.

Наприклад, якщо $a_n = \frac{n^2}{3^{2n+1}}$, то $a_{n+1} = \frac{(n+1)^2}{3^{2(n+1)+1}} = \frac{(n+1)^2}{3^{2n+3}}$, якщо

$$a_n = \frac{4n-3}{(3n-1)!}, \text{ то } a_{n+1} = \frac{4(n+1)-3}{(3(n+1)-1)!} = \frac{4n+1}{(3n+2)!}.$$

1.4.8. Приклади розв'язання задач

Приклад. Дослідити на збіжність дані числові ряди:

- а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n+2}{5^n}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^2+2}$; в) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{(2n)!}$; г) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5n+1}{\sqrt[3]{n^2 \cdot 4^n}}$;
д) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n \cdot 5^n}{4^{n-2}}$; е) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^4}{3^{n+1}}$; є) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)2^{n-1}}{n^2+3}$; ж) $\sum_{n=1}^{\infty} n \arcsin \frac{1}{3^n}$;
з) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{10^n(2n-1)}$; и) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n \cdot 3^{n-1}}{(2n-3)!}$; і) $\sum_{n=1}^{\infty} n^2 \arctg \frac{n}{3^n}$; ї) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^{2n-1}}{(n+1)!}$;
й) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{e^n}$; к) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n-1}{n!}$; л) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2n+1)}{2 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (3n-1)}.$

Розв'язання. а) У загальний член цього ряду входить показ-

никова функція 5^n , тому доцільно застосувати достатню ознаку Даламбера:

$$a_n = \frac{3n+2}{5^n}; \quad a_{n+1} = \frac{3(n+1)+2}{5^{n+1}} = \frac{3n+5}{5^{n+1}}; \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} =$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(3n+5) \cdot 5^n}{5^{n+1}(3n+2)} = \frac{1}{5} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n+5}{3n+2} = \frac{1}{5} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3+5/n}{3+2/n} = \frac{1}{5} < 1.$$

Ряд збігається.

б) У загальний член цього ряду входить факторіал $n!$, тому застосуємо ознаку Даламбера:

$$a_n = \frac{n!}{n^2+2}, \quad a_{n+1} = \frac{(n+1)!}{(n+1)^2+2}; \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)!(n^2+2)}{((n+1)^2+2)n!} =$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^3+n^2+2n+2}{n^2+2n+3} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1+1/n+2/n^2+2/n^3}{1/n+2/n^2+3/n^3} = \left| \frac{1}{0} \right| = \infty > 1.$$

Ряд розбігається.

в) У загальний член цього ряду входить $(2n)!$, тому застосуємо достатню ознаку Даламбера:

$$a_n = \frac{n^2}{(2n)!}, \quad a_{n+1} = \frac{(n+1)^2}{(2(n+1))!} = \frac{(n+1)^2}{(2n+2)!}; \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} =$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)^2(2n)!}{(2n+2)!n^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)^2}{(n)^2} \cdot \frac{(2n)!}{(2n+2)!} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n+1}{n} \right)^2 \times$$

$$\times \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(2n)!}{(2n)!(2n+1)(2n+2)} = \lim_{n \rightarrow \infty} (1+1/n)^2 \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{(2n+2)(2n+1)} =$$

$$= 1 \cdot 0 = 0 < 1. \quad \text{Ряд збігається.}$$

г) Загальний член цього ряду можна записати у вигляді

$$a_n = \frac{5n+1}{\sqrt[3]{n^2} \cdot 4^{n/3}}. \quad \text{До його складу входить показникова функція}$$

$4^{n/3}$. Тому застосуємо достатню ознаку Даламбера:

$$a_{n+1} = \frac{5(n+1)+1}{\sqrt[3]{(n+1)^2} \cdot 4^{(n+1)/3}}; \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} =$$

$$\begin{aligned}
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(5n+6) \sqrt[3]{n^2} \cdot 4^{n/3}}{\sqrt[3]{(n+1)^2} \cdot 4^{(n+1)/3} (5n+1)} = \frac{1}{4^{1/3}} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5n+6}{5n+1} \times \\
&\times \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[3]{\frac{n^2}{n^2+2n+1}} = 4^{-1/3} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5+6/n}{5+1/n} \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[3]{\frac{1}{1+2/n+1/n^2}} = \\
&= 4^{-1/3} \cdot 1 \cdot \sqrt[3]{1} = 4^{-1/3} < 1. \quad \text{Ряд збігається.}
\end{aligned}$$

д) У загальному члені ряду є показникові функції 5^n і 4^{n-2} , тому застосуємо достатню ознаку Даламбера:

$$\begin{aligned}
a_n &= \frac{n \cdot 5^n}{4^{n-2}} = \frac{n \cdot 5^n}{4^n \cdot 4^{-2}} = n \cdot (5/4)^n \cdot 4^2 = 16n \cdot (5/4)^n; \\
a_{n+1} &= 16(n+1)(5/4)^{n+1}; \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{16(n+1)(5/4)^{n+1}}{16n(5/4)^{n+1}} = \\
&= (5/4) \lim_{n \rightarrow \infty} (1+1/n) = 5/4 > 1. \quad \text{Ряд розбігається.}
\end{aligned}$$

е) До загального члену ряду входить показникова функція 3^{n+1} , тому застосуємо достатню ознаку Даламбера:

$$\begin{aligned}
a_n &= \frac{n^4}{3^{n+1}}; \quad a_{n+1} = \frac{(n+1)^4}{3^{n+2}}; \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)^4 3^{n+1}}{3^{n+2} \cdot n^4} = \\
&= \frac{1}{3} \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n+1}{n} \right)^4 = \frac{1}{3} \lim_{n \rightarrow \infty} (1+1/n)^4 = \frac{1}{3} < 1. \quad \text{Ряд збігається.}
\end{aligned}$$

є) У загальному члені ряду є показникова функція 2^{n-1} , тому застосуємо достатню ознаку Даламбера:

$$\begin{aligned}
a_n &= \frac{(n+1)2^{n-1}}{n^2+3}; \quad a_{n+1} = \frac{(n+2)2^n}{(n+1)^2+3}; \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+2) \cdot 2^n (n^2+3)}{((n+1)^2+3)(n+1) \cdot 2^{n-1}} = 2 \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+2}{n+1} \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2+3}{(n+1)^2+3} = \\
&= 2 \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1+2/n}{1+1/n} \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1+3/n^2}{(1+1/n)^2+3/n^2} = 2 \cdot 1 \cdot 1 = 2 > 1.
\end{aligned}$$

Ряд розбігається.

ж) Застосуємо достатню ознаку Даламбера:

$$a_n = n \cdot \arcsin(1/3^n); \quad a_{n+1} = (n+1) \cdot \arcsin(1/3^{n+1}).$$

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1) \arcsin(1/3^{n+1})}{n \arcsin(1/3^n)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{n} \times \\ &\times \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\arcsin(1/3^{n+1})}{\arcsin(1/3^n)} = \lim_{n \rightarrow \infty} (1 + 1/n) \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1/3^{n+1}}{1/3^n} = \\ &= \left| \arcsin \alpha \sim \alpha \text{ при } \alpha \rightarrow 0 \right| = 1 \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{3} < 1. \quad \text{Ряд збігається.} \end{aligned}$$

з) У загальному члені ряду є показникова функція 10^n і факторіал $n!$, тому можемо застосувати ознаку Даламбера:

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{n!}{10^n(2n-1)}; \quad a_{n+1} = \frac{(n+1)!}{10^{n+1}(2(n+1)-1)} = \frac{(n+1)!}{10^{n+1}(2n+1)}; \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)! 10^n(2n-1)}{10^{n+1}(2n+1)n!} = \frac{1}{10} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)(2n-1)}{2n+1} = \\ &= \frac{1}{10} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(1+1/n)(2-1/n)}{2/n+1/n^2} = \left| \frac{1}{10} \cdot \frac{2}{0} \right| = \infty > 1. \quad \text{Ряд розбігається.} \end{aligned}$$

и) У загальному члені ряду є показникова функція 3^{n-1} і факторіал $(2n-3)!$. Отже, застосуємо ознаку Даламбера:

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{n \cdot 3^{n-1}}{(2n-3)!}; \quad a_{n+1} = \frac{(n+1) \cdot 3^n}{(2(n+1)-3)!} = \frac{(n+1) \cdot 3^n}{(2n-1)!}; \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1) \cdot 3^n (2n-3)!}{(2n-1)! \cdot n \cdot 3^{n-1}} = 3 \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)(2n-3)!}{n(2n-3)!(2n-2)(2n-1)} = \\ &= 3 \lim_{n \rightarrow \infty} (1+1/n) \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{(2n-2)(2n-1)} = 3 \cdot 1 \cdot 0 = 0 < 1. \end{aligned}$$

Ряд збігається.

і) У складі загального члена ряду є показникова функція 3^n . Отже, можемо застосувати ознаку Даламбера:

$$a_n = n^2 \cdot \arctg(n/3^n); \quad a_{n+1} = (n+1)^2 \cdot \arctg((n+1)/3^{n+1});$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)^2 \operatorname{arctg}((n+1)/3^{n+1})}{n^2 \operatorname{arctg}(n/3^n)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)^2}{n^2} \times \\ \times \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\operatorname{arctg}((n+1)/3^{n+1})}{\operatorname{arctg}(n/3^n)}.$$

За допомогою правила Лопітала знаходимо

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{3^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{3^n \ln 3} = 0.$$

За першою чудовою границею $\lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{\operatorname{arctg} \alpha}{\alpha} = 1$, тобто

$\operatorname{arctg} \alpha \sim \alpha$ при $\alpha \rightarrow 0$. Тоді $\operatorname{arctg} \frac{n}{3^n} \sim \frac{n}{3^n}$ при $\alpha = \frac{n}{3^n} \rightarrow 0$ і

$\operatorname{arctg} \frac{n+1}{3^{n+1}} \sim \frac{n+1}{3^{n+1}}$ при $\alpha = (n+1)/3^{n+1} \rightarrow 0$. Еквівалентні нескін-

ченно малі у відношенні замінюються одна на іншу. Таким чином,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\operatorname{arctg}((n+1)/3^{n+1})}{\operatorname{arctg}(n/3^n)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)/3^{n+1}}{n/3^n} = \frac{1}{3} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{n} = \frac{1}{3}.$$

Тоді $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} (1 + 1/n)^2 \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{3} < 1$. Ряд збігається.

ї) У загальному члені ряду є факторіал $(n+1)!$, а також показникова функція 5^{2n-1} , тому застосуємо ознаку Даламбера:

$$a_n = \frac{5^{2n-1}}{(n+1)!}, \quad a_{n+1} = \frac{5^{2(n+1)-1}}{(n+1+1)!} = \frac{5^{2n+1}}{(n+2)!}; \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \\ = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5^{2n+1}(n+1)!}{(n+2)!5^{2n-1}} = 25 \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)!}{(n+1)!(n+2)} = 25 \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n+2} = \\ = 25 \cdot 0 = 0 < 1. \text{ Ряд збігається.}$$

й) У загальному члені ряду є показникова функція e^n , тому застосуємо ознаку Даламбера:

$$a_n = \frac{n+1}{e^n}, \quad a_{n+1} = \frac{n+2}{e^{n+1}}; \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+2)e^n}{e^{n+1} \cdot (n+1)} =$$

$$= \frac{1}{e} \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+2}{n+1} = \frac{1}{e} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1+2/n}{1+1/n} = \frac{1}{e} < 1. \quad \text{Ряд збігається.}$$

к) У загальному члені є факторіал $n!$, тому застосуємо ознаку Даламбера:

$$a_n = \frac{3n-1}{n!}, \quad a_{n+1} = \frac{3(n+1)-1}{(n+1)!} = \frac{3n+2}{(n+1)!};$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(3n+2)n!}{(n+1)!(3n-1)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n+2}{(3n-1)(n+1)} =$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3/n + 2/n^2}{(3-1/n)(1+1/n)} = 0 < 1. \quad \text{Ряд збігається.}$$

л) Застосуємо ознаку Даламбера:

$$a_n = \frac{3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot \dots \cdot (2n+1)}{2 \cdot 5 \cdot 8 \cdot \dots \cdot (3n-1)}, \quad a_{n+1} = \frac{3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot \dots \cdot (2n+1)(2n+3)}{2 \cdot 5 \cdot 8 \cdot \dots \cdot (3n-1)(3n+2)}.$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2n+1)(2n+3) \cdot 2 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (3n-1)}{2 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (3n-1)(3n+2) \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2n+1)} =$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n+3}{3n+2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2+3/n}{3+2/n} = \frac{2}{3} < 1. \quad \text{Ряд збігається.}$$

1.4.9. Задачі для самостійної роботи

Завдання. Дослідити на збіжність дані числові ряди:

№	Завдання	№	Завдання
1	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5n+3}{7^n}$	9	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)!}{n^3+1}$
2	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3}{(3n)!}$	10	$\sum_{n=1}^{\infty} n^2 \arctg \frac{1}{5^n}$
3	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+2) \cdot 3^n}{6^{n+1}}$	11	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3}{5^{n+2}}$
4	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n \cdot 3^{n+4}}{n^2+5}$	12	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n-4}{\sqrt[3]{n \cdot 5^{n-1}}}$

5	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+2)!}{4^n(3n+1)}$	13	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1) \cdot 2^{n+3}}{(2n+1)!}$
6	$\sum_{n=1}^{\infty} n \arctg \frac{n^2}{6^n}$	14	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^{2n+3}}{(n+4)!}$
7	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n-1}{e^{n+2}}$	15	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5n+3}{(n+2)!}$
8	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4 \cdot 7 \cdot \dots \cdot (3n+1)}{5 \cdot 7 \cdot \dots \cdot (2n+3)}$	16	$\sum_{n=1}^{\infty} n^2 \sin \frac{n}{4^n}$

1.4.10. Радикальна ознака Коші

Ця ознака є достатньою і базується, як і ознака Даламбера, на порівнянні даного числового ряду з відповідним узагальненим геометричним рядом.

Якщо $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = q$, то при $q < 1$ ряд збігається, при $q > 1$ ряд розбігається, а при $q = 1$ не можна зробити висновок щодо збіжності чи розбіжності ряду.

Радикальну ознаку Коші зручно застосовувати, коли загальний член ряду має в своєму складі показникові функції від n , з яких досить просто добувається корінь n -го степеня. Наприклад,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sin^{n+2} \frac{n}{n^2-3}; \sum_{n=1}^{\infty} \ln^{3n} \frac{2n+1}{n+3}; \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{4n-1}{7n+3} \right)^{n^2}.$$

1.4.11. Приклади розв'язання задач

Приклад. Дослідити на збіжність дані числові ряди:

$$\begin{aligned} \text{а) } \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2n-3}{3n+1} \right)^n; \text{ б) } \sum_{n=1}^{\infty} \sin^n \frac{n}{n^2+1}; \text{ в) } \sum_{n=1}^{\infty} \left(\arctg \frac{n^2+1}{n^3-2} \right)^{n+1}; \\ \text{г) } \sum_{n=1}^{\infty} \left(\arcsin \frac{n+3}{n+1} \right)^n; \text{ д) } \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{5n+6}{2n+1} \right)^{n-2}; \text{ е) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^{n+2}}{n^n}; \end{aligned}$$

$$\text{е)} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3n-1}{3n+2} \right)^{2n^2-3}; \quad \text{ж)} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n^2+2n}{n^2+4} \right)^{3n^2+1}; \quad \text{з)} \sum_{n=1}^{\infty} \ln^n \frac{n^2}{n+1};$$

$$\text{и)} \sum_{n=1}^{\infty} 4^n / \left(\operatorname{arctg} \frac{n}{n+2} \right)^{n-3}; \quad \text{і)} \sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{tg}^{n+1} \frac{n+3}{n^2};$$

$$\text{ї)} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\operatorname{arcsin} \frac{n+1}{2n+5} \right)^{3n-1}; \quad \text{й)} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{5n^2+4}{2n^2+n+1} \right)^n;$$

$$\text{к)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n} \left(\frac{2n-3}{2n+3} \right)^{3n^2+1}; \quad \text{л)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin^n 1/n}{5^{n+2}}.$$

Розв'язання. а) Загальний член ряду є n -м степенем дробу $(2n-3)/(2n+1)$, тому застосуємо радикальну ознаку Коші:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\left(\frac{2n-3}{3n+1} \right)^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n-3}{3n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2-3/n}{3+1/n} = \frac{2}{3} < 1.$$

Ряд збігається.

б) Загальний член ряду є степенем з показником n виразу $\sin(n/(n^2+1))$, тому застосуємо радикальну ознаку Коші:

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\sin^n \frac{n}{n^2+1}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sin \frac{n}{n^2+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sin \frac{1/n}{1+1/n^2} = \\ &= \sin 0 = 0 < 1. \quad \text{Ряд збігається.} \end{aligned}$$

в) Загальний член ряду є степенем з показником $n+1$ виразу $\operatorname{arctg} \frac{n^2+1}{n^3-2}$, тому застосуємо радикальну ознаку Коші:

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\left(\operatorname{arctg} \frac{n^2+1}{n^3-2} \right)^{n+1}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\operatorname{arctg} \frac{n^2+1}{n^3-2} \right)^{(n+1)/n} = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\operatorname{arctg} \frac{1/n+1/n^3}{1-2/n^3} \right)^{1+1/n} = \operatorname{arctg} 0 = 0 < 1. \quad \text{Ряд збігається.} \end{aligned}$$

г) Загальний член ряду є n -м степенем виразу $\arcsin \frac{n+3}{n+1}$, тому застосуємо радикальну ознаку Коші:

$$\begin{aligned}\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\left(\arcsin \frac{n+3}{n+1}\right)^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \arcsin \frac{n+3}{n+1} = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \arcsin \frac{1+3/n}{1+1/n} = \arcsin 1 = \frac{\pi}{2} > 1. \text{ Ряд розбігається.}\end{aligned}$$

д) Загальний член ряду є $(n-2)$ -м степенем виразу $(5n+6)/(2n+1)$, тому застосуємо радикальну ознаку Коші:

$$\begin{aligned}\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\left(\frac{5n+6}{2n+1}\right)^{n-2}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{5n+6}{2n+1}\right)^{\frac{n-2}{n}} = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{5+6/n}{2+1/n}\right)^{1-2/n} = \left(\frac{5}{2}\right)^1 = \frac{5}{2} > 1. \text{ Ряд розбігається.}\end{aligned}$$

е) Загальний член ряду $a_n = \frac{3^{n+2}}{n^n} = \frac{3^n \cdot 3^2}{n^n} = 9 \cdot (3/n)^n$. Таким чином, a_n містить у вигляді множника n -й степінь дробу $3/n$, тому можемо застосувати радикальну ознаку Коші:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{9 \cdot (3/n)^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} 9^{\frac{1}{n}} \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} 3/n = 1 \cdot 0 = 0 < 1.$$

Ряд збігається.

є) Загальний член ряду є степенем з показником $2n^2-3$ виразу $(3n-1)/(3n+2)$, тому застосуємо радикальну ознаку Коші:

$$\begin{aligned}\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\left(\frac{3n-1}{3n+2}\right)^{2n^2-3}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{3n-1}{3n+2}\right)^{\frac{2n^2-3}{n}} = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{-3}{3n+2}\right)^{-3 \cdot \left(-\frac{3}{3n+2} \cdot \frac{2n^2-3}{n}\right)} = e^{-\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{6n^2-9}{3n^2+2n}} =\end{aligned}$$

$$= e^{-\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{6-9/n^2}{3+2/n}} = e^{-2} < 1. \text{ Ряд збігається.}$$

ж) Показник степеня $3n^2 + 1$ у загальному члені даного ряду залежить від n , тому можемо застосувати радикальну ознаку Коші:

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\left(\frac{n^2 + 2n}{n^2 + 4}\right)^{3n^2 + 1}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n^2 + 2n}{n^2 + 4}\right)^{(3n^2 + 1)/n} = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + (2n - 4)/(n^2 + 4)\right)^{\frac{n^2 + 4}{2n - 4} \cdot \left(\frac{2n - 4}{n^2 + 4} \cdot \frac{3n^2 + 1}{n}\right)} = e^{\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2n - 4}{n} \cdot \frac{3n^2 + 1}{n^2 + 4}\right)} = \\ &= e^{\lim_{n \rightarrow \infty} (2 - 4/n) \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3 + 1/n^2}{1 + 4/n^2}} = e^{2 \cdot 3} = e^6 > 1. \text{ Ряд розбігається.} \end{aligned}$$

з) Загальний член ряду є степенем з показником n виразу $\ln \frac{n^2}{n+1}$, тому застосуємо радикальну ознаку Коші:

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\ln^n \frac{n^2}{n+1}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \ln \frac{1}{1/n + 1/n^2} = \\ &= \left| \ln \frac{1}{0} = \ln \infty \right| = \infty > 1. \text{ Ряд розбігається.} \end{aligned}$$

и) Загальний член ряду $a_n = 4^n : \arctg^{n-3}(n/(n+2))$ містить степені з показниками n та $3-n$, що залежать від n , тому застосуємо радикальну ознаку Коші:

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{4^n : \arctg^{n-3}(n/(n+2))} = \\ &= 4 : \lim_{n \rightarrow \infty} \arctg^{(n-3)/n}(n/(n+2)) = 4 : \lim_{n \rightarrow \infty} \arctg^{1-3/n} \frac{1}{1 + 2/n} = \\ &= 4 : \arctg 1 = 16/\pi > 1. \text{ Ряд розбігається.} \end{aligned}$$

і) У загальному члені ряду є степінь з показником $n+1$ виразу $\tg((n+3)/n^2)$, тому застосуємо радикальну ознаку Коші:

$$\begin{aligned}\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{tg^{n+1} \frac{n+3}{n^2}} = \lim_{n \rightarrow \infty} tg^{\frac{n+1}{n}} \frac{n+3}{n^2} = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} tg^{1+1/n} \left(\frac{1}{n} + \frac{3}{n^2} \right) = tg 0 = 0 < 1. \text{ Ряд збігається.}\end{aligned}$$

і) Загальний член ряду має показник степеня $3n-1$, що залежить від n , тому застосуємо радикальну ознаку Коші:

$$\begin{aligned}\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\left(\arcsin \frac{n+1}{2n+5} \right)^{3n-1}} = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\arcsin \frac{n+1}{2n+5} \right)^{(3n-1)/n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\arcsin \frac{1+1/n}{2+5/n} \right)^{3-1/n} = \\ &= (\arcsin(1/2))^3 = (\pi/6)^3 < 1. \text{ Ряд збігається.}\end{aligned}$$

й) Загальний член ряду є n -м степенем дробу $\frac{5n^2+4}{2n^2+n+1}$, тому можна застосувати радикальну ознаку Коші:

$$\begin{aligned}\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\left(\frac{5n^2+4}{2n^2+n+1} \right)^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5n^2+4}{2n^2+n+1} = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5+4/n^2}{2+1/n} = \frac{5}{2} > 1. \text{ Ряд розбігається.}\end{aligned}$$

к) У загальному члені ряду показники степенів n та $3n^2+1$ залежать від n , тому застосуємо радикальну ознаку Коші:

$$\begin{aligned}\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{1}{3^n} \left(\frac{2n-3}{2n+3} \right)^{3n^2+1}} = \frac{1}{3} \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2n-3}{2n+3} \right)^{(3n^2+1)/n} = \\ &= \frac{1}{3} \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + (-6)/(2n+3) \right)^{\frac{2n+3}{-6} \cdot \left(\frac{-6}{2n+3} \cdot \frac{3n^2+1}{n} \right)} = \\ &= \frac{1}{3} e^{-6 \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n^2+1}{2n^2+3n}} = \frac{1}{3} e^{-6 \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3+1/n^2}{2+3/n}} = \frac{1}{3} e^{-6 \cdot \frac{3}{2}} = \frac{1}{3} e^{-9} < 1.\end{aligned}$$

Ряд збігається.

л) У загальному члені ряду показники степенів n та $n+2$, тому можна застосувати радикальну ознаку Коші:

$$\begin{aligned}\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{\sin^n 1/n}{5^{n+2}}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sin 1/n}{5^{(n+2)/n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sin 1/n}{5^{1+2/n}} = \frac{\sin 0}{5} = \\ &= 0 < 1. \quad \text{Ряд збігається.}\end{aligned}$$

1.4.12. Задачі для самостійної роботи

Завдання. Дослідити на збіжність дані числові ряди:

№	Завдання	№	Завдання
1	$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{4n+5}{5n-3} \right)^n$	9	$\sum_{n=1}^{\infty} \ln^{n+1} \frac{n^3}{n^2+3}$
2	$\sum_{n=1}^{\infty} tg^n \frac{n^2}{n^3+3}$	10	$\sum_{n=1}^{\infty} 5^{n+2} / \sin^n \frac{n}{n+1}$
3	$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\arcsin \frac{n+3}{n^2+2} \right)^{n+3}$	11	$\sum_{n=1}^{\infty} tg^{n-2} \frac{n^2+1}{n^3}$
4	$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\arcsin \frac{n^2+5}{n^2-3} \right)^{3n}$	12	$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\arctg \frac{n+1}{n+2} \right)^{2n+3}$
5	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^n}{n^{2n}}$	13	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{tg^n 1/n^2}{7^{n-1}}$
6	$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3n-1}{5n+6} \right)^{n+4}$	14	$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3n^4+1}{2n^4+n^2+3} \right)^{n+1}$
7	$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2n+3}{2n-1} \right)^{n^2+4}$	15	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{5^n} \left(\frac{n+2}{n+1} \right)^{n^2+1}$
8	$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n+3}{n+5} \right)^{n^2-3}$	16	$\sum_{n=1}^{\infty} \ln^{n^2} \frac{n^4}{n^4+4}$

1.5. Знакопочергові ряди

Знакопочерговий ряд (ряд Лейбниція) має вигляд

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} a_n = a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + \dots + (-1)^{n+1} a_n + \dots, (*)$$

де $|u_n| = a_n \geq 0$.

Якщо збігається ряд, складений із модулів членів даного ряду, тобто ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ є збіжним, то сам ряд (*) теж збігається і називається **абсолютно збіжним**.

Якщо ряд з модулів $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ розбігається, а сам знакопочерговий ряд (*) збігається, тоді він називається **умовно збіжним**.

Достатня ознака Лейбниція: Якщо для знакопочергового ряду

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} a_n \text{ виконуються дві умови:}$$

$$1) a_1 > a_2 > \dots > a_n > \dots; \quad 2) \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0,$$

тобто послідовність, складена з модулів членів ряду, є монотонно спадною і прямує до нуля, тоді цей ряд є збіжним.

Друга умова ознаки Лейбниція, як розглянуто раніше, є необхідною для збіжності. Тому спочатку перевіряють саме її.

Підкреслимо, що виконання ознаки Лейбниція гарантує не абсолютну, а лише умовну збіжність ряду.

1.5.1. Приклади розв'язання задач

Приклад. Дослідити на умовну та абсолютну збіжність дані знакопочергові числові ряди:

$$\text{а) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{4n^2 + 3}; \quad \text{б) } \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{2n+1}{(n+1)(n+2)}; \quad \text{в) } \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\sqrt{n}}{2n-1};$$

$$\text{г) } \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n^2}{2^{n-1}}; \quad \text{д) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt[3]{3n-1}}; \quad \text{е) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot 2^n}{n^2};$$

$$\text{є) } \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \sin \frac{\pi}{n+1}; \quad \text{ж) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\ln(n+1)}; \quad \text{з) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(n+1)\ln(n+1)};$$

$$\begin{aligned}
 \text{и) } \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \arcsin^n \frac{\pi n}{3^n}; & \quad \text{і) } \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{n}{3n-1} \right)^{n+2}; \\
 \text{ї) } \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n n^2 \sin \frac{n}{n^3+1}; & \quad \text{й) } \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{n^2-3}{n^2+1} \right)^{n^2+2}; \\
 \text{к) } \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n \cdot 3^{n-1}}{(n+1)!}; & \quad \text{л) } \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot \dots \cdot (2n-1)}{1 \cdot 4 \cdot 7 \cdot 10 \cdot \dots \cdot (3n-2)}.
 \end{aligned}$$

Розв'язання. а) Складемо ряд з абсолютних величин $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4n^2+3}$. Порівняємо його з рядом $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$, що збігається:

$$a_n = \frac{1}{4n^2+3} < \frac{1}{n^2+3} < \frac{1}{n^2} = b_n.$$

За основною ознакою порівняння ряд з модулів збігається. Таким чином, даний знакопочерговий ряд збігається абсолютно.

б) Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{(n+3)(n+5)}$ з абсолютних величин членів

даного знакопочергового ряду можна порівняти з рядом $\sum_{n=1}^{\infty} 1/n$, що розбігається. За граничною ознакою порівняння:

$$\begin{aligned}
 \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(2n+1)n}{(n+1)(n+2)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n^2+1}{n^2+3n+2} = \\
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2+1/n}{1+3/n+2/n^2} = \frac{2}{1} = 2 \quad \left(\begin{array}{l} \neq 0 \\ \neq \infty \end{array} \right).
 \end{aligned}$$

Отже, ряд з модулів розбігається. Застосуємо ознаку Лейбниця, щоб перевірити, чи збігається знакопочерговий ряд умовно:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n+1}{(n+1)(n+2)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2/n}{(1+1/n)(1+2/n)} = 0.$$

Отже, виконується друга умова ознаки Лейбниця.

$$a_1 = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}; \quad a_2 = \frac{5}{12}; \quad a_3 = \frac{7}{20} \quad a_4 = \frac{9}{30} = \frac{3}{10}; \quad \dots \quad \text{маємо}$$

$\frac{1}{2} > \frac{5}{12} > \frac{7}{20} > \frac{3}{10} > \dots$ Отже, виконується перша умова ознаки

Лейбница: $a_1 > a_2 > a_3 > a_4 > \dots$.

Таким чином, даний ряд збігається. Оскільки ряд з його абсолютних величин розбігається, то ця збіжність умовна.

в) Перевіримо виконання умов ознаки Лейбница:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n}}{2n-1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1/\sqrt{n}}{2-1/n} = \frac{0}{2} = 0; \quad a_1 = 1; \quad a_2 = \frac{\sqrt{2}}{3};$$

$$a_3 = \frac{\sqrt{3}}{5}; \quad \dots \quad 1 > \frac{\sqrt{2}}{3} > \frac{\sqrt{3}}{5} > \dots \text{ Отже, } a_1 > a_2 > a_3 > \dots$$

Обидві умови ознаки Лейбница виконуються, отже, даний ряд збігається. Дослідимо, збігається він абсолютно чи умовно.

Розглянемо ряд, складений з його абсолютних величин: $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n}}{2n-1}$. Цей ряд можна порівняти з рядом $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$, що розбігається:

$$a_n = \sqrt{n}/(2n-1); \quad b_n = 1/\sqrt{n};$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n} \cdot \sqrt{n}}{2n-1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{2n-1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2-1/n} = \frac{1}{2} \left(\begin{matrix} \neq 0 \\ \neq \infty \end{matrix} \right).$$

За граничною ознакою порівняння цей ряд розбігається. Отже, початковий знакопечерговий ряд збігається умовно.

г) Розглянемо ряд $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n| = \sum_{n=1}^{\infty} (n^2/2^{n-1})$, складений з абсолютних величин даного знакопечергового ряду. Дослідимо його збіжність, застосовуючи ознаку Даламбера:

$$a_n = \frac{n^2}{2^{n-1}}; \quad a_{n+1} = \frac{(n+1)^2}{2^n}; \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)^2 \cdot 2^{n-1}}{2^n \cdot n^2} =$$

$$= \frac{1}{2} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)^2}{n^2} = \frac{1}{2} \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n+1}{n} \right)^2 = \frac{1}{2} \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n} \right)^2 = \frac{1}{2} < 1.$$

Ряд з абсолютних величин збігається, отже, даний знакопечерговий ряд збігається абсолютно.

д) Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{3n-1}}$, складений з абсолютних величин даного знакопочергового ряду, можна порівняти з рядом $\sum_{n=1}^{\infty} 1/n^{1/3}$, що розбігається. За граничною ознакою порівняння:

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{\sqrt[3]{3n-1}}; \quad b_n = \frac{1}{n^{1/3}} = \frac{1}{\sqrt[3]{n}}; \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[3]{n}}{\sqrt[3]{3n-1}} = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[3]{\frac{n}{3n-1}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[3]{\frac{1}{3-1/n}} = \sqrt[3]{\frac{1}{3}} \quad \left(\begin{array}{l} \neq 0 \\ \neq \infty \end{array} \right). \end{aligned}$$

Отже, ряд з модулів розбігається.

Дослідимо початковий ряд на умовну збіжність, тобто перевіримо виконання умов ознаки Лейбниці:

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} a_n &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt[3]{3n-1}} = 0; \quad a_n = \frac{1}{\sqrt[3]{3n-1}}; \quad a_1 = \frac{1}{\sqrt[3]{2}}; \\ a_2 &= \frac{1}{\sqrt[3]{5}}; \quad a_3 = \frac{1}{\sqrt[3]{11}} \dots \text{Маємо } a_1 > a_2 > a_3 > \dots \end{aligned}$$

Умови ознаки Лейбниці виконуються. Даний ряд збігається умовно.

е) Перевіримо виконання другої умови ознаки Лейбниці для цього знакопочергового ряду:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^n}{n^2} = \left| \frac{\infty}{\infty} \right|.$$

Щоб розкрити цю невизначеність, розглянемо функцію $2^x/x^2$, яка співпадає з даною $2^n/n^2$ на множині цілих додатних чисел. За правилом Лопітала:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2^x}{x^2} = \left| \frac{\infty}{\infty} \right| = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2^x \ln 2}{2x} = \left| \frac{\infty}{\infty} \right| = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2^x \ln^2 2}{2} = +\infty.$$

Отже, і $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^n}{n^2} = \infty \neq 0$, а значить друга умова ознаки

Лейбниці не виконується, тому ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot 2^n}{n^2}$ розбігається.

е) Перевіримо виконання умов ознаки Лейбниця:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \sin \frac{\pi}{n+1} = |\sin 0| = 0;$$

$$a_n = \sin \frac{\pi}{n+1}, \quad a_1 = \sin \frac{\pi}{2} = 1; \quad a_2 = \sin \frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2};$$

$$a_3 = \sin \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}, \dots. \text{ Маємо } a_1 > a_2 > a_3 > \dots.$$

Отже, ознака Лейбниця виконується, тому даний знакоперерговий ряд збігається. Дослідимо, збігається він абсолютно чи умовно.

Ряд з абсолютних величин $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n| = \sum_{n=1}^{\infty} \sin \frac{\pi}{n+1}$ можна порівняти з гармонічним рядом $\sum_{n=1}^{\infty} 1/n$, що розбігається. За граничною ознакою порівняння:

$$\begin{aligned} a_n &= \sin \frac{\pi}{n+1}; \quad b_n = \frac{1}{n}; \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sin \pi/n+1}{1/n} = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\pi \cdot n}{n+1} = \pi \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{1+1/n} = \pi \begin{pmatrix} \neq 0 \\ \neq \infty \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Отже, ряд з модулів розбігається. Таким чином, початковий ряд збігається умовно.

ж) Перевіримо виконання умов ознаки Лейбниця:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\ln(n+1)} = \left| \frac{1}{\infty} \right| = 0. \text{ Друга умова ознаки Лейб-}$$

ниця виконується.

$$a_n = \left| (-1)^n \frac{1}{\ln(n+1)} \right| = \frac{1}{\ln(n+1)}; \quad a_1 = 1/\ln 2; \quad a_2 = 1/\ln 3;$$

$a_3 = 1/\ln 4, \dots$. Функція $\ln x$ є зростаючою, тому перша умова ознаки Лейбниця виконується $a_1 > a_2 > a_3 > \dots$.

Отже, даний ряд збігається.

Перевіримо, чи збігається він абсолютно. Ряд з абсолютних

величин $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\ln(n+1)}$ розбігається, тому що $\frac{1}{\ln(n+1)} > \frac{1}{n+1}$ (за основною ознакою порівняння з меншим рядом $\sum_{n=1}^{\infty} 1/(n+1)$, що розбігається). Таким чином, даний ряд збігається умовно.

з) Перевіримо виконання умов ознаки Лейбниця:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{(n+1) \ln(n+1)} = \left| \frac{1}{\infty} \right| = 0; \quad a_n = \frac{1}{(n+1) \ln(n+1)};$$

$$a_1 = 1/(2 \ln 2); \quad a_2 = 1/(3 \ln 3); \quad a_3 = 1/(4 \ln 4), \dots \quad a_1 > a_2 > a_3 \dots$$

Ознака Лейбниця виконується, тому даний ряд збігається. Маємо дослідити його на абсолютну збіжність.

Застосуємо інтегральну ознаку Коші до ряду з модулів $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1) \ln(n+1)}$. Розглянемо відповідну функцію

$$f(x) = \frac{1}{(x+1) \ln(x+1)}, \text{ що на інтервалі } [1, \infty) \text{ приймає додатні}$$

значення, неперервна і монотонно спадає, причому $f(n) = |u_n|$.

Дослідимо невластний інтеграл:

$$\begin{aligned} \int_1^{\infty} f(x) dx &= \int_1^{\infty} \frac{dx}{(x+1) \ln(x+1)} = \lim_{A \rightarrow \infty} \int_1^A \frac{dx}{(x+1) \ln(x+1)} = \\ &= \lim_{A \rightarrow \infty} \int_1^A \frac{d(\ln(x+1))}{\ln(x+1)} = \lim_{A \rightarrow \infty} \ln(\ln(x+1)) \Big|_1^A = \\ &= \lim_{A \rightarrow \infty} \ln(\ln(A+1)) - \ln \ln 2 = \infty. \end{aligned}$$

Інтеграл розбігається.

Отже, ряд з абсолютних величин теж розбігається. Таким чином, знакочерговий ряд збігається умовно.

и) Дослідимо на абсолютну збіжність даний ряд, застосовуючи радикальну ознаку Коші до ряду з абсолютних величин

$$\sum_{n=1}^{\infty} |u_n| = \sum_{n=1}^{\infty} \arcsin^n \left(\pi n / 3^n \right):$$

$$\begin{aligned}\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|u_n|} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\arcsin^n(\pi n / 3^n)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \arcsin(\pi n / 3^n) = \\ &= \arcsin\left(\pi \lim_{n \rightarrow \infty} (n / 3^n)\right) = \arcsin 0 = 0 < 1,\end{aligned}$$

де для розкриття невизначеності $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{3^n} = \left| \frac{\infty}{\infty} \right|$ скористалися відпо-
відною границею для допоміжної функції $f(x) = x/3^x$, що співпа-
дає з послідовністю $n/3^n$ при x цілих і додатних. За правилом
Лопітала

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{3^x} = \left| \frac{\infty}{\infty} \right| = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{3^x \ln 3} = 0. \quad \text{Отже і } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{3^n} = 0.$$

За радикальною ознакою Коші ряд з абсолютних величин
збігається, тому даний знакопочерговий ряд збігається абсолютно.

і) Перевіримо збіжність ряду з абсолютних величин

$$\sum_{n=1}^{\infty} |u_n| = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{3n-1} \right)^{n+2} \quad \text{за радикальною ознакою Коші:}$$

$$\begin{aligned}\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|u_n|} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\left(\frac{n}{3n-1} \right)^{n+2}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n}{3n-1} \right)^{(n+2)/n} = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{3-1/n} \right)^{1+2/n} = \frac{1}{3} < 1.\end{aligned}$$

Ряд з абсолютних величин збігається, а тому знакопочерговий
ряд збігається абсолютно.

і) Перевіримо виконання другої умови ознаки Лейбница:

$$\begin{aligned}\lim_{n \rightarrow \infty} a_n &= \lim_{n \rightarrow \infty} n^2 \sin \frac{n}{n^3+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} n^2 \cdot \frac{n}{n^3+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^3}{n^3+1} = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{1+1/n^3} = 1 \neq 0.\end{aligned}$$

(Скористались тим, що $\sin \alpha \sim \alpha$ при $\alpha \rightarrow 0$. $\alpha = n/(n^3+1)$),

$\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n^3 + 1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1/n^2}{1 + 1/n^3} = 0$. Тому $\sin \frac{n}{n^3 + 1} \sim \frac{n}{n^3 + 1}$ при $n \rightarrow \infty$).

Ознака Лейбница не виконується, тому даний знакочерговий ряд розбігається.

й) Перевіримо виконання другої умови ознаки Лейбница:

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} |u_n| &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n^2 - 3}{n^2 + 1} \right)^{n^2 + 2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n^2 + 1 - 4}{n^2 + 1} \right)^{n^2 + 2} = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - 4/(n^2 + 1) \right)^{\frac{n^2 + 1}{4} \cdot \frac{4(n^2 + 2)}{n^2 + 1}} = \\ &= \left(\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - 4/(n^2 + 1) \right)^{-(n^2 + 1)/4} \right)^{-4 \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 + 2}{n^2 + 1}} = e^{-4} \neq 0. \end{aligned}$$

Вона не виконується, тому даний ряд розбігається.

к) Дослідимо збіжність ряду $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n \cdot 3^{n-1}}{(n+1)!}$ з абсолютних величин даного знакочергового ряду. Застосуємо ознаку Даламбера:

$$\begin{aligned} |u_{n+1}| &= \frac{(n+1) \cdot 3^n}{(n+2)!}; \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1) \cdot 3^n \cdot (n+1)!}{(n+2)! n \cdot 3^{n-1}} = \\ &= 3 \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{n^2 + 2n} = 3 \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1/n + 1/n^2}{1 + 2/n} = 3 \cdot \frac{0}{1} = 0 < 1. \end{aligned}$$

Ряд з модулів збігається, а тому знакочерговий ряд збігається абсолютно.

л) Дослідимо збіжність ряду з абсолютних величин $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n| = \sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot \dots \cdot (2n-1)}{1 \cdot 4 \cdot 7 \cdot 10 \cdot \dots \cdot (3n-2)}$. Застосуємо ознаку Даламбера:

$$a_{n+1} = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot \dots \cdot (2(n+1)-1)}{1 \cdot 4 \cdot 7 \cdot 10 \cdot \dots \cdot (3(n+1)-2)} = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot \dots \cdot (2n+1)}{1 \cdot 4 \cdot 7 \cdot 10 \cdot \dots \cdot (3n+1)};$$

$$\begin{aligned}\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot \dots \cdot (2n+1) \cdot 1 \cdot 4 \cdot 7 \cdot 10 \cdot \dots \cdot (3n-2)}{1 \cdot 4 \cdot 7 \cdot 10 \cdot \dots \cdot (3n+1) \cdot 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot \dots \cdot (2n-1)} = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n+1}{3n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2+1/n}{3+1/n} = \frac{2}{3} < 1.\end{aligned}$$

Ряд з модулів збігається, а тому даний знакопочерговий ряд збігається абсолютно.

1.5.2. Задачі для самостійної роботи

Завдання. Дослідити на умовну та абсолютну збіжність дані знакопочергові числові ряди:

№	Завдання	№	Завдання
1	$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n+5}{(n+1)(n+6)}$	9	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^3 + 1}$
2	$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{2n+3}{5n-2} \right)^{n+4}$	10	$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n}{3^{n+2}}$
3	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt[3]{2n+3}}$	11	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot 3^{n+1}}{n^3}$
4	$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \sin \frac{2\pi}{n+3}$	12	$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{\ln^2(n+2)}$
5	$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{(n+3) \ln^2(n+3)}$	13	$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \arctg^n \frac{\pi n}{5^n}$
6	$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n n \cdot \sin \frac{n}{n^2 + 5}$	14	$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\sqrt{n+1}}{3n+1}$
7	$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{n+1}{n+4} \right)^{n^2+1}$	15	$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{(n+3) \cdot 5^n}{(n+3)!}$
8	$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (4n-3)}{7 \cdot 12 \cdot \dots \cdot (5n+2)}$	16	$\sum_{n=4}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n \sqrt{\ln n}}$