ЛЕКЦІЯ.
ЙМОВІРНІСТЬ

Поняття ймовірності для статистики є ключовим, оскільки на його основі будуються теоретичні підстави для отримання статистичних висновків при вивченні явищ масового характеру. У цій лекції познайомимося з поняттям випадкової події, дамо кілька визначень ймовірності і обговоримо їх відмінності, а також вивчимо правило додавання і множення ймовірностей. Завершать лекцію дві часто використовувані при знаходженні ймовірності формули – формула повної ймовірності та формула Байєса.

4.1. Визначення ймовірності

Життям править випадок. Це відомий філософський вислів є результатом роздумів багатьох поколінь над випадковими подіями і явищами, які оточують нас всюди. Передбачати випадкові події, управляти ними до сих пір залишається для людства лише мрією. Чи піде завтра дощ, як виграти в лотерею, яку оцінку поставить викладач – таких питань безліч і всі вони до пори до часу залишаються без відповіді.

Ці питання змушували людей спостерігати, що відбувається, і поступово накопичувати знання про випадкові події. Так поступово формувалися теоретичні уявлення про випадковість і ймовірності. Довгий час теорія ймовірності розвивалася вченими на основі спостережень за азартними іграми: грою в кістки, картковими іграми, рулеткою. До сих пір при вивченні елементарних основ ймовірності ці ігри дають класичні навчальні приклади.

Оскільки теорія ймовірності є давньою наукою, поняття ймовірності не є простим і однозначним. Існують одночасно суб’єктивний і об’єктивний підходи до визначення ймовірності. Суб’єктивність може бути знижена, перш за все, пошуком закономірностей серед явищ і подій, що мають масовий характер. Найважливішим відкриттям вчених в теорії ймовірності є закон великих чисел, який показав, що масові явища мають дивовижну властивість стійкості, яке проявляється при великій кількості випробувань. При цьому конкретні особливості окремого випадкового явища майже не позначаються на результатах великої кількості таких явищ.

Для початку розглянемо математичну модель, яка використовується для класичного визначення ймовірності. Вона заснована на понятті простору елементарних наслідків. Ця модель виявилася придатною для опису багатьох випадкових подій і явищ.

Випадкові події

Емпіричні спостереження, тестування, проведення експерименту можна визначити загальним терміном випробування. Для нас не важливо, чи організоване випробування спеціально – у вигляді експерименту з певною метою, або воно стало результатом збігу зовнішніх обставин або наслідком причин, які нам не відомі. Ми в будь-якому випадку будемо говорити про випробування. Далі, в результаті випробування ми можемо отримати деяку кількість наслідків або фіналів.

Якщо випробуванням вважати випадкове падіння склянки зі столу, то фіналів два – розіб’ється або не розіб’ється. Можна додати ще один: стакан не впаде зі столу. Тоді вже три фінали. А скільки їх всього? А, може, варто розглядати тільки два перших? На самому початку вивчення буває важко відшукати рамки випробування і виділити всі можливі фінали. В кінцевому рахунку, це пов’язано з моделлю, яку обирає дослідник залежно від мети дослідження. Нам належить навчитися обирати моделі для початку на простих прикладах. У будь-якому випадку, ми будемо вважати, що різні фінали не можуть відбутися одночасно.

Тепер з усіх можливих фіналів навчимося виділяти елементарні. Фінал «стакан впаде зі столу» не є елементарним, оскільки в нашому аналізі в нього входить цілих два інших: «стакан впаде зі столу і розіб’ється» і «стакан впаде зі столу і не розіб’ється».

Малюнок 4–1. Випадкова подія

Таблиця 4–1. Приклади випробувань, елементарних фіналів, подій

Випробування	Приклади подій	Простір елементарних фіналів
Підкидання одного грального кубика	Випадання числа 5 (елементарний результат) Випадання парного числа (ймовірна подія) Випадання числа 7 (неймовірна подія)	1, 2, 3, 4, 5, 6
Підкидання двох гральних кубиків	Випадання в сумі 7	1-1, 1-2, ..., 6-6

Фінал «стакан не впаде зі столу» є елементарним, оскільки не може бути розділений на інші наслідки.

Елементарний фінал – наслідок випробування, який не може бути розділений на кілька інших наслідків.

Підкидаємо гральний кубик. Прикладом елементарного фіналу є випадання одиниці. Прикладом фіналу, який не є елементарним, може служити випадіння парного числа. Цей фінал включає випадання двійки, четвірки або шістки. А всього елементарних фіналів шість. Ми будемо говорити, що вони утворюють простір елементарних фіналів.

Простір елементарних фіналів включає всі елементарні наслідки, які можуть відбутися в результаті випробування.

У просторі елементарних фіналів можна виділити підмножини, що складаються з одного або декількох фіналів. У цьому випадку говорять про випадкову подію.

Випадкова подія – деяка підмножина простору елементарних фіналів випробування.

Деякі приклади випробувань, випадкових подій і елементарних фіналів наведені в таблиці 4-1. При підкиданні грального кубика випадання числа сім є неймовірною подією. Воно не включає жодного елементарного фіналу.

Вірогідною назвемо подію, що настає при будь-якому фіналі випробування.

Приклад вірогідної події: при підкиданні монети випаде Орел або Решка. Ситуації типу «Встане на ребро» або «Повисне в повітрі» вважаються неможливими подіями.

Неможливою назвемо подію, що не наступає ні при одному фіналі випробування.

Позначимо очікувану нами подію А. Елементарні фінали, що утворюють подію А, будемо називати *сприятливими*. Це зовсім не означає, що він (фінал) чимось краще за інших. Просто якщо ми очікуємо подію А, то поява будь-якого елементарного фіналу, що утворює подію А, для нас є сприятливою.

Рівноможливими назвемо події, для яких є підстави вважати, що жодна з них не є більш можливою, ніж інші.

Поняття рівноможливих подій є принципово важливим для класичного визначення ймовірності.

Алгебра подій

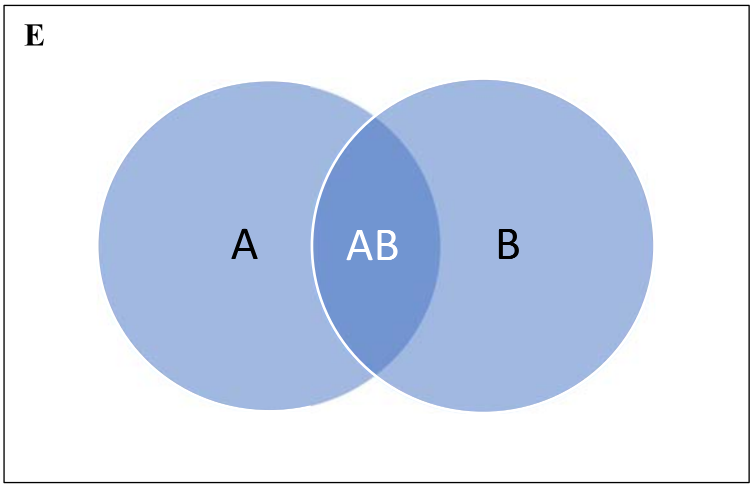
Розгляд двох і більше подій призводить до необхідності відповідати на питання, чи можуть вони відбутися одночасно, наскільки ймовірним є те, що відбудеться одна з них або відбудуться обидві. Ці питання вимагають обговорення якоїсь загальної моделі, так званої алгебри подій. У цій алгебрі, як і алгебрі чисел, існують операції додавання і множення подій. В результаті ці операції виявляться важливими для знаходження ймовірностей, що відносяться до двох і кількох подій.

Сумою А+В випадкових подій А і В називається подія, суть якої полягає у тому, що сталася хоча б одна з них.

Сума А+В означає, що відбулася подія А чи подія В, не виключаючи того, що вони могли статися обидві. Сума подій є їх об’єднанням. Будь-який елементарний фінал, який входить в подію А чи подію В, входить також і в їх суму А+В.

Добутком АВ подій А і В називається подія, суть якої полягає у тому, що відбулися обидві події.

Добуток АВ означає, що сталися і подія А, і подія В одночасно. Добуток подій є їх перетином. В алгебрі подій крім суми і добутку також визначені операції віднімання і доповнення.



Малюнок 4–2. Спільні події

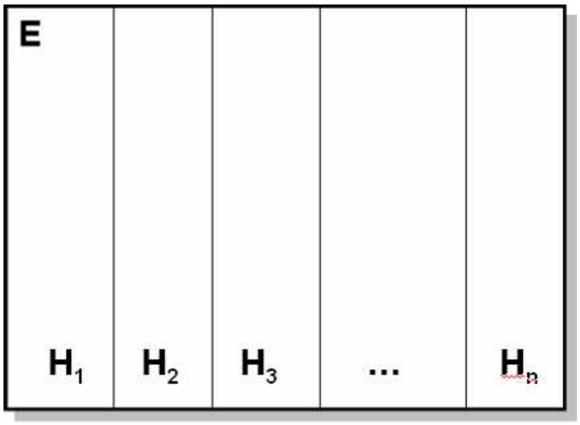
Для алгебри подій зручно використовувати графічне представлення, так звану діаграму Венна. Зовнішній прямокутник позначає весь простір елементарних фіналів і позначається Е. Фігура А позначає подію А як підмножину простору елементарних фіналів. Площа прямокутника теоретично вважається дорівнює одиниці, а площа фігури А – ймовірності події А.

Події А і В називаються **несумісними**, якщо вони не можуть відбутися одночасно. В іншому випадку, ці події сумісні.

На малюнку 4–2 зображені спільні події А і В. Їх перетин становить подію АВ.

Події Н1, Н2, … , Н*n* утворюють **повну групу подій**, якщо вони попарно несумісні, а їх сума є достовірною подією.

Одним з графічних зображень повної групи подій є зображення, представлене на малюнку 4–3.



Малюнок 4–3. Повна група подій

Повна група подій, простір елементарних фіналів і достовірна подія є в деякому сенсі синонімами, оскільки позначають і той же об’єкт. Проте, ми не зможемо відмовитися ні від одного з цих термінів, оскільки кожен з них використовується в своєму контексті. Зокрема, простір елементарних фіналів потрібен для визначення поняття ймовірності.

Класичне визначення ймовірності

Отже, випадкова подія є деякою підмножиною простору елементарних фіналів. Класичне визначення ймовірності ґрунтується на моделі, в якій всі елементарні результати рівноможливі. Тільки в цьому випадку ймовірність випадкового події А можна визначити як частку сприятливих фіналів (що утворюють подію А) до загальної кількості елементарних фіналів.

Ймовірністю події А назвемо відношення кількості сприятливих фіналів до загальної кількості елементарних фіналів (класичне визначення ймовірності).

Запишемо ймовірність події А за допомогою формули:

$$P(A) = \frac{m}{n}$$

де m – кількість елементарних фіналів, що становлять подію А, n – загальна кількість елементарних фіналів.

Назвемо декілька важливих властивостей ймовірності випадкової події.

Властивість 1. Ймовірність достовірної події дорівнює одиниці. Це означає, що подія, яка має ймовірність одиницю, настане в будь-якому випадку. Згадаймо подію «випаде Орел або Решка, але що-небудь точно випаде, якщо монета буде таки підкинута».

Малюнок 4–4. Ймовірність вимірюється за шкалою від 0 до 1

Малюнок 4–5. – Пане професоре! Я підкинув монету 100 раз, але не записав результати експерименту ... – Нічого, наступного разу підкидайте замість монети курячі яйця!

Властивість 2. Ймовірність неможливого події дорівнює нулю. Події «Монета після падіння встане на ребро» або «Повисне в повітрі» мають нульову ймовірність, оскільки є неможливими.

Властивість 3. Імовірність будь-якої події не може бути менше нуля і більше одиниці: $0 < p(A) < 1$.

Ймовірність виступає свого роду мірою для випадкових подій. Кожній випадковій події ставиться у відповідність одне єдине число від 0 до 1 включно, яке називається ймовірністю цієї події. У одних подій ймовірність більше, ніж у інших. Одна з цілей навчання – навчитися правильно знаходити ймовірності.

Вирішимо задачу. Якщо підкинути дві монети, то з якою ймовірністю випаде хоча б один орел? Починаємо міркувати. Можливі такі фінали: на обох монетах орел, на одній орел, а на іншій решка, і, нарешті, на обох решка – всього три елементарних фінали. Сприятливими для нас є перший і другий. Отже, ймовірність випадання хоча б одного орла дорівнює 2/3. Правильно? Ні. Допущена серйозна помилка. Один з випадків не є рівноможливим з іншими. Випадання орла на одній монеті і решки на іншій може статися двома способами. Це означає, що елементарних фіналів всього чотири і ймовірність дорівнює 3/4, оскільки три результати є сприятливими.

Яка ймовірність при киданні двох гральних кубиків отримати в сумі п’ять очок? Всього є 6х6 = 36 елементарних фіналів, оскільки кожна кістка має 6 граней. З цих 36 випадків сприятливими є поєднання 1 + 4, 2 + 3, 3 + 2, 4 + 1, всього чотири. Ймовірність дорівнює 4/36 або 1/9.

Класичне визначення ймовірності має безсумнівні переваги – простота і доступність. Недоліком є неможливість його застосування, якщо виділення рівноможливих елементарних фіналів не можливе. Спробуйте застосувати класичне визначення до ситуації зі склянкою, що падає зі столу. Які наслідки рівноможливі? Таких немає. У цих випадках доводиться використовувати інші, більш придатні визначення поняття ймовірності.

Статистичне визначення ймовірності

Статистичний спосіб визначення ймовірності полягає в тому, що ми вивчаємо частоту появи події А в серії випробувань і на цій основі отримуємо її ймовірність. При збільшенні кількості дослідів частота все більш втрачає свій випадковий характер, набуває властивості стійкості, наближаючись з незначними коливаннями до деякої постійної величини. Це означає, що для деяких подій послідовність частот має межу, яка називається статистичною ймовірністю.

Імовірність події А – гранична відносна частота появи події А при проведенні серії випробувань, при необмеженому збільшенні їх числа (статистичне визначення ймовірності).

$$P(A) = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{s}{n}\right)$$

де s – кількість випробувань, в яких відбулася подія А, n – загальна кількість випробувань.

Статистичне визначення добре підходить до перевірки «правила бутерброда». Правило стверджує, по суті, що ймовірність падіння бутерброда маслом вниз дорівнює одиниці. Ми повинні провести серію з великого числа випробувань, щоб зрозуміти, чи прямує до одиниці відносна частота падіння бутерброда маслом вниз.

Відзначимо, що далеко не всі події мають статистичну стійкість. Крім цього, навряд чи нам вдасться організувати серію експериментів, щоб зрозуміти ймовірність події «Завтра піде дощ». Тим самим, ще більше звужується коло подій і явищ, для яких вдається обчислити їх ймовірність. Залишається єдина соломинка – суб'єктивне визначення ймовірності.

Суб'єктивне визначення ймовірності

Якщо об'єктивний підхід до визначення ймовірності неможливий, єдиний шлях – суб'єктивна оцінка. Суб'єктивна ймовірність заснована на індивідуальній чи колективній думці людей, які виступають в ролі експертів. Вони складають свої оцінки ймовірності події на основі зовнішньої, можливо, неточною, інформації, а також свого досвіду і інтуїції.

Суб'єктивна ймовірність відображає ступінь впевненості індивіда або групи в тому, що дана подія відбудеться.

Крім перерахованих визначень поняття ймовірності є і інші. В математиці використовується так зване аксіоматичне визначення ймовірності, яке було запропоновано академіком О.М. Колмогоровим і є до теперішнього часу єдиним строгим і універсальним визначенням, придатним для побудови і розвитку теорії ймовірностей. Ми не наводимо цього визначення в нашому курсі.

Формули комбінаторики

Для обчислення ймовірності іноді доводиться використовувати кілька важливих формул з комбінаторики. Комбінаторика є частиною математики, яка займається методами вирішення завдань, пов'язаних з перерахуванням і підрахунком. В комбінаториці є формули для визначення числа підмножин заданої множини, підрахунку числа перестановок, розміщень і сполучень.

Принцип добутку. Якщо одна множина складається з n різних елементів, інше з m різних елементів, і ці множини не перетинаються, то скільки різних пар можна утворити з елементів цих множин, якщо перший елемент береться з першої множини, а другий - з другої? Згідно з принципом добутку кількість пар дорівнюватиме $n*m$.

Перестановки. Скількома способами n різних об'єктів можуть бути розташовані на одній лінії?

Наприклад, скількома способами 6 осіб можуть сісти на шість стільців? Щоб підрахувати, можна міркувати таким чином. Для першої існує 6 можливостей, для другої, після того як перша вже обрала, залишиться всього 5, для наступної – 4 і так далі. Остання, шоста, після п'ятьох матиме лише одну можливість. Отже, 6*5*4*3*2*1=720. Будемо використовувати позначення 6! для запису таких добутків (вимовляється: шість факторіал). У загальному вигляді кількість перестановок з n елементів позначається P_n і обчислюється за формулою:

$$P_n = n!$$

Розміщення. Скількома способами з n різних об'єктів можна вибрати впорядковану підмножину з m об'єктів? Впорядкованою вважається множина, в якій визначено порядок елементів. Об'єкти після вибору не повертаються і повторно не можуть бути обрані.

Наприклад, скількома способами з 6 осіб можна вибрати чотирьох і розсадити на чотири стільці? Спосіб підрахунку аналогічний попередньому. На перший стілець сяде будь-яка з шести, на наступний – вже з п'яти. Всього чотири стільці, тому: 6*5*4*3=360. У загальному вигляді, кількість можливих розміщень з n елементів по m позначається A_n^m і розраховується за формулою:

$$A_n^m = n(n-1)\dots(n-m+1) = \frac{n!}{(n-m)!}$$

Сполучення. Скількома способами з n різних об'єктів можна вибрати m об'єктів? Вибір не впорядкований. Об'єкти після вибору не повертаються.

Наприклад, скількома способами з шістьох осіб можна вибрати чотирьох? Нескладні міркування приведуть до того, що слід модифікувати формулу для розміщень, а саме, відмовитися від впорядкованості обраних елементів, що буде коштувати нам $m!$ в знаменнику. Кількість сполучень для безлічі з n елементів по m елементів визначається за формулою:

$$C_n^m = \frac{n!}{m!\,(n-m)!}$$

Вибір з повторенням. Скількома способами з n різних об'єктів можна вибрати m об'єктів з повторенням? Об'єкти після вибору повертаються.

Наприклад, скількома способами з шістьох осіб можна вибрати чотирьох для чергування, якщо можна вибирати з повторенням і, потенційно, один з шістьох може бути обраний всі чотири рази? В цьому випадку для кожного вибору у нас є всі шість кандидатів. Отримаємо 6*6*6*6=64. У загальному вигляді, кількість способів для безлічі з n елементів по m елементів визначається за формулою: n^m.

4.2. Додавання і множення ймовірностей

Правила складання

Чому дорівнює ймовірність суми подій? Формула залежить від того, перетинаються вони чи ні. Для початку розглянемо ситуацію, коли події не перетинаються.

Правило складання для несумісних подій. Якщо події несумісні, то ймовірність суми цих подій дорівнює сумі їх ймовірностей.

Ймовірність суми несумісних подій знаходиться за формулою:

$$P(A+B)=P(A)+P(B)$$

Наприклад, якщо ймовірність випадання одиниці при підкиданні грального кубика дорівнює 1/6, а ймовірність випадання парного числа дорівнює 1/2, то ймовірність суми цих подій дорівнює 1/6+1/2=4/6. Ми скористалися формулою складання, оскільки події несумісні: випадання парного числа і випадання одиниці не можуть відбутися одночасно.

У разі, якщо події перетинаються, сума їх ймовірностей не дорівнює ймовірності суми подій. Тоді слід скористатися правилом складання для спільних подій.

Правило складання для спільних подій. Якщо дві події сумісні, то ймовірність їх суми знаходиться як сума ймовірностей цих подій мінус ймовірність їх перетину.

Ймовірність суми спільних подій знаходиться за формулою:

$$P(A+B)=P(A)+P(B)-P(AB)$$

Наприклад, якщо з колоди в 32 карти виймається одна, розглянемо дві події:

Подія А = {карта червоної масті}

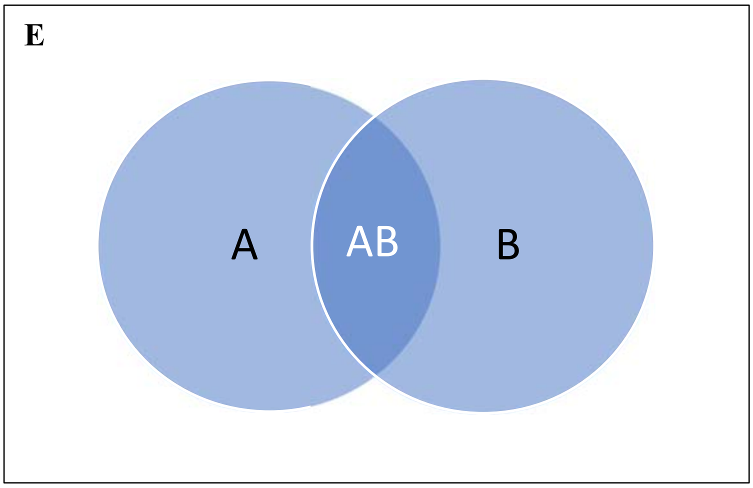
Подія В = {карта є королем чи тузом}

Ці події сумісні, оскільки ці події можуть відбутися одночасно. Тоді ймовірність такої події визначається наступним чином.

P(A)=16/32=1/2

P(B)=8/32=1/4

P(AB)=P{узятий туз або король червоної масті}=4/32=1/8



Малюнок 4–6. Спільні події

Далі за формулою додавання для спільних подій:

$$P(A+B)=P(A)+P(B)–P(AB)=1/2 +1/4–1/8=5/8$$

Отримали, що ймовірність того, що нам дістанеться туз або король червоної масті дорівнює 5/8.

Другий приклад. В аудиторії на науковому семінарі присутні 5 економістів і 8 філософів. Серед них 7 філософів і 3 економіста жінки. Яка ймовірність того, що випадково обраний учасник семінару виявиться філософом або чоловіком?

	Жінки	**Чоловіки**	**Разом**
Філософи	7	1	8
Економісти	3	2	5
Разом	10	3	13

Знаходимо ймовірність за формулою:

P(філософ або чоловік)=

=P(філософ)+P(чоловік)–P(філософ-чоловік)=

=8/13+3/13–1/13=10/13

Виходить, що ймовірність, що людина, яка вийде з аудиторії, виявиться філософом або чоловіком, дорівнює 10/13.

Умовна ймовірність. Правила множення

По відношенню до подій розглядають, крім операції додавання, добуток подій. Добуток подій є їх перетин, тобто включає всі результати, які включають обидві події і позначається АВ. Ймовірність добутку двох подій залежить від того, ці події залежні чи ні.

Події називаються **незалежними**, якщо поява будь-якої з них не впливає на ймовірність появи іншої. Якщо події не є незалежними, то кажуть, що вони **залежні**.

Для незалежних подій виконується рівність:

$$P(AB)=P(A)*P(B)$$

Правило множення для незалежних подій: ймовірність добутку двох незалежних подій дорівнює добутку їх ймовірностей.

У разі, якщо ймовірність події В залежить від того, відбулася чи не відбулася подія А, ми маємо справу з залежними подіями.

Умовною ймовірністю Р(В/А) називається ймовірність події В за умови, що подія А наступила.

Умовну ймовірність можна знайти за формулою:

$$P(B/A)=P(AB)/P(A)$$

З цієї формули, зокрема, випливає формула множення для залежних подій:

$$P(AB)=P(A)*P(B/A)$$

Правило множення для залежних подій: ймовірність добутку двох подій дорівнює добутку ймовірності однієї з них на умовну ймовірність іншої, за умови, що перша подія відбулася.

Розглянемо наступний приклад. В урні знаходиться десять куль, з них три білих і сім чорних. Вибираємо одну кулю і, не повертаючи її в урну, вибираємо другу. Визначимо ймовірність того, що обидві обрані кулі виявляться білими.

Подія А = {перша куля біла}

Подія В = {друга куля біла}

Ймовірність першої події Р(А)=3/10. Ймовірність другої події залежить від того, яку кулю обрано першою. Якщо настала подія А, то в урні залишилося 2 білих і 7 чорних куль. Ймовірність вийняти другу білу кулю в цьому випадку дорівнює Р(В/А)=2/9. Подія АВ полягає в тому, що обидві обрані кулі мають білий колір. Знайдемо відповідну ймовірність:

$$P(AB)=P(A)*P(B/A)=3/10*2/9=1/15$$

Підведемо підсумки. Ми розглянули два різних варіанти ймовірності для добутку подій – для незалежних і залежних подій.

Події незалежні:	**Події залежні:**
P(B/A)=P(B)	P(B/A)≠P(B)
P(AB)=P(A)*P(B)	P(AB)=P(A)*P(B/A)

Формула P(B/A)=P(B) показує, що ймовірність події B не залежить від того, відбулася чи не відбулася подія А, саме це ми і маємо на увазі інтуїтивно під незалежністю події B від події A.

Протилежні події

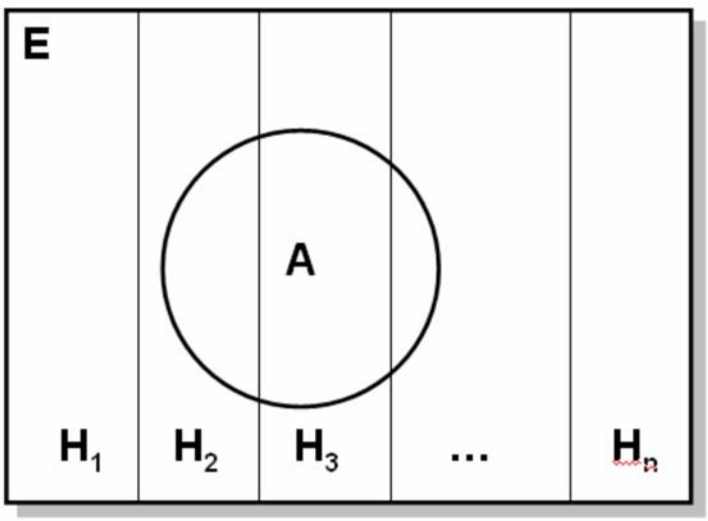
Протилежна подія $\overline{A}$ включає всі елементарні результати, які не включають А.

Імовірність протилежної події знаходиться за формулою:

$$P(A)=1–P(A)$$

Сума двох подій: А і протилежної, є достовірною подією:

$$P(A)+P(\overline{A})=1$$



Малюнок 4–7. Формула повної ймовірності

4.3. Формула повної ймовірності. Формула Байєса

Для деяких додатків важливо вміти використовувати формулу, яка називається формулою повної ймовірності. При наявності повної групи подій, ймовірність випадкової події А знаходиться по формулі повної ймовірності:

$$P(A)=P(H_1)*P(A/H_1)+P(H_2)*P(A/H_2)+\ldots+P(H_n)*P(A/H_n)$$

Розглянемо приклад вирішення задачі за допомогою цієї формули. Нехай є дві урни з білими і чорними кулями.

	Чорні кулі	**Білі кулі**	**Разом**
Перша урна	3	2	5
Друга урна	5	3	8
Разом	8	5	13

З першої урни випадковим чином переклали в другу 2 кулі, а потім з другої вийняли одну кулю. Потрібно визначити ймовірність того, що буде взята біла куля. Ця ймовірність залежить від того, які кулі були перекладені. Оскільки це нам невідомо, виділимо повну групу подій і знайдемо їх ймовірності:

H_1 = {переклали дві білі кулі}

H_2 = {переклали одну білу і одну чорну кулю}

H_3 = {переклали дві чорні кулі}

$P(H_1)=2/5*1/4=1/10=0,1$

$P(H_2)=2/5*3/4+3/5*2/4=6/10=0,6$

$P(H_3)=3/5*2/4=3/10=0,3$

Тепер знаходимо умовні ймовірності:

$P(A/H_1)=5/10=0,5$

$P(A/H_2)=4/10=0,4$

$P(A/H_3)=3/10=0,3$

Підставляємо отримані результати в формулу повної ймовірності та отримаємо відповідь:

$$P(A)=P(H_1)*P(A/H_1)+P(H_2)*P(A/H_2)+P(H_3)*P(A/H_3)=$$
$$=0,1*0,5+0,6*0,4+0,3*0,3=0,38$$

Отримали, що куля виявиться білою з ймовірністю 0,34.

Ми можемо вирішити зворотну задачу. Якщо нам достеменно відомо, що вийнята куля виявиться білою, то наскільки ймовірним є, що переклали дві білих кулі? Нам потрібно в цьому випадку, знаючи, що $P(A)=0,34$, знайти ймовірність події $P(H_1/A)$. Для цього використовується формула Байєса:

$$P(H_1/A) = \frac{P(H_1) * P(A/H_1)}{P(A)}$$

Формула була відкрита британським міністром Томасом Байєсом (1702-1761), вперше опублікована в 1747 році і носить його ім'я. Знаючи остаточний фінал, можна визначити ймовірність того, що цей фінал став результатом попередньої події.

Вирішуємо нашу задачу по цій формулі.

$$P(H_1/A) = \frac{P(H_1) * P(A/H_1)}{P(A)} = \frac{0{,}1 * 0{,}5}{0{,}38} = 0{,}132$$

Отже, якщо відомо, що в результаті випробування виймуть білу кулю, то ймовірність того, що перед цим переклали дві білих кулі, дорівнює 13,2%.

Використовуємо комп'ютер

Ця глава – теоретична і не передбачає активного використання комп'ютера. Слід навчитися обчислювати комбінаторні формули за допомогою функцій, наявних в електронних таблицях, оскільки ручні обчислення займають невиправдано багато часу.