

2. ФУНКЦІОНАЛЬНІ РЯДИ

2.1. Основні означення

Означення 1. Ряд, члени якого є функції від x , називається *функціональним*:

$$u_1(x) + u_2(x) + \dots + u_n(x) + \dots, \quad x \in D. \quad (1)$$

Нехай $x=x_0$, тоді одержуємо числовий ряд $u_1(x_0) + u_2(x_0) + \dots + u_n(x_0) + \dots$, який може бути як збіжним, так і розбіжним. Якщо цей ряд збіжний, то точка x_0 називається точкою збіжності ряду (1).

Означення 2. Множина точок збіжності функціонального ряду (1) називається *областю збіжності цього ряду*.

Для знаходження області збіжності ряду використовується ознака Даламбера або радикальна ознака Коші:

- Якщо $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)} \right| = |q(x)|$, то при $|q(x)| < 1$ ряд збігається.
- Якщо $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|u_n(x)|} = |q(x)|$, то при $|q(x)| < 1$ ряд збігається.
- У випадку $|q(x)| = 1$ потрібне додаткове дослідження.

Приклад 1. Знайти область збіжності ряду $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-3)^n}{n^3}$.

Розв'язання. Скористаємося ознакою Даламбера:

$$u_n(x) = \frac{(x-3)^n}{n^3}; \quad u_{n+1}(x) = \frac{(x-3)^{n+1}}{(n+1)^3};$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{(x-3)^{n+1} \cdot n^3}{(n+1)^3 \cdot (x-3)^n} \right| = |x-3| \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^3}{(n+1)^3} = |x-3| \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^3} =$$

$= |x-3|$. Далі, $|x-3| < 1$; $-1 < x-3 < 1$; $2 < x < 4$.

Тепер досліджуємо даний ряд на кінцях одержаного проміжку:

а) при $x=4$ отримаємо ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3}$, який збігається, бо $p=3>1$;

б) при $x=2$ отримаємо знакопочережний ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^3}$, який збігається абсолютно.

Відповідь: $2 \leq x \leq 4$ або $x \in [2; 4]$.

Приклад 2. Знайти область збіжності ряду $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+2)^n}{(2n+1)3^n}$.

Розв'язання. Маємо $u_n(x) = \frac{(x+2)^n}{(2n+1)3^n}$; $u_{n+1}(x) = \frac{(x+2)^{n+1}}{(2n+3)3^{n+1}}$;

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)} \right| &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{(x+2)^{n+1} \cdot (2n+1)3^n}{(2n+3)3^{n+1} \cdot (x+2)^n} \right| = \frac{|x+2|}{3} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n+1}{2n+3} = \\ &= \frac{|x+2|}{3} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2 + \frac{1}{n}}{2 + \frac{3}{n}} = \frac{|x+2|}{3}. \end{aligned}$$

Далі, $\frac{|x+2|}{3} < 1$; $|x+2| < 3$; $-3 < x+2 < 3$; $-5 < x < 1$.

Досліджуємо даний ряд на кінцях проміжку:

а) при $x=1$ отримаємо ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n+1}$. Порівняємо цей ряд з гармонічним

рядом $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$, який розбігається. Маємо

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 \cdot n}{(2n+1) \cdot 1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2 + \frac{1}{n}} = \frac{1}{2} \quad \left(\begin{array}{l} \neq 0 \\ \neq \infty \end{array} \right).$$

Отже, при $x=1$ ряд розбігається.

б) при $x=-5$ отримаємо знакопозначений ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-3)^n}{(2n+1)3^n} =$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot 3^n}{(2n+1)3^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}.$$

В пункті а) доведено, що відповідний ряд з абсолютних величин розбіжний. Тому застосуємо ознаку Лейбніца:

$$1) \quad \frac{1}{2n+1} > \frac{1}{2n+3} \quad - \text{виконується};$$

$$2) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2n+1} = 0 \quad - \text{виконується}.$$

Таким чином, ряд збігається умовно, а $x=-5$ точка умовної збіжності ряду.

Відповідь: $-5 \leq x < 1$ або $x \in [-5; 1)$.

Приклад 3. Знайти область збіжності ряду $\sum_{n=1}^{\infty} e^{-n^2 x}$.

Розв'язання. Скористаємось радикальною ознакою Коші: $u_n(x) = e^{-n^2 x}$;

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|u_n(x)|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{e^{-n^2 x}} = \lim_{n \rightarrow \infty} e^{-nx} = \begin{cases} 0, & \text{якщо } x > 0. \text{ Ряд збігається.} \\ \infty, & \text{якщо } x < 0. \text{ Ряд розбігається.} \end{cases}$$

При $x=0$ маємо такий ряд: $1+1+\dots+1+\dots$. Він розбіжний за достатньою ознакою розбіжності ряду, бо $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} 1 = 1 \neq 0$.

Відповідь: $x > 0$ або $x \in (0; +\infty)$.

Приклад 4. Знайти область збіжності ряду $\sum_{n=1}^{\infty} \sin \frac{x}{2^n}$.

Розв'язання. Застосовуємо ознаку Даламбера:

$$u_n(x) = \sin \frac{x}{2^n}; \quad u_{n+1}(x) = \sin \frac{x}{2^{n+1}};$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{\sin \frac{x}{2^{n+1}}}{\sin \frac{x}{2^n}} \right| = \left(\text{відомо, що} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{x \cdot 2^n}{2^{n+1} \cdot x} \right| = \frac{1}{2} < 1$$

Отже, даний ряд збігається при всіх значеннях x , тобто при $x \in (-\infty; \infty)$.

Відповідь: $x \in (-\infty; \infty)$.

2.2. Рівномірна збіжність функціонального ряду

Означення. Функціональний ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) = u_1(x) + u_2(x) + \dots + u_n(x) + \dots \quad (1)$$

називається *рівномірно збіжним* на деякому проміжку, якщо, яким би не було $\varepsilon > 0$, існує таке число N з множини натуральних чисел, що для кожного $n > N$ та для всіх x з даного проміжку виконується нерівність

$$|R_n(x)| < \varepsilon,$$

де $R_n(x)$ – залишок ряду.

Теорема (ознака Вейєрштрасса рівномірної збіжності функціонального ряду).

Функціональний ряд (1) збігається абсолютно і рівномірно на деякому проміжку, якщо існує збіжний числовий ряд з додатними членами

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n + \dots \quad (2)$$

такий, що для всіх x з даного проміжку мають місце нерівності

$$|u_n(x)| < a_n, \quad n = 1, 2, \dots \quad (3)$$

В цьому випадку ряд (2) називається *мажорантним*, а ряд (1) – *мажоровним*.

Властивості рівномірно збіжних функціональних рядів

Теорема 1. (Про неперервність суми рівномірно збіжного функціонального ряду).

Сумою рівномірно збіжного на відрізку $[a,b]$ функціонального ряду, члени якого неперервні на $[a,b]$, є функція, неперервна на цьому відрізку.

Теорема 2. (Про почленне диференціювання функціонального ряду).

Якщо члени збіжного ряду (1) мають неперервні на $[a,b]$ похідні, а ряд

$\sum_{n=1}^{\infty} u'_n(x)$ збігається рівномірно на відрізку $[a,b]$, то на цьому відрізку ряд

(1) можна почленно диференціювати, тобто

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) \right)' = \sum_{n=1}^{\infty} u'_n(x), \quad x \in [a,b].$$

Теорема 3. (Про почленне інтегрування функціонального ряду).

Якщо члени ряду (1) неперервні на відрізку $[a,b]$ і цей ряд збігається рівномірно на $[a,b]$, то його можна почленно інтегрувати на цьому відрізку, тобто

$$\int_a^b \left(\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) \right) dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int_a^b u_n(x) dx, \quad x \in [a,b].$$

Приклад 5. Для даного функціонального ряду побудувати мажорантний ряд та довести рівномірну збіжність на заданому відрізку:

$$\text{а) } \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sqrt{x+1} \cos nx}{\sqrt[3]{n^5+1}}, \quad [0,2]; \quad \text{б) } \sum_{n=1}^{\infty} x^{n!}, \quad \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right];$$

$$в) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!(x+3)^n}{n^n}, \quad [-5, -1].$$

Розв'язання.

а) Позначимо $u_n(x) = \frac{\sqrt{x+1} \cos nx}{\sqrt[3]{n^5+1}}$. Тоді, оскільки $0 \leq x \leq 2$, а для

довільного x : $|\cos nx| \leq 1$, то

$$|u_n(x)| \leq \frac{\sqrt{3}}{\sqrt[3]{n^5+1}} < \frac{\sqrt{3}}{\sqrt[3]{n^5}} = \frac{\sqrt{3}}{n^{\frac{5}{3}}} = a_n$$

і в якості мажорантного ряду оберемо ряд $\sqrt{3} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\frac{5}{3}}}$, який є

знакододатним і збігається, бо $p = \frac{5}{3} > 1$. Тоді за ознакою Вейерштрасса заданий за умовою ряд рівномірно збігається на відріжку $[0, 2]$.

б) Позначимо $u_n(x) = x^{n!}$. Тоді, оскільки $|x| \leq \frac{1}{2}$, то $|u_n(x)| \leq \frac{1}{2^{n!}} = a_n$.

Розглянемо знакододатний ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ і доведемо, що він збіжний, тобто, він є мажорантним рядом заданого функціонального ряду. Дійсно, застосовуючи ознаку Даламбера, одержимо:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^{n!}}{2^{(n+1)!}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^{n!}}{2^{n! \cdot (n+1)}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2^{n! \cdot n}} = 0 < 1.$$

Отже, ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ збігається за ознакою Даламбера, і тоді заданий за умовою

функціональний ряд збігається рівномірно на проміжку $\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$.

в) Позначимо $u_n(x) = \frac{n!(x+3)^n}{n^n}$. Оскільки $-5 \leq x \leq -1$, то $|x+3| \leq 2$ і

$$\text{тоді } |u_n(x)| = \frac{n! \cdot |x+3|^n}{n^n} \leq \frac{n! \cdot 2^n}{n^n} = a_n.$$

Розглянемо знакододатний ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!2^n}{n^n}$ та дослідимо його на

збіжність за ознакою Даламбера:

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)!2^{n+1} \cdot n^n}{(n+1)^{n+1} \cdot n!2^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n!(n+1)2^n \cdot 2 \cdot n^n}{(n+1)^n (n+1)n!2^n} = \\ &= 2 \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\left(\frac{n+1}{n}\right)^n} = 2 \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n} = \frac{2}{e} < 1. \end{aligned}$$

Отже, ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ збігається. Тому функціональний ряд, що заданий за умовою, рівномірно збігається на проміжку $[-5, -1]$.

Приклад 6. Знайти суму ряду:

$$\text{а)} \quad \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+2} \right) x^{n+2}; \quad \text{б)} \quad \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{\cos^{n+1} x}{n(n+1)};$$

$$\text{в)} \quad \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{\operatorname{tg}^n x}{n(n+1)}.$$

Розв'язання.

а) Перепишемо ряд, який заданий за умовою, у вигляді

$$2 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^{n+2}}{n(n+2)}$$

та знайдемо його область збіжності. Для цього до ряду $2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|x|^{n+2}}{n(n+2)}$, який

складений з модулів його членів, застосуємо ознаку Даламбера:

$$|u_n(x)| = \frac{|x|^{n+2}}{n(n+2)}; \quad |u_{n+1}(x)| = \frac{|x|^{n+3}}{(n+1)(n+3)};$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|x|^{n+3} \cdot n(n+2)}{(n+1)(n+3) \cdot |x|^{n+2}} = |x| \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + \frac{2}{n}}{\left(1 + \frac{1}{n}\right)\left(1 + \frac{3}{n}\right)} = |x|,$$

звідки одержимо інтервал збіжності $x \in (-1, 1)$. Оскільки заданий за умовою ряд є абсолютно збіжним при $x = \pm 1$, то область збіжності цього ряду – це відрізок $[-1, 1]$. Враховуючи, що ряди $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n}$ та $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n x^{n-1}$ є рівномірно збіжними на кожному відрізку вигляду $-1 + \omega \leq x \leq 1 - \omega$, де ω – будь-яке додатне число, менше за 1 (це впливає з ознаки Вейерштрасса), то позначимо шукану суму:

$$S(x) = 2 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^{n+2}}{n(n+2)}, \quad x \in (-1, 1),$$

та застосуємо до цього ряду теорему про почленне диференціювання. Одержимо:

$$S'(x) = 2 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^{n+1}}{n}$$

або $S'(x) = 2x \cdot S_1(x)$, де $S_1(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n}$.

Оскільки

$$S_1'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} x^{n-1}, \quad x \in (-1, 1),$$

то

$$S_1'(x) = \frac{1}{1+x}; \quad S_1(x) = \int_0^x \frac{dt}{1+t} = \ln(1+x), \quad x \in (-1, 1).$$

Тоді $S'(x) = 2x \ln(1+x)$, $x \in (-1, 1) \Rightarrow$

$$\begin{aligned} \Rightarrow S(x) &= 2 \int_0^x t \ln(1+t) dt = \left| \begin{array}{l} u = \ln(1+t) \Rightarrow du = \frac{dt}{t+1}; \\ dv = t dt \Rightarrow v = \frac{t^2}{2}; \end{array} \right| = \\ &= 2 \left(\frac{t^2}{2} \ln(1+t) \Big|_0^x - \frac{1}{2} \int_0^x \frac{(t^2-1)+1}{t+1} dt \right) = 2 \left(\frac{x^2}{2} \ln(1+x) - \frac{x^2}{4} + \frac{x}{2} - \frac{1}{2} \ln(1+x) \right) = \\ &= (x^2 - 1) \ln(1+x) - \frac{x^2}{2} + x, \quad x \in (-1, 1). \end{aligned}$$

б) Для знаходження області збіжності ряду, розглянемо ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|\cos x|^{n+1}}{n(n+1)}$

та застосуємо до цього ряду ознаку Даламбера:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|\cos x|^{n+2} \cdot n(n+1)}{(n+1)(n+2) \cdot |\cos x|^{n+1}} = |\cos x| \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + \frac{1}{n}}{\left(1 + \frac{1}{n}\right) \left(1 + \frac{2}{n}\right)} = |\cos x|.$$

Нерівність $|\cos x| < 1$ виконується для всіх $x \neq k\pi$, $k \in \mathbb{N}$, але при $x = k\pi$, $k \in \mathbb{N}$, заданий функціональний ряд збігається. Тому областю збіжності цього ряду є уся числова вісь. Але для подальшого застосування теореми про почленне диференціювання, будемо вважати, що $x \neq k\pi$, $k \in \mathbb{N}$.

Позначимо шукану суму:
$$S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{\cos^{n+1} x}{n(n+1)}.$$

Тоді $S'(x) = \sin x \cdot S_1(x)$, де
$$S_1(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\cos^n x}{n};$$

$$S_1'(x) = \sin x \cdot S_2(x); \text{ де } S_2(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \cos^{n-1} x.$$

Оскільки $S_2(x) = \frac{1}{1 + \cos x}$, то

$$S_1(x) = \int_0^x \frac{\sin t}{1 + \cos t} dt = - \int_0^x \frac{d(\cos t)}{1 + \cos t} = -\ln(1 + \cos x) + \ln 2.$$

Тоді $S'(x) = -\sin x \cdot \ln(1 + \cos x) + \ln 2 \cdot (\sin x)$;

$$\begin{aligned} S(x) &= - \int_0^x \sin t \cdot \ln(1 + \cos t) dt + \ln 2 \int_0^x \sin t dt = \\ &= \int_0^x \ln(1 + \cos t) d(1 + \cos t) - \ln 2 \cdot (\cos x - 1) = \\ &= \left((1 + \cos t) \ln(1 + \cos t) - (1 + \cos t) \right) \Big|_0^x - \ln 2 \cdot (\cos x - 1) = \\ &= (1 + \cos x) \ln(1 + \cos x) - 1 - \cos x - 2 \ln 2 + 2 - \ln 2 \cdot (\cos x) + \ln 2 = \\ &= (1 + \cos x) \ln(1 + \cos x) - (1 + \ln 2) \cos x + 1 - \ln 2, \quad x \neq k\pi, \quad k \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

в) Для знаходження області збіжності даного функціонального ряду, запишемо ряд із модулів членів заданого ряду

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|\operatorname{tg} x|^n}{n(n+1)}$$

та скористаємося ознакою Даламбера. Одержимо

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|\operatorname{tg} x|^{n+1} \cdot n(n+1)}{(n+1)(n+2) \cdot |\operatorname{tg} x|^n} = |\operatorname{tg} x| < 1,$$

тобто, $-\frac{\pi}{4} + k\pi < x < \frac{\pi}{4} + k\pi, \quad k \in \mathbb{N}$. Оскільки при $x = \pm \frac{\pi}{4} + k\pi, \quad k \in \mathbb{N}$,

ряд збігається, то область збіжності цього ряду має вигляд:

$$D = \left\{ x \mid -\frac{\pi}{4} + k\pi \leq x \leq \frac{\pi}{4} + k\pi \right\}, \quad k \in \mathbb{N}.$$

Але надалі для застосування до заданого за умовою ряду теореми про почленне диференціювання, ми будемо розглядати лише ті значення x з множини D , які задовольняють умову $x \neq \pm \frac{\pi}{4} + k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$.

Позначимо шукану суму

$$S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{\operatorname{tg}^n x}{n(n+1)}$$

та перепишемо цей ряд у вигляді

$$S(x) = \frac{1}{\operatorname{tg} x} S_1(x), \quad \text{де} \quad S_1(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{\operatorname{tg}^{n+1} x}{n(n+1)}.$$

Тоді

$$S_1'(x) = \frac{1}{\cos^2 x} S_2(x), \quad \text{де} \quad S_2(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{\operatorname{tg}^n x}{n}.$$

Далі,

$$S_2'(x) = \frac{1}{\cos^2 x} S_3(x), \quad \text{де} \quad S_3(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \operatorname{tg}^{n-1} x.$$

Оскільки для тих значень x з множини D , які задовольняють умову

$x \neq \pm \frac{\pi}{4} + k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$, виконується умова $|\operatorname{tg} x| < 1$, то

$$S_3(x) = \frac{1}{1 + \operatorname{tg} x}, \quad \text{а} \quad S_2'(x) = \frac{1}{\cos^2 x} \cdot \frac{1}{1 + \operatorname{tg} x}.$$

Тому
$$S_2(x) = \int_0^x \frac{1}{\cos^2 t} \cdot \frac{1}{1 + \operatorname{tg} t} dt = \int_0^x \frac{d(\operatorname{tg} t + 1)}{1 + \operatorname{tg} t} = \ln(\operatorname{tg} x + 1).$$

Звідси
$$S_1'(x) = \frac{1}{\cos^2 x} \ln(\operatorname{tg} x + 1);$$

$$S_1(x) = \int_0^x \frac{1}{\cos^2 t} \ln(\operatorname{tg} t + 1) dt = \int_0^x \ln(\operatorname{tg} t + 1) d(\operatorname{tg} t + 1) =$$

$$\begin{aligned}
&= (\operatorname{tg} t + 1) \cdot (\ln(\operatorname{tg} t + 1) - 1) \Big|_0^x = (\operatorname{tg} x + 1)(\ln(\operatorname{tg} x + 1) - 1) + 1 = \\
&= (\operatorname{tg} x + 1) \ln(\operatorname{tg} x + 1) - \operatorname{tg} x.
\end{aligned}$$

I, нарешті, одержуємо $S(x) = \frac{\operatorname{tg} x + 1}{\operatorname{tg} x} \ln(\operatorname{tg} x + 1) - 1$.

Приклад 7. Знайти суму ряду:

$$\text{а) } \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n n x^{2n+1}; \quad \text{б) } \sum_{n=0}^{\infty} (n^2 + 3n + 3) x^{n+1}.$$

Розв'язання.

а) Знайдемо спочатку інтервал збіжності заданого ряду, для цього застосуємо ознаку Даламбера:

$$\begin{aligned}
u_n(x) &= (-1)^n n x^{2n+1}; \quad u_{n+1}(x) = (-1)^{n+1} (n+1) x^{2n+3}; \\
\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)} \right| &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{(-1)^{n+1} (n+1) x^{2n+3}}{(-1)^n n x^{2n+1}} \right| = x^2 \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{n} = x^2 \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n} \right) = x^2 < 1; \\
x^2 < 1 &\Rightarrow |x| < 1 \Rightarrow x \in (-1, 1),
\end{aligned}$$

звідки одержимо інтервал збіжності $x \in (-1, 1)$. Оскільки даний ряд є розбіжним при $x = \pm 1$, то область збіжності цього ряду – це інтервал $(-1, 1)$. Відомо, що степеневий ряд всередині його проміжку збіжності можна почленно диференціювати та інтегрувати, при цьому отримані в результаті диференціювання та інтегрування ряди будуть мати той же радіус збіжності, що і вихідний ряд.

Позначимо шукану суму $S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n n x^{2n+1}$, $x \in (-1, 1)$, та

перепишемо даний ряд у вигляді

$$S(x) = \frac{1}{2} x^2 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n 2n x^{2n-1} = \frac{1}{2} x^2 S_1(x), \quad \text{де } S_1(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n 2n x^{2n-1}.$$

Інтегруючи ряд $S_1(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n 2n x^{2n-1}$ по x (за умови, що $|x| < 1$),

одержимо

$$\int_0^x S_1(t) dt = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n 2n \int_0^x t^{2n-1} dt = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n 2n \frac{x^{2n}}{2n} = \sum_{n=1}^{\infty} (-x^2)^n = \frac{-x^2}{1 - (-x^2)} = -\frac{x^2}{1 + x^2},$$

або $\int_0^x S_1(t) dt = -\frac{x^2}{1 + x^2}, \quad x \in (-1, 1).$

Тепер диференціюючи останню рівність, отримаємо

$$\left(\int_0^x S_1(t) dt \right)' = \left(-\frac{x^2}{1 + x^2} \right)' \Rightarrow S_1(x) = -\frac{2x}{(1 + x^2)^2}, \quad x \in (-1, 1).$$

Отже, отримаємо $S(x) = \frac{1}{2} x^2 S_1(x) = -\frac{1}{2} x^2 \frac{2x}{(1 + x^2)^2} = -\frac{x^3}{(1 + x^2)^2}, \quad x \in (-1, 1).$

б) Спочатку знайдемо інтервал збіжності даного ряду. Для цього скористаємося ознакою Даламбера:

$$u_n(x) = (n^2 + 3n + 3)x^{n+1}; \quad u_{n+1}(x) = ((n+1)^2 + 3(n+1) + 3)x^{n+2};$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{((n+1)^2 + 3(n+1) + 3)x^{n+2}}{(n^2 + 3n + 3)x^{n+1}} \right| = |x| \cdot 1 = |x| < 1 \Rightarrow |x| < 1,$$

звідки одержимо інтервал збіжності $x \in (-1, 1)$. Оскільки даний ряд є розбіжним при $x = \pm 1$, то область збіжності цього ряду – це інтервал $(-1, 1)$.

Перетворимо цей ряд:

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n^2 + 3n + 3)x^{n+1} = \sum_{n=0}^{\infty} ((n+2)^2 - (n+1))x^{n+1} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+2)^2 x^{n+1} - x \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)x^n.$$

Отримані ряди також збігаються в інтервалі $(-1, 1)$. Позначимо ряди через

$$S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (n^2 + 3n + 3)x^{n+1}, \quad S_1(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (n+2)^2 x^{n+1} \quad \text{та} \quad S_2(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)x^n,$$

тоді $S(x) = S_1(x) - xS_2(x)$, $x \in (-1,1)$.

Почленно інтегруючи два останні ряди по x (за умови, що $|x| < 1$), одержимо

$$\int_0^x S_1(t)dt = \sum_{n=0}^{\infty} (n+2)^2 \int_0^x t^{n+1} dt = \sum_{n=0}^{\infty} (n+2)x^{n+2} = x \sum_{n=0}^{\infty} (n+2)x^{n+1} = xS_3(x),$$

де $S_3(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (n+2)x^{n+1}$, $x \in (-1,1)$;

$$\int_0^x S_2(t)dt = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) \int_0^x t^n dt = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) \frac{x^{n+1}}{n+1} = \sum_{n=0}^{\infty} x^{n+1} = \frac{x}{1-x}, \quad x \in (-1,1).$$

Диференціюючи останню рівність, отримаємо

$$\left(\int_0^x S_2(t)dt \right)'_x = \left(\frac{x}{1-x} \right)'_x \Rightarrow S_2(x) = \frac{1}{(1-x)^2}, \quad x \in (-1,1).$$

Далі, інтегруючи $S_3(x)$ по x , маємо

$$\int_0^x S_3(t)dt = \sum_{n=0}^{\infty} (n+2) \int_0^x t^{n+1} dt = \sum_{n=0}^{\infty} x^{n+2} = x^2 \cdot \frac{1}{1-x}, \quad x \in (-1,1),$$

а потім, диференціюючи отриману рівність по x , одержимо

$$S_3(x) = \frac{2x - x^2}{(1-x)^2}, \quad x \in (-1,1).$$

Отже, маємо $\int_0^x S_1(t)dt = x \frac{2x - x^2}{(1-x)^2}$, звідки $\left(\int_0^x S_1(t)dt \right)'_x = \left(\frac{2x^2 - x^3}{(1-x)^2} \right)'_x$

$$\Rightarrow S_1(x) = \frac{x^3 - 3x^2 + 4x}{(1-x)^3};$$

$$S(x) = \frac{x^3 - 3x^2 + 4x}{(1-x)^3} - \frac{x}{(1-x)^2}, \quad x \in (-1,1).$$