ЛЕКЦІЯ.
РОЗБИРАЄМОСЯ У ВИПАДКОВИХ СИТУАЦІЯХ

Нам необхідно вміти розбиратися у випадкових ситуаціях, принаймні настільки, наскільки це можливо. На жаль, мабуть, ми ніколи не зможемо «абсолютно точно» сказати, що трапиться в майбутньому. Однак усвідомлення того, що одні можливості представляються більш правдоподібними, ніж інші, і кількісний опис (за допомогою відповідних чисел) цих відносин дає нам переваги в порівнянні з тими, хто зовсім не має уявлення про те, що станеться, або покладається лише на свої відчуття, не маючи для цього об’єктивних передумов. Найкраще поєднувати розуміння ймовірностей з усіма доступними знаннями і досвідом.

Нижче описано кілька ситуацій, в яких присутній елемент невизначеності.

Випадок перший. У вашому відділі має бути прийнято рішення про те, чи слід виводити на споживчий ринок новий цифровий аудіоплеєр. Незважаючи на те, що проведене маркетингове дослідження показало, що типовим споживачам він подобається і ціна представляється їм розумною, успіх цього товару навряд чи можна вважати гарантованим. Невизначеність існує внаслідок ряду причин. Як, наприклад, позначиться конкуренція? Чи будуть ваші постачальники своєчасно надавати якісні компоненти? Чи не існує перешкод, які поки ще не помічені? Чи буде в економіці спостерігатися спад або підйом? Чи будуть споживачі дійсно платити за цей товар гроші, або вони тільки заявляють про це? Вашій фірмі необхідно прийняти оптимальне рішення на основі доступної інформації.

Випадок другий. Ваш дядько, фермер з Мелітополя, написав вам про те, що в цьому році можлива посуха. Оскільки він правильно передбачив виникнення аналогічних проблем у 2009 році, ви відразу ж купуєте на Запорізькій торговій біржі опціони «колл» на зерно і укладаєте ф’ючерсні контракти на сою. Що станеться з вкладеними при цьому засобами?

Відповісти на це питання дуже непросто. Якщо врожай буде хорошим, ціни можуть впасти і ви можете втратити все. З іншого боку, в разі серйозної посухи ціни зростуть і буде отриманий суттєвий прибуток.

Випадок третій. Керуючий великого хімічного підприємства має багато обов’язків. Йому необхідно утримувати на досить низькому рівні витрати, забезпечуючи в той же час виробництво великої кількості продукції. Оскільки деякі хімікати отруйні, на підприємстві введена в дію спеціальна система безпеки. Однак, незважаючи на всі зусилля, що докладаються, керуючий все ще відчуває певні сумніви щодо того, наскільки правдоподібною є велика аварія з небезпечними наслідками в майбутньому році. Така ситуація виявляється дуже невизначеною, і в засобах масової інформації час від часу з’являються повідомлення про подібні аварії. Для правильного розуміння необхідних для підтримки безпеки витрат і оцінки можливого виграшу від їх вкладення приймається рішення про дослідження ймовірності аварії на підприємстві.

Випадок четвертий. Чи думали ви коли-небудь про можливість виграти в тоталізатор? Це, напевно, уявлялося вам дуже малоймовірним. Однак наскільки це дійсно неймовірно? Відповідь можна знайти в газетній статті, в якій стверджується наступне:

«Ймовірність виграшу великого призу в тоталізаторі, організованому по листуванню журналом «Сьогодні», становить 1 до 427 600 000. Це приблизно в 300 разів більше неймовірно, ніж потрапити під удар блискавки, ймовірність чого складає приблизно 1 до 1 500 000 млн».

Як же розібратися в невизначених ситуаціях, які містять у собі елемент випадковості, таким чином, щоб уникнути впливу пов’язаних з ними неточностей? Найкраще почати з розгляду цілком певних, точних тверджень. Це може допомогти дізнатися «достовірно», що ж буде відбуватися (наскільки це взагалі можна дізнатися) навіть в тому випадку, якщо в даній ситуації ні в чому не можна бути повністю впевненим.

Такий підхід встановлює чіткі межі. Розгляд починається з чіткого опису процесу, що представляє інтерес (*випадкового експерименту*). При цьому складається перелік всіх можливих результатів (*вибірковий простір*). Може бути також ряд особливих випадків, які слід розглянути, і які або будуть спостерігатися, або ні (наприклад, «успішне виконання проекту»); вони називаються *подіями*. Правдоподібність настання події характеризується конкретним числом, яке називають *ймовірністю*.

При цьому може виникнути бажання об’єднати інформацію про більш ніж одну подію; наприклад, оцінити, наскільки ймовірним є те, що відмовлять в роботі *і* реактор, *і* система забезпечення безпеки. Може також виникнути необхідність з плином часу оновлювати наявні значення ймовірності за допомогою так званих *умовних ймовірностей*, що відображають доступну інформацію.

Найпростіший спосіб вирішення таких імовірнісних задач полягає в тому, щоб перш за все побудувати *дерево ймовірностей* для структурування своїх знань про ситуацію; це виявляється значно простіше, ніж просто намагатися правильно комбінувати формули. У деяких випадках корисним виявляється також розгляд таблиць *спільних ймовірностей* і *діаграм Венна*, що дозволяє поглибити інтуїтивні уявлення і вирішити поставлену задачу.

4.1. Приклад: за якими дверима прихований приз?

Уявіть собі, що ви берете участь в ігровому телевізійному шоу. Вас чекає приз, про який ви мрієте (подорож на Фіджі або, може бути, відмінна оцінка на державному іспиті?). Ця нагорода захована за однією з дверей – №1, №2 або №3. За іншими двома дверима немає нічого цікавого. Ви бачите три закриті двері; будь-які підказки відсутні. Натовп учасників передачі кричить, надихаючи вас на подвиг; ви оцінюєте ситуацію, збираєтеся з думками і повідомляєте присутнім про свій вибір. Однак, перш ніж відкрити обрані вами двері, вам кажуть, що спочатку відкриють іншу, за якою призу немає. Після цього вам дається можливість змінити свій вибір. Тепер закритими залишилися двоє дверей: ті, яку ви вибрали, і ще одна. Чи будете ви змінювати свій вибір? Натовп шаленіє, лунають вигуки, що закликають вас змінити своє рішення або не змінювати його. Залишите ви свій первісний вибір без зміни чи ні? Подумайте над цим, а потім вже подивіться відповідь, яку наведено та обґрунтовано нижче.

***

Якщо ви вирішили зберегти свій первісний вибір, ви потрапите в гарну компанію – майже всі студенти дають таку відповідь. Однак, на жаль, такий вибір буде помилковим. Ваша здатність приймати рішення після знайомства з ймовірністю безсумнівно покращиться.

Якщо ви вирішили змінити вибір – вітаємо. Ви подвоїли свій шанс виграти з 1/3 до 2/3.

Принцип тут полягає в тому, що ті, хто зважився на зміну вибору, ефективно використовували нову отриману інформацію. Ті ж, хто залишив свій вибір без змін, не змінили і свою можливість виграти. У чому полягає нова інформація? Для того щоб відкрити двері, яку ви не вибрали і за якою немає призу, організатори шоу повинні, щонайменше, щось знати про те, за якими дверима в дійсності знаходиться приз. Коли вони відкривають двері, частина цієї інформації стає доступною і вам.

Неформально пояснити ситуацію можна таким чином. Уявіть собі, що у вас є двійник, який змінює вибір в той час, коли ви свій вибір не міняєте. Оскільки залишилося тільки двоє дверей і приз повинен знаходитися за однією з них, ваш двійник виграє в кожному окремому випадку, коли ви програєте. Оскільки ваш загальний шанс на виграш залишається незмінним і становить 1/3, виходить, що двійник, який змінив вибір, отримує решту шансів, що дорівнює 2/3. Для тих, кого це не переконало, в розділі 4.5 буде наведено детальне суворе рішення.

Не варто надмірно засмучуватися, якщо вам не вдалося зробити оптимальний вибір. Подумайте краще про те, наскільки посилиться ваша позиція в результаті вивчення ймовірностей. Швидше навіть слід почувати оптимізм, оскільки в результаті прийняті вами рішення виявляться краще, ніж у багатьох інших людей, які продовжують «противитися змінам» навіть після отримання нової важливої інформації.

4.2. Як досліджувати невизначеність

Побудову суворої схеми для дослідження випадкових ситуацій ми почнемо з ретельного визначення і обмеження ситуації. Результатом такого визначення буде *випадковий експеримент*, кожне виконання якого призводить до деякого *результату*, одному зі списку можливих (так званий *вибірковий простір*). Також ми будемо мати справу з низкою *подій*, кожна з яких може або відбуватися, або не відбуватися, в залежності від результату випадкового експерименту.

Випадковий експеримент: точне визначення випадкової ситуації

Випадковий експеримент – це будь-яка чітко визначена процедура, що дає спостережуваний результат, який не можна точно передбачити заздалегідь. Випадковий експеримент повинен бути чітко визначений, щоб уникнути будь-яких несподіванок. Повинна бути можливість однозначно фіксувати результат виконання експерименту. І нарешті, результат такої процедури не повинен бути повністю передбачуваним заздалегідь, оскільки в іншому випадку ситуація не є дійсно випадковою. Нижче наведено кілька прикладів випадкового експерименту, розгляд яких ми продовжимо в цьому розділі.

1. Планується дослідження доходу сімей, які проживають поблизу місця, де передбачається відкрити новий ресторан. Випадковим чином вибирається телефонний номер, за яким дзвонять в сім'ю і записують її дохід з точністю до долара. Для того щоб бути точним, необхідно чітко визначити результат в тому випадку, якщо ніхто не відповів на дзвінок або якщо співрозмовник не захотів відповісти на поставлене запитання про дохід. Припустимо, що в цьому випадку обирається новий номер і дзвінки повторюються до тих пір, поки не буде отримано конкретну відповідь про

величину доходу. У такому випадку кожне виконання випадкового експерименту буде давати в якості результату конкретне число (розмір доходу сім'ї). Незважаючи на те, що такий підхід дозволяє зібрати дані для вирішення нашої ймовірнісної задачі, відсутність відповідей залишається проблемою для статистичного аналізу, оскільки все ще існує деяка група (тих, хто не відповіли на поставлене запитання), для якої інформація про сімейний дохід відсутній.

2. Відділ маркетингу планує вибрати 10 типових покупців для формування фокус-групи, в якій буде обговорюватися і вибиратися один з семи запропонованих варіантів дизайну нової лампи. (Результат – обраний варіант дизайну).

3. Відповідно до чітко визначеного процесу випадкового вибору з завтрашньої продукції обирають п'ять заморожених обідів, готують їх і описують їх якість цілим числом за шкалою від 1 до 4 (Ретельність організації випадкового процесу вибору гарантує належний експеримент. Результатом є список оцінок якості. Результат з повною визначеністю невідомий, оскільки в процесі будь-якого виробництва можливі проблеми).

Складні ситуації зазвичай допускають багато різних варіантів випадкового експерименту. При цьому можна вибрати один або декілька найбільш слушних варіантів. Так, наприклад, вибір одного обіду для контролю якості сам по собі є випадковим експериментом, що дає в якості результату одну оцінку якості. Вибір для аналізу п'яти обідів також є випадковим експериментом (але більшого масштабу), який в якості результату дає вже список з п'яти оцінок якості.

Розглядайте випадковий експеримент як сцену, на якій відбуваються різні події. Розгляд спостережуваних подій в порівняно менших ситуаціях дозволяє більш ясно побачити можливі результати.

Вибірковий простір: перелік можливих подій

Кожен випадковий експеримент характеризується **вибірковим простором**, що представляє собою перелік *всіх можливих результатів* цього експерименту, описаним заздалегідь, без знання про те, що дійсно відбудеться в ході експерименту. Зверніть увагу на те, що стосовно вибіркового простору ніякої невизначеності немає. Це цілком певний список того, що може спостерігатися. Такий підхід дозволяє зробити випадкову ситуацію більш визначеною і часто допомагає також прояснити своє уявлення про неї. Нижче наведені вибіркові простори для описаних раніше випадкових експериментів.

1. У разі дослідження доходу сімей вибірковий простір являє собою список можливих значень доходу. Припустимо, що дохід може приймати нульове значення або бути позитивним числом, і уявімо собі вибірковий простір як список невід'ємних значень грошових сум в доларовому вираженні.

$0
$1
$2
.
.
.
$34 999
$35 000
$35 001
.
.
.

2. Для фокус-групи, яка обирає дизайн нової лампи, вибірковий простір значно менше, він складається з семи запропонованих варіантів дизайну:

Дизайн A	Дизайн E
Дизайн B	Дизайн F
Дизайн C	Дизайн G
Дизайн D	

3. В разі перевірки якості заморожених обідів вибірковий простір являє собою набір всіх можливих варіантів оцінок якості. Це набір списків, кожен з яких містить 5 чисел (по одному на кожний з перевірених обідів) з інтервалу від 1 до 4 (кожне число характеризує якість відповідного обіду). В даному випадку вибірковий простір занадто великий для того, щоб приводити його тут повністю. Відзначимо, однак, що перелік елементів вибіркового простору може починатися з варіанту, що містить всі одиниці (тобто має вигляд «1, 1, 1, 1, 1», що свідчить про огидну якість всіх перевірених обідів) і закінчуватися варіантом, що містить всі четвірки (тобто «4, 4, 4, 4, 4», що

відповідає відмінній якості всієї продукції, що потрапила на перевірку). Між цими варіантами повинні бути всі можливі списки оцінок якості обідів (наприклад, «3, 2, 3, 3, 4»)[1].

1	1	1	1	1	(перший список)
1	1	1	1	2	
1	1	1	1	3	
1	1	1	1	4	
1	1	1	2	1	
1	1	1	2	2	
1	1	1	2	3	
1	1	1	2	4	
1	1	1	3	1	
1	1	1	3	2	
1	1	1	3	3	
1	1	1	3	4	
1	1	1	4	1	
1	1	1	4	2	
1	1	1	4	3	
1	1	1	4	4	
1	1	2	1	1	
1	1	2	1	2	
1	1	2	1	3	
1	1	2	1	4	
1	1	2	2	1	
1	1	2	2	2	
1	1	2	2	3	
1	1	2	2	4	
.	.	.	.	.	
.	.	.	.	.	
.	.	.	.	.	
4	4	4	3	1	
4	4	4	3	2	
4	4	4	3	3	
4	4	4	3	4	
4	4	4	4	1	
4	4	4	4	2	
4	4	4	4	3	
4	4	4	4	4	(останній список)

Результат: що відбувається в дійсності

Щоразу виконання випадкового експерименту дає рівно один результат. Оскільки вибірковий простір містить всі можливі результати, не повинно бути

[1] В даному випадку вибірковий простір складається з 1024 варіантів списку оцінок. Це значення можна обчислити як 4x4x4x4x4 = 4^5, оскільки існує 4 можливі оцінки якості для першого обіду, 4 – для другого і так далі до 5-го обраного для перевірки обіду.

ніяких несподіванок: результат експерименту повинен міститися в вибірковому просторі.

Ось результати одного виконання кожного з розглянутих нами випадкових експериментів.

1. У дослідженні доходу сім'ї після одного дзвінка, який залишився без відповіді (нікого не було вдома), і одного, в результаті якого була отримана відповідь «це не ваша справа», вдалося додзвонитися до людини, яка назвала дохід своєї сім'ї (отриманий результат):

$36 500

2. Для обговорення в фокус-групі після тривалих дискусій про переваги різних варіантів дизайну лампи був зроблений вибір (отриманий результат):

Дизайн D

3. При дослідженні якості заморожених обідів був отриманий список оцінок якості для кожного з п'яти перевірених обідів:

3 3 1 2 2

Події: вони або відбуваються, або ні

Подія у формальному визначенні – це будь-який набір результатів, зазначених заздалегідь, до проведення випадкового експерименту. Таким чином, можна сказати, що кожен раз при проведенні випадкового експерименту ми спостерігаємо, настає певна подія чи ні. Можна визначити для випадкового експерименту кілька подій або тільки одну. Кожна подія відповідає деякій властивості, що представляє інтерес.

Нижче описані деякі події для кожного з розглянутих випадкових експериментів.

1. При дослідженні доходу сім'ї можна розглянути три різних події.

Перша подія	Низький рівень доходу	Від $10 000 до $24 999
Друга подія	Середній рівень доходу	Від $25 000 до $44 999
Третя подія	Достатній рівень доходу	$20 000 і вище

* Список результатів для події «Низький рівень доходу» може бути розписано більш детально як $10 000, $10 001, $10 002, …, $24 997, $24 998, $24 999.

Для деякого спостережуваного результату $36 500 ми бачимо, що перша подія не настає, в той час, як дві інших відбуваються. Таким чином, ця сім'я має «середній рівень доходу» і «достатній рівень доходу», але не «низький рівень доходу».

2. Для випадку роботи фокус-групи з обговорення дизайну лампи розглянемо подію «обраний дизайн зручний для виробництва», що включає наступні варіанти дизайну:

Дизайн A Дизайн B Дизайн C Дизайн F

Оскільки результат, що спостерігається, дизайн D, в число цих варіантів не входить, дана подія «не відбулася». На жаль, фокус-група вибрала дизайн, що досить складний для виробництва.

3. Для перевірки якості заморожених обідів розглянемо подію «всі зразки – доброї або вищої якості». Це означає, що всі п'ять обідів повинні бути оцінені значеннями 3 або 4. При цьому, наприклад, результат, що спостерігається, 3 3 1 2 2, не може бути кваліфікований як «всі зразки – доброї або вищої якості» (три останніх обіди отримали занадто низькі оцінки). Таким чином, дана подія не відбулася. Однак якби результат мав вигляд 3 4 3 4 4, то подія, що розглядається, була б можливою (оскільки всі обіди мали б якість 3 або 4).

Щоб дати цій події формальне визначення, тобто визначити її як набір тих результатів, при отриманні яких подія має місце, необхідно скласти таку таблицю:

3	3	3	3	3	(перший список)	4	3	3	3	3	
3	3	3	3	4		4	3	3	3	4	
3	3	3	4	3		4	3	3	4	3	
3	3	3	4	4		4	3	3	4	4	
3	3	4	3	3		4	3	4	3	3	
3	3	4	3	4		4	3	4	3	4	
3	3	4	4	3		4	3	4	4	3	
3	3	4	4	4		4	3	4	4	4	
3	4	3	3	3		4	4	3	3	3	
3	4	3	3	4		4	4	3	3	4	
3	4	3	4	3		4	4	3	4	3	
3	4	3	4	4		4	4	3	4	4	
3	4	4	3	3		4	4	4	3	3	

3	4	4	3	4		4	4	4	3	4	
3	4	4	4	3		4	4	4	4	3	
3	4	4	4	4		4	4	4	4	4	(останній список)

Таким чином, подія «всі зразки – доброї або вищої якості» спостерігається тільки в тому випадку, якщо отриманий результат входить в даний повний список. Подивіться, чи є в ньому результат «3, 4, 3, 4, 4»?

Як бачите, тут немає нічого загадкового. Необхідно ретельно визначити випадковий експеримент, описати вибірковий простір, результати, а також події – і невизначену ситуацію вдається привести в належний порядок. І нарешті, події дозволяють формулювати звичайні змістовні твердження, як, наприклад, «Сьогоднішній товар пройшов контроль якості» або «Ей, Аделіна, я знайшов ще одну сім’ю з достатнім рівнем доходу!».

4.3. Наскільки ймовірна подія?

Як нам вже відомо, кожен раз при проведенні випадкового експерименту кожна з подій або відбувається, або не відбувається. Це поки ще мало про що говорить. Нам хотілося б знати, наскільки правдоподібна конкретна подію. Ця правдоподібність характеризується числом, яке називається ймовірністю події. Зараз ми дамо визначення цього поняття, позначимо, звідки беруться цифри, що характеризують ймовірність, а також покажемо, як ймовірність вказує приблизну кількість появ деякої події при багаторазовому повторенні випадкового експерименту.

Кожна подія має свою ймовірність

Кожній події відповідає число в інтервалі від 0 до 1, яке називають ймовірністю події. Імовірність показує, наскільки правдоподібною є поява даної події при кожному виконанні випадкового експерименту. Імовірність, що дорівнює 0, означає, що відповідна подія по суті ніколи не спостерігається, а ймовірність, що дорівнює 1, свідчить про те, що дана подія відбувається практично завжди. В цілому ймовірність показує приблизну частку випадків, в яких очікується настання події.

Ймовірність	Інтерпретація
1,00	Подія спостерігається (практично) завжди
0,95	Подія спостерігається приблизно в 95% випадків (вона дуже ймовірна)
0,50	Подія спостерігається приблизно в половині випадків
0,37	Подія спостерігається приблизно в 37% випадків
0,02	Подія спостерігається приблизно в 2% випадків (воно малоймовірно, але можливо)
0,00	Подія не спостерігається (практично) ніколи

Інтерпретація цих чисел вимагає певної обережності. Якщо ви можете провести тільки один експеримент і повторити його не можна (наприклад, якщо мова йде про ймовірність того, що стара будівля буде успішно підірвана), ймовірність в 0,97 свідчить про велику ймовірність успіху з малою можливістю зазнати невдачі. Однак невірно буде в такому випадку стверджувати, що «успіх очікується в 97% випадків», якщо тільки ви не збираєтеся повторити цю процедуру в подальшому для багатьох подібних старих будівель.

Можна також визначити ймовірність, використовуючи таке поняття, як шанс. Шанс є позитивним числом, що дорівнює частці від ділення ймовірності настання події на ймовірність того, що ця подія не відбудеться:

Шанс

$$\text{Шанс} = \frac{\text{Ймовірність того, що подія станеться}}{\text{Ймовірність того, що подія не станеться}} = \frac{\text{Ймовірність}}{1 - \text{Ймовірність}}$$

Так, наприклад, ймовірність 0,5 відповідає шансу 0,5 / (1 – 0,5) = 1. Це іноді формулюється у вигляді «шанси 1 до 1». Імовірність 0,8 відповідає шансу 0,8 / (1 – 0,8) = 4, або 4 до 1. Великий шанс відповідає більш високій ймовірності і більшій правдоподібності. Зверніть увагу, що, незважаючи на те, що ймовірність не може виходити за межі проміжку від 0 до 1, шанс може приймати будь-яке позитивне значення.

Звідки беруться значення ймовірності

У підручниках числа, які є значеннями ймовірності, часто наводяться в умові задачі поряд з іншою інформацією. У реальному житті позначки виду «До речі, вірогідність того, що болт виявиться дефектним і призведе до аварії, дорівнює 0,003», природно, відсутні. Де ж взяти числа, що характеризують ймовірність, для використання в реальному житті? Для цього є три основні способи: знайти відносну частоту (за допомогою експерименту), обчислити теоретичне значення ймовірності (використовуючи формули) або скористатися суб'єктивною оцінкою ймовірності (на основі суджень).

Відносна частота і закон великих чисел

Припустимо, що у нас є можливість провести випадковий експеримент необмежену кількість разів в абсолютно однакових, за винятком впливу випадкового фактора, умовах. **Відносна частота** деякого події дорівнює відношенню кількості раз настання цієї події («кількості появ події») до загальної кількості проведених експериментів («кількості повторів»). Ця величина може задаватися або у вигляді дробу (наприклад, 0,148), або в процентному вираженні (наприклад, 14,8%). Формула для обчислення відносної частоти події має наступний вигляд:

$$\text{Відносна частота події} = \frac{\text{Кількість появи події}}{\text{Кількість випадкового експерименту}}.$$

Наприклад, якщо ви опитали 536 осіб, які погодилися відповісти на ваше запитання, і знайшли, що в 212 випадках сім'ї мають достатній дохід розміром $20 000 або більше, відносна частота буде дорівнювати:

$$\frac{212}{536} = 0{,}396, \text{ або } 39{,}6\%$$

Величина відносної частоти 39,6% визначена для випадкового експерименту «з'ясування доходу у людини, яка погодилася відповісти на питання» з подією, що цікавить, «дохід становить $20 000 або більше». Якщо використовувати такі визначення, стає зрозумілим, що в даному випадку проведено випадковий експеримент, причому він повторений n = 536 раз. В даному випадку можна також вести мову і про інший випадковий експеримент, що також може представляти інтерес, а саме: «визначення доходу сімей 536 осіб, які погодилися відповісти на питання». Однак для цього більш масштабного випадкового експерименту відносна частота не має сенсу, оскільки цей експеримент проведений тільки один раз.

Ці відмінності не тривіальні. Менеджери часто вважають, що подібна «суворість міркувань» корисна лише у випадку складніших проблем. Відносна частота і ймовірність деякої події – це близькі, але різні поняття. Істотна відмінність полягає в тому, що ймовірність є точним числом, в той час як відносна частота – це випадкове число. Це пов'язано з тим, що ймовірність події виявляється властивістю базової ситуації (випадкового експерименту, вибіркового простору, події), а відносна частота залежить від (випадкових) результатів, одержуваних при проведенні випадкового експерименту n раз.

Відносні частоти можуть використовуватися для оцінки (найкраща приблизна оцінка) значення ймовірності в разі наявності інформації, заснованої на попередньому досвіді. Так, наприклад, величину відносної частоти (в даному випадку величину 39,6% для достатнього рівня доходу) можна використовувати в якості наближення для істинного значення ймовірності того, що при випадковому виборі у людини, яка погодилася відповісти на питання, виявиться достатній рівень доходу. Таким чином, дане значення, 0,396, можна використовувати так, як ніби це і є ймовірність. Не слід, однак, забувати про те, що існує різниця між істинною (невідомою) величиною ймовірності і найкращою приблизною оцінкою, отриманої на основі розгляду відносної частоти.

Закон великих чисел говорить, що відносна частота повинна бути близькою до ймовірності, якщо експеримент проведений багато разів, тобто при великих значеннях n. Наскільки, як правило, буде близька (випадкова) величина відносної частоти до (фіксованої) величини ймовірності? Відповідь, яка залежить від того, наскільки правдоподібно дана подія і скільки разів повторений експеримент (n), наведено в табл. 4.3.1 з використанням поняття стандартного відхилення. Якщо, наприклад, ймовірність події становить 0,75 і випадковий експеримент повторюється $n = 100$ раз, можна очікувати, що відносна частота виявиться в середньому приблизно на 0,04 вище або нижче дійсної ймовірності (0,75).

На рис. 4.3.1 і 4.3.2 показаний приклад того, як відносна частота (підвладна випадковим коливанням ламана лінія на кожному з графіків) виступає в якості наближення для ймовірності (пряма горизонтальна лінія на висоті 0,25 на кожному графіку). Зверніть увагу, що на рис. 4.3.2 масштаб по вертикалі розтягнутий. Це зроблено тому, що при великих *n* відносна ймовірність ближче до дійсного значення ймовірності.

Таблиця 4.3.1. Стандартне відхилення відносної частоти

	Значення ймовірності 0,50	**Значення ймовірності 0,25 або 0,75**	**Значення ймовірності 0,10 або 0,90**
n = 10	0,16	0,14	0,09
25	0,10	0,09	0,06
50	0,07	0,06	0,04
100	0,05	0,04	0,03
1000	0,02	0,01	0,01

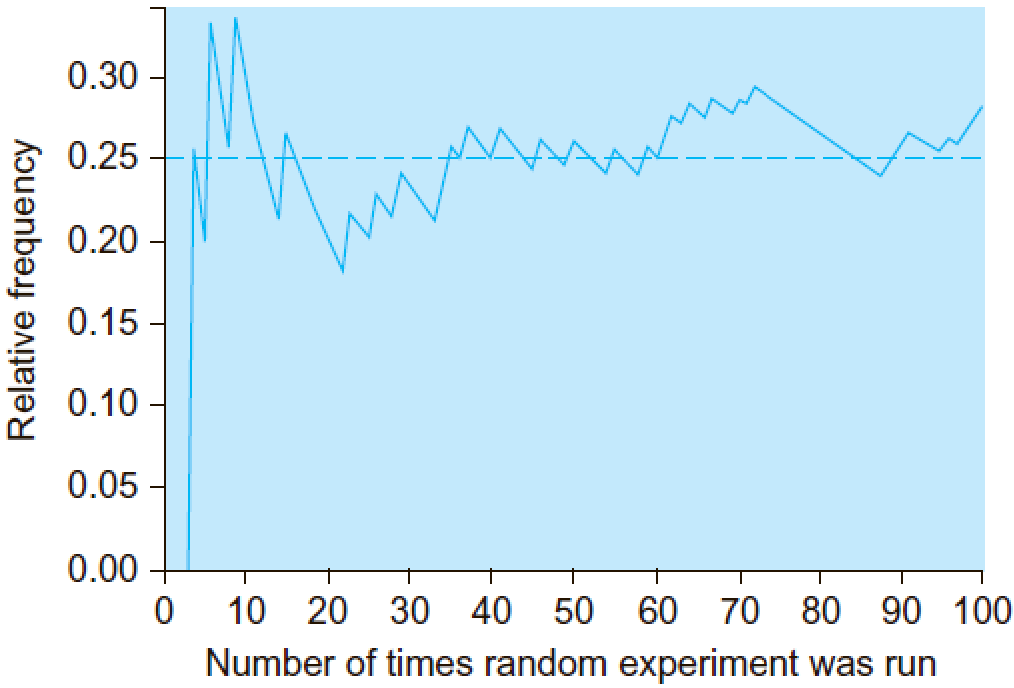


Рис. 4.3.1. Відносна частота події виступає в якості апроксимації для ймовірності цієї події (в даному випадку 0,25) і в цілому наближається до неї з ростом *n*. При *n* = 100 очікується різниця не більше 0,04

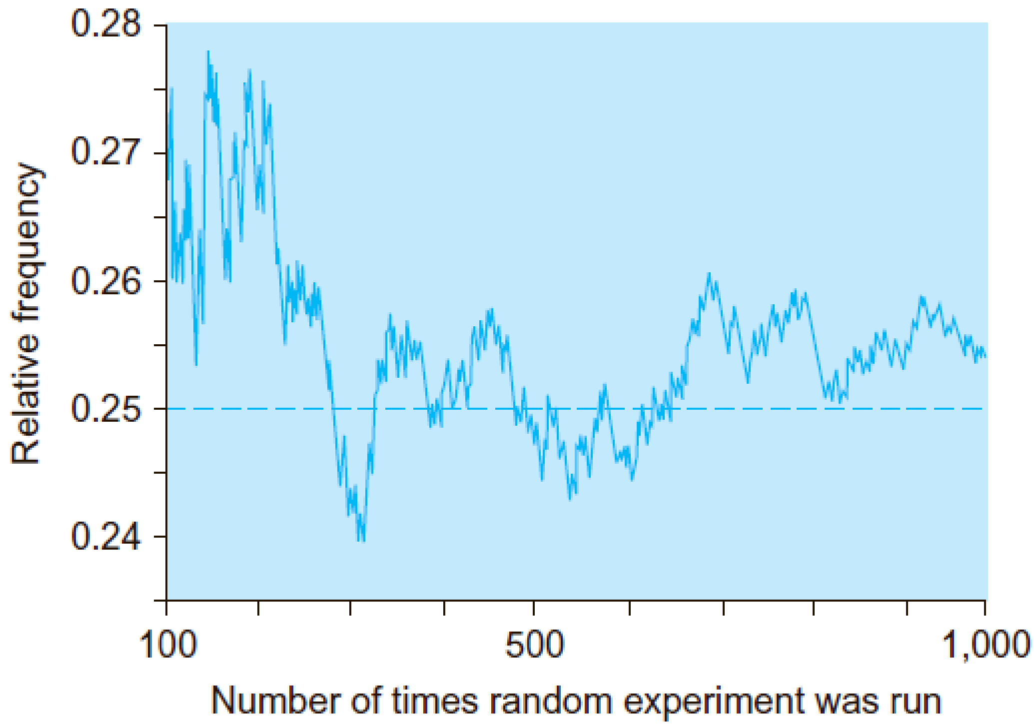


Рис. 4.3.2. Відносна частота події, показана для числа повторів випадкового експерименту n від 100 до 1000. У більшості випадків при $n = 1000$ відхилення відносної частоти від ймовірності (в даному випадку від 0,25) не перевищує 0,01. Зверніть увагу на зміну масштабу в порівнянні з попереднім графіком

Оскільки відносна частота досить близька, принаймні для великих значень n, до ймовірності (відповідно до закону великих чисел), відносну частоту появи деякої події можна використовувати в якості «найкращої приблизної оцінки» (на основі наявних даних) ймовірності цієї події.

Приклад. Наскільки велика мінливість випущеної сьогодні продукції вищої якості

Припустимо, що ви перевірили якість 50 одиниць з сьогоднішнього випуску продукції вашої фірми. З попереднього досвіду вам відомо, що протягом тривалого періоду часу 25% виробленої продукції оцінювалися як продукція вищої якості і вважалися придатними для продажу на експорт самим вимогливим іноземним замовникам. Чого слід очікувати на сьогоднішній день? Чи вийде рівно 25% з цих 50, тобто 12,5 одиниць продукції вищої якості? Звісно, ні; однак наскільки нижче або вище цього значення можна очікувати реальний результат?

Стандартне відхилення відносної частоти (0,06, або 6%) з табл. 4.3.1 допоможе отримати відповідь на це питання. Давайте міркувати таким чином. Сьогодні 50 раз виконаний випадковий експеримент «виробництво одиниці продукції і визначення її якості»[2]. Відносна частота події «одиниця продукції має вищу якість» буде дорівнює відсотку продукції вищої якості в сьогоднішньому виробництві. Ця відносна частота буде близька до ймовірності (25%, або 0,25) і буде (згідно з даними таблиці) відстояти від значення 0,25 приблизно на 0,06, або 6%. Якщо перейти від відсотків до одиниць продукції, ця величина мінливості складе 0,06 * 50 = 3 одиниці товару. Таким чином, ви очікуєте отримати результат «12,5 плюс або мінус 3» одиниць продукції вищої якості.

Мінливість, яка характеризується 3 одиницями продукції, інтерпретується так, як це зазвичай робиться для стандартного відхилення. Не слід дивуватися, якщо серед всієї продукції виявиться 10 або 14 одиниць вищої якості або навіть 7 або 18 (приблизно дві величини стандартного відхилення від 12,5). Однак виявиться дивним і неприємним, якщо таких товарів виявиться всього лише кілька штук. Подібний результат може свідчити про необхідність вносити корективи в процес виробництва. Буде також дивно, хоч і дуже приємно, виявити 23 одиниці продукції вищої якості (пора відкривати шампанське і щосили намагатися допомогти робітникам згадати, як це їм вдалося!).

Теоретичне значення ймовірності

Теоретичне значення ймовірності – це значення ймовірності, яке обчислюють з використанням точної формули, заснованої на математичній теорії або моделі. Цей підхід можна використовувати тільки для систем, що мають строгий математичний опис. Більшість методів обчислення

[2] Припустимо, що кожна одиниця продукції виробляється незалежно одна від одної

теоретичного значення ймовірності занадто складні, і ми не будемо їх торкатися. Розглянемо лише особливий випадок застосування правила рівної ймовірності.

Правило рівної ймовірності

Якщо все результати виявляються однаково вірогідними – а в цьому зазвичай існують певні сумніви, – легко знайти ймовірність будь-якої події, скориставшись теоретичним підходом. Імовірність пропорційна числу результатів, які утворюють дану подію, і обчислюється за такою формулою.

Якщо всі результаті однаково ймовірні, то

$$\text{Ймовірність події} = \frac{\text{Кількість результатів в події}}{\text{Загальна кількість можливих результатів}}.$$

Приклад. Підкидання монети і тасування карт

Оскільки підкинута монета, швидше за все, впаде або орлом, або решкою вгору, ймовірність кожної з цих подій становить 1/2. А що можна сказати про три результати, «орел», «решка» і «стане ребром»? Оскільки в даному випадку розглядаються три події, чи означає це, що ймовірність кожної з подій дорівнює 1/3? Звісно, ні; адже в цьому випадку явно порушується вимога «все результати повинні бути однаково ймовірними». Правило однакової ймовірності виявляється непридатним, оскільки ймовірність того, що підкинута монета при падінні стане ребром, дуже мала в порівнянні з можливостями двох інших варіантів.

Оскільки карти перед грою зазвичай тасують, що допомагає забезпечити випадкове розташування карт в колоді, правило рівної ймовірності має бути застосовано до будь-якої спроби вказати властивість довільної карти. Так, наприклад, оскільки 13 з 52 карт колоди – це черви, ймовірність того, що одна обрана випадковим чином карта буде червової масті становить 0,25. Аналогічним чином знаходимо, що ймовірність отримання туза дорівнює 4 / 52 = 7,7%, а ймовірність того, що випадкова карта виявиться джокером, становить 2 / 52 = 3,8%.

Приклад. Можливості працевлаштування для чоловіків і жінок

Припустимо тепер, що 15 осіб, що мають однакову кваліфікацію, подали заяву на деяку вакансію, причому 6 претендентів – жінки. Якщо в цій групі вибір при прийомі на роботу здійснюється випадковим чином (і, таким чином, стать претендента не враховується), ймовірність того, що перевага буде віддана жінці, становить 6 / 15 = 0,40, або 40%. Ця ситуація відповідає правилу рівної ймовірності, що спрацьовує в разі проведення випадкового експерименту з вибору одного з претендентів, з подією «вибір припав на жінку». Дана подія включає 6 результатів (6 жінок), а ймовірність становить 6 з 15, повного числа претендентів на посаду (загальної кількості результатів).

Приклад. Отримання вихідних матеріалів

Уявіть собі, що ваш постачальник має склад, в якому знаходиться 83 коробки передач, з них 2 мають дефекти. Якщо одна з них обирається випадковим чином (який з виробів має дефекти, невідомо), чому дорівнює ймовірність того, що ви отримаєте дефектний виріб? Відповідь відповідно до правила рівної ймовірності становить 2 з 83, або 2,4%.

Суб'єктивна оцінка ймовірності

Суб'єктивна оцінка ймовірності одержується на основі думки певної особи про ймовірність деякої події. Такий підхід може здатися не дуже науковим, проте часто виявляється, що це і є найкраще, що можна зробити за відсутності попереднього досвіду (тобто не маючи можливості використовувати відносну частоту) і під час відсутності відповідної теорії (тобто без можливості обчислити теоретичне значення ймовірності). Один із шляхів поліпшення якості підходу на основі суб'єктивної оцінки ймовірності полягає в використанні думки експерта в даній області. Наприклад, можна скористатися думкою фахівця з банківських інвестицій для оцінки ймовірності того, що злиття конкуруючих фірм виявиться успішним, або думкою інженера про технічну перспективу нового технологічного підходу в області енергетики.

Приклад. Ведення судового процесу

Проти вашої фірми порушено справу в суді. Ваша перша реакція – «О, тільки не це!». Однак згодом ви усвідомлюєте, що на фірми подають до суду з різних питань дуже часто. Так що ви заспокоїтеся і беретеся за ознайомлення з деталями позову, в число яких входить вимога відшкодування опосередкованої шкоди в сумі $5 000 000. Ви скликаєте збори адміністративних працівників своєї фірми і юрисконсультів для обговорення стратегії. Вибір найбільш ефективної стратегії пов'язаний з оцінкою того, наскільки правдоподібними виявляються різні можливі результати справи.

Це, звісно, ситуація, в якій присутні ймовірності різних подій. Ви опинилися в самому центрі масштабного випадкового експерименту.

Давайте простежимо можливий розвиток судового процесу і перерахуємо можливі результати у вигляді (1) витрачених сум (на оплату витрат і відшкодування збитку, якщо такі є) і (2) вирішення процесу (його припинення, вирішення без судового розгляду, винесення рішення суддею або судом присяжних).

Оскільки багато судових розглядів закінчуються до винесення рішення по справі, спочатку розглянемо різні можливі витрати на вирішення процесу мирним шляхом. Можливі наступні події, що представляють інтерес.

Врегулювання питання без великих витрат: менше $100 000.

Врегулювання питання з середнім рівнем витрат: від $100 000 до $1 000 000.

Врегулювання питання з великими витратами: більше $1 000 000.

Як визначити ймовірність цих подій? Достатня кількість аналогічних випадків, яке дозволило б застосувати підхід на основі відносних частот подій, відсутня – навіть після звернення до комп'ютерних баз даних з метою знаходження прикладів подібних справ. Наукової теорії, яка дозволила б скористатися формулою для розрахунку таких ймовірностей, також немає, що позбавляє можливості застосувати метод теоретичного обчислення ймовірності. Залишається єдиний шлях –провести суб’єктивну оцінку ймовірності.

Для суб’єктивної оцінки ймовірності перерахованих подій збори приймають рішення звернутися до думки юрисконсульта, який добре знає судові процеси такого типу. Вивчивши конкретні деталі справи і оцінивши його на основі порівняння з декількома аналогічними випадками, що мали місце раніше, а також з огляду на сьогоднішні тенденції судової системи, юрисконсульт представив наступні значення суб’єктивної ймовірності.

Врегулювання питання без великих витрат: 0,10.

Врегулювання питання з середніми витратами: 0,65.

Врегулювання питання з великими витратами: 0,15.

Зверніть увагу на те, що в сумі ці ймовірності складають 0,90, при цьому залишається ймовірність в 10%, що справа буде вирішуватися судом (тобто врегулювання без судового розгляду не відбудуться).

Ці величини суб’єктивної ймовірності представляють найкращу з доступних вам оцінок правдоподібності різних варіантів розвитку подій, і з них випливає, що, ймовірно, питання можна буде врегулювати з середнім рівнем витрат. Вам стає легше від того, що найбільш ймовірна сума, необхідна для врегулювання, істотно менше $5 000 000, про які йшла мова спочатку. Тепер можна скористатися цими значеннями ймовірності для того, щоб прийняти непрості рішення щодо типу та обсягу доказів, які можна привести на свій захист.

Аналіз методом Байеса і частотний аналіз

В **методі Байєса**, що застосовується в статистичному аналізі, суб’єктивні ймовірності використовуються формально, в математичних обчисленнях. На рис. 4.3.3 (вгорі) показано, як за допомогою методу Байеса дані, що спостерігаються, використовуються разом з апріорними ймовірностями і з моделлю (математичним описом ситуації) для обчислення результатів.

Існує також інший підхід, так званий **частотний аналіз**. На перший погляд такий підхід видається більш об’єктивним, оскільки відповідні обчислення ґрунтуються лише на спостережуваних даних і моделі. Однак при більш уважному розгляді (рис. 4.3.3, внизу) стає зрозуміла замаскована роль суб’єктивних суджень, що визначають вибір плану дослідження (який і призводить до появи даних) і вибір моделі.

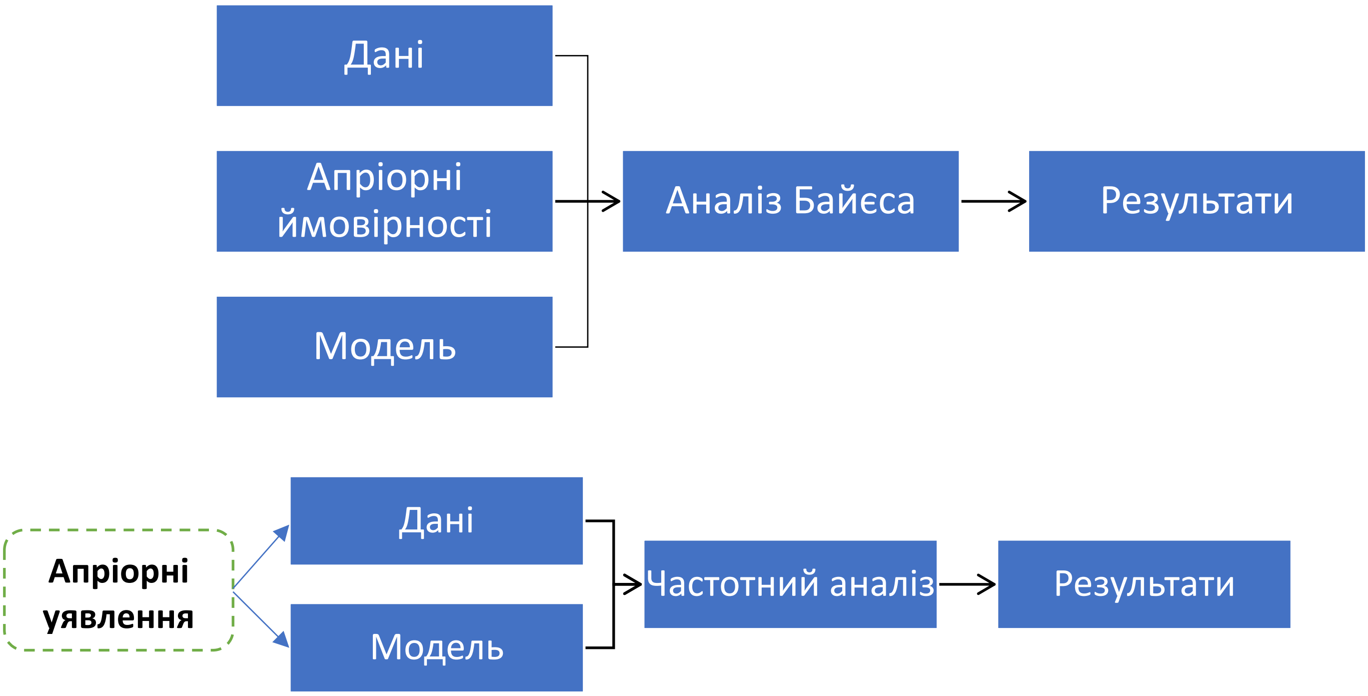


Рис. 4.3.3. Загальні підходи метода Байєса і частотного методу статистичного аналізу. В обох підходах застосовується завжди апріорна суб’єктивна інформація. Байєсівський підхід заснований на безпосередньому використанні цієї інформації для обчислення результатів. У частотному аналізі завжди апріорна інформація використовується неформально, щоб створити основу для більш «об’єктивних» обчислень

Аналіз на основі методу Байєса може виявитися корисним в складних статистичних дослідженнях в бізнесі, особливо в тих випадках, коли в дослідженні бере участь експерт, що надає засновану на об’єктивних судженнях достовірну інформацію, яка включається в дослідження поряд з існуючими даними. Якщо таку експертну оцінку можна ефективно використовувати при плануванні дослідження і виборі моделі, то необхідності в проведенні складних обчислень за методом Байеса не виникає. Однак в разі досить важливого дослідження і досить точної експертної оцінки слід розглянути питання і про використання методу Байеса.

4.4. Як поєднати інформацію про декілька подій

Розуміння ймовірностей дає дві великі переваги. По-перше, те, про що ми вже говорили: оцінку правдоподібності події як вираженої числом ймовірності і визначення відповідного випадкового експерименту. Це великий крок на шляху до розуміння неясної, невизначеної ситуації. Друга перевага полягає в можливості розгляду комбінацій подій та визначенні того, як, використовуючи знання ймовірностей деяких подій, можна визначити ймовірності інших подій, що представляють, можливо, більший інтерес і мають більше значення.

Отже, наша мета полягає в тому, щоб з наявною у нас інформацією за допомогою основних правил роботи з можливостями отримати нову інформацію. Якщо говорити строго, така результуюча інформація не буде дійсно «новою», оскільки вона логічно випливає з уже наявної. Уміння швидко робити такі логічні висновки допоможе використовувати сценарії виду, що буде, якщо ... для прийняття бізнес-рішень.

Діаграма Венна дозволяє побачити всі можливості

Діаграма Венна – це малюнок, який містить всю безліч можливих результатів (вибірковий простір) у вигляді прямокутника з розміщеними в ньому подіями, часто у вигляді кола або овалів, подібно до того, як це показано на рис. 4.4.1. Кожна точка всередині прямокутника являє можливий результат. Кожне виконання випадкового експерименту призводить до випадкового вибору однієї з точок (отримання результату); якщо ця точка потрапляє в коло, що позначає подію, то дана подія «відбулася». В іншому випадку подія не відбувається.

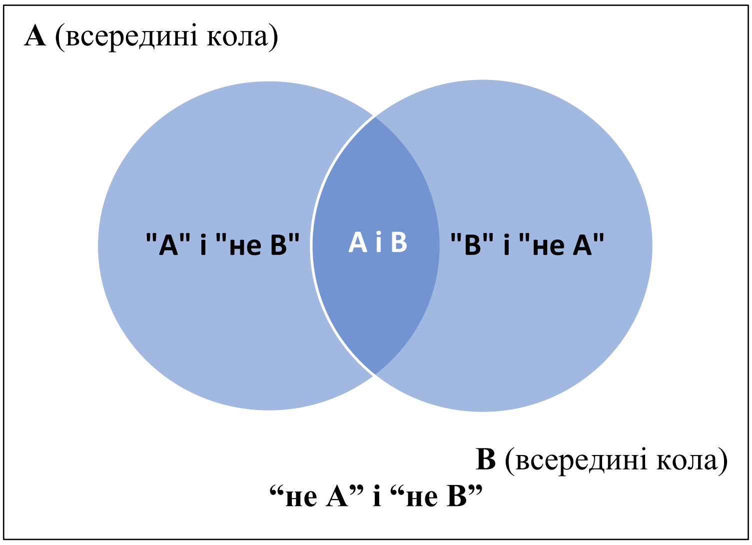


Рис. 4.4.1. Діаграма Венна з двома подіями, кожне з яких показане у вигляді кола. Зверніть увагу на те, що частина точок (результатів) потрапляє в обидва кола, частина знаходиться поза обома колами, а частина розташовується тільки в одному колі і не належить іншому. Це зручне наочне представлення всіх можливостей для випадку двох подій

НЕ подія

Доповненням деякої події (також часто використовують термін **протилежна подія**) називають таку подію, яке відбувається тільки в разі, коли перша подія не відбувається. Кожна подія має своє доповнення. Нижче наведено кілька прикладів подій і їх доповнень.

Подія	**Доповнення події**
Успішний вихід товару на ринок	Неуспішна вихід
Зростання курсу акцій	Курс акцій не змінюється або падає
Товар має прийнятну якість	Якість товару є неприйнятною

Якщо подія є певним набором результатів, то його доповнення включає всі ті результати вибіркового простору, які не входять до цього набору. Це ілюструє діаграма Венна на рис. 4.4.2.

При побудові доповнення події необхідно переконатися в тому, що розглянуті всі можливі результати. Наприклад, додаток до події "зростання цін" описується не як "зниження цін", оскільки необхідно також врахувати і можливість відсутності зміни цін.

«не А» синього кольору

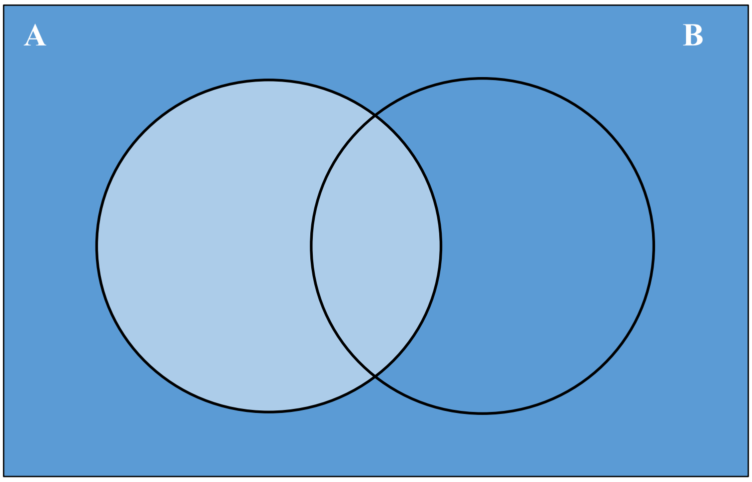


Рис. 4.4.2. Діаграма Венна з показаним на ній доповненням «не А». Доповнення події А є подія, яка відбувається тоді (і тільки тоді), коли подія А не відбувається

Правило доповнення (правило НЕ)

Оскільки подія і його доповнення разом представляють всі можливі результати, причому дублювання відсутнє, сума ймовірностей цих двох подій дорівнює 1. Таким чином, для події, яку ми позначимо А, і його доповнення, позначеного «не А», ми отримуємо наступне правило:

$$\text{Ймовірність A} + \text{Ймовірність «не A»} = 1.$$

Ця формула дозволяє визначити ймовірність доповнення події.

Правило доповнення

$$\text{Ймовірність «не A»} = 1 - \text{ймовірність A}$$

Якщо, наприклад, відомо, що ймовірність успішного випуску товару на ринок дорівнює 0.4, ймовірність додаткової події «неуспішний випуск товару на ринок» дорівнює $1 - 0{,}4 = 0{,}6$.

Правило доповнення – перший приклад використання методу отримання «нової» інформації про ймовірність (в даному випадку – про ймовірність додаткової до вихідної події) з фактів, які вже відомі (ймовірність вихідної події).

Одна подія ТА інша

Будь-які дві події можна об’єднати і таким чином отримати нову подію, яку називають їх **перетином** (часто також використовують термін **добуток** подій). Перетин двох подій спостерігається кожного разу, коли обидві події, і те й інше, відбуваються в результаті виконання випадкового експерименту.

Коли дві події розглядаються в вигляді наборів результатів, їх перетин є новим набором, що включає всі ті результати, які входять одночасно в обидва вихідних набори. Перетин показано на рис. 4.4.3.

«А і В» (темно-синього кольору)

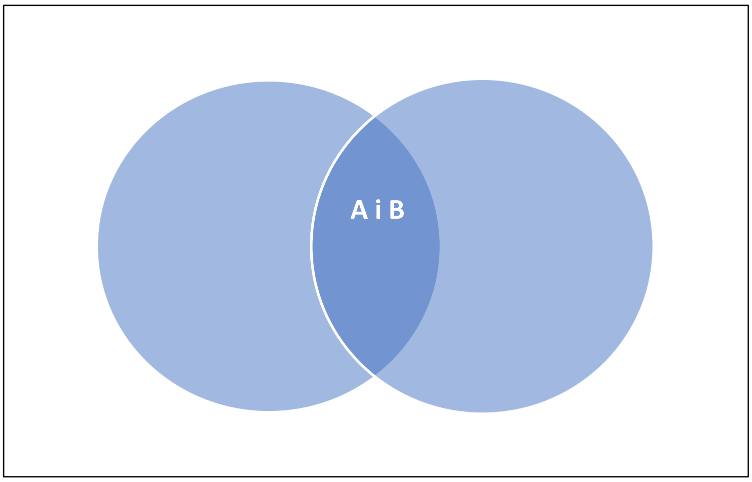


Рис. 6.4.3. Діаграма Вічна для перетину подій «А і В». Ця подія відбувається тоді (і тільки тоді), коли в результаті одного виконання випадкового експерименту відбуваються і подія А, і подія В

Уявімо собі, наприклад, що менеджер фірми, що здійснює комерційні поставки деякого товару, розглядає питання про те, що слід робити, якщо в наступному році буде спостерігатися спад в економіці і конкуренти відреагують на нього зниженням цін. Випадковий експеримент в цьому випадку описується так: «в кінці наступного року розглядаємо і реєструємо стан економіки і цінову політику конкурентів». Дві події тут – це «спад» (який або буде спостерігатися, чи ні) і «зниження цін конкурентами». Нас цікавить нова подія «спад і зниження цін конкурентами». Для розробки політики корисно розглянути, наскільки правдоподібна така нова можливість розвитку ситуації.

Якщо дві події не можуть спостерігатися разом

Дві події, які не можуть відбуватися одночасно, називаються взаємовиключними, або **несумісними між собою подіями**. Не можна, наприклад, завершити рік з отриманням одночасно «дуже високим» і «дуже низьким» прибутком. Неможливо також, щоб ваш наступний прийнятий на роботу співробітник виявився одночасно «чоловіком, представником національної меншини, з докторським ступенем» і «жінкою, інженером і членом бейсбольної асоціації». На рис. 4.4.4 показана діаграма Венна для двох несумісних подій. Вона має вигляд двох неперетинних кіл.

Дві несумісні події

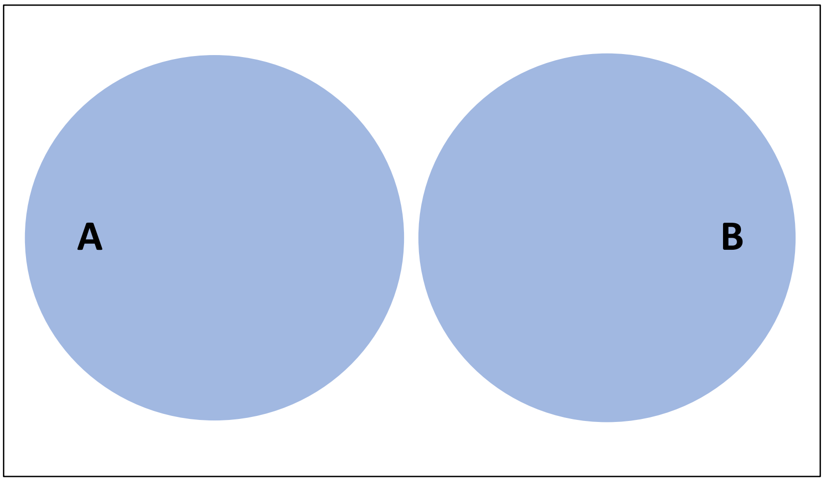


Рис. 4.4.4. Діаграма Венна для двох несумісних подій, які не можуть відбутися одночасно в результаті одного випадкового експерименту. Оскільки кола не перетинаються, точок, спільних для обох подій, не існує

Правило перетину (I) для несумісних подій

Оскільки дві несумісних події не можуть відбуватися одночасно, ймовірність їх перетину дорівнює нулю. Проблеми з визначенням перетину двох несумісних подій не виникає: це перетин цілком справедливо можна розглядати як таку подію, яка ніколи не відбувається. Тому ймовірність такої події дорівнює нулю.

Правило перетину подій (і) для двох несумісних подій

$$\text{Ймовірність «A і B»} = 0$$

Одна подія АБО інша

Будь-які дві події можна об’єднати і отримати нову подію, яке називають їх **об’єднанням** (часто також використовують термін **сума** подій). Така подія спостерігається кожного разу, коли одна *або* інша вихідна подія (або обидві ці події) відбуваються в результаті одного виконання випадкового експерименту.

Якщо дві події представлені наборами результатів, то об’єднання цих подій є новим набором, що складається з усіх результатів, що містяться в кожному (або обох) вихідних наборах. Ілюстрація цього твердження наведено на рис. 4.4.5.

«А або В» (синього та темно-синього кольору)

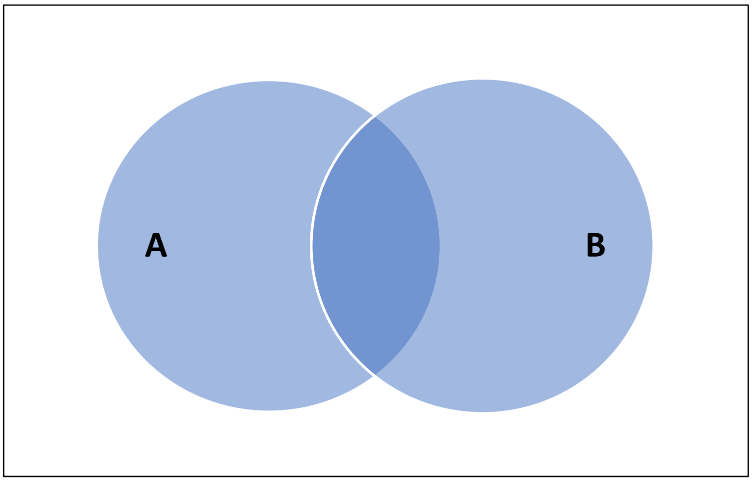


Рис. 4.4.5. Діаграма Венна, що ілюструє об’єднання подій «А або В». Ця подія спостерігається кожного разу, коли в результаті одного виконання випадкового експерименту відбувається або подія А, або подія В, або обидві ці події

Уявімо собі, наприклад, що термін трудового контракту робочих вашої фірми добігає кінця і ви очікуєте, що вони зажадають великої добавки до зарплати і додаткових пільг. Довіряючи запропонованому менеджерами найбільш правдоподібному варіанту нового контракту, ви хочете оцінити його можливі наслідки, щоб передбачити виникнення непередбачених обставин.

Зокрема, ваші робочі можуть оголосити страйк. Інша можливість полягає в спаді робочої активності. Будь-яка з таких подій створить проблеми. Випадковий експеримент в даному випадку полягає в тому, щоб «почекати і зареєструвати реакцію робітників на запропонований менеджерами проект контракту». Дві розглянуті події тут – це «страйк» і «зниження темпу роботи». Зрозуміло, що об’єднання цих двох подій, «страйк або зниження темпу роботи», відображає те широке коло проблем, які зажадають вашої уваги.

Правило об’єднання (АБО) для несумісних подій

Якщо дві події несумісні (тобто вони не можуть відбутися одночасно), можна точно визначити ймовірність їх об’єднання, склавши ймовірності цих двох подій.

Оскільки дві несумісних події не мають результатів, які могли б спостерігатися одночасно, при додаванні ймовірностей цих подій кожен з результатів враховується тільки один раз. Таким чином, ймовірність об’єднання двох несумісних подій є сумою ймовірностей кожного з них.

Правило об’єднання (або) для несумісних подій

$$\text{Ймовірність «А або В»} = \text{ймовірність А} + \text{ймовірність В}$$

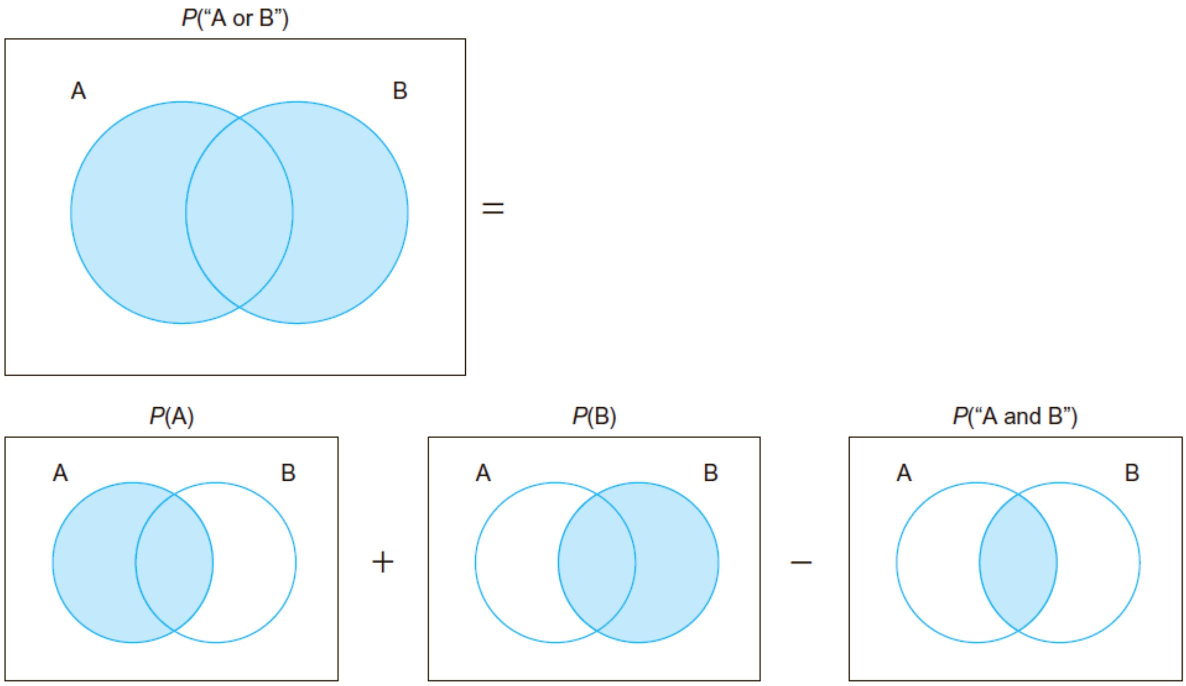
Знаходження АБО з І та навпаки

Якщо відомі ймовірності трьох різних подій, А, В і «А і В», можна знайти ймовірність «А або В». Ця ймовірність знаходиться складанням двох ймовірностей базових подій з наступним відніманням ймовірності їх перетину. Віднімання виключає ті результати, які при додаванні враховуються два рази, як показано на рис. 4.4.6. Імовірність події «А або В» виражається наступним співвідношенням:

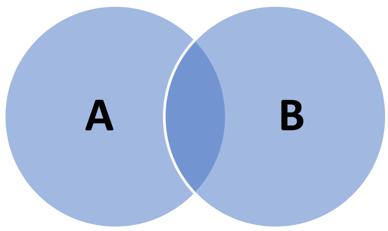
Знаходження АБО з І

$$\text{Ймовірність «А або В»} = \text{ймовірність А} + \text{ймовірність В} - \text{ймовірність «А і В»}$$

Уявімо собі, що попередній досвід роботи ремонтної майстерні свідчить про те, що ймовірність того, що в несправному приладі перегорів запобіжник, становить 6%, а ймовірність обриву проводу становить 4%.

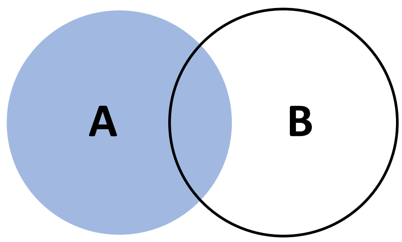


P («А або В»)



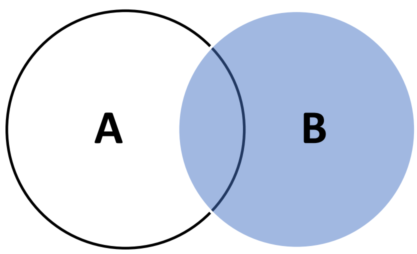
=

P(A)



+

P(B)



—

P(«A або B»)

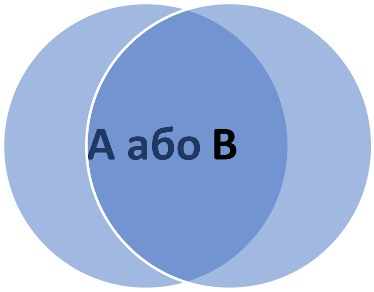


Рис. 4.4.6. Діаграма Венна, що ілюструє обчислення ймовірності події «A або B». Спочатку складаємо ймовірність події A і ймовірність події B. Потім віднімаємо те, що при складанні було враховано двічі, а саме ймовірність події «A і B»

Припустимо також, що в 1% випадків всіх звернень прилади надходили в ремонт з перегорілим запобіжником і обривом проводу. Володіючи цими відомостями, можна легко знайти ймовірність того, що в конкретному зданому в ремонт приладі присутня одна з цих несправностей (або обидві).

Імовірність того, що «перегорів запобіжник або є обрив проводу» дорівнює

$$0{,}06 + 0{,}04 - 0{,}01 = 0{,}09.$$

Таким чином, у випадку 9% звернень в майстерню прилад має одну з цих несправностей (або обидві відразу).

Шляхом алгебраїчних перетворень можна також знайти вираз для обчислення ймовірності «A і B» через ймовірності A, B і «A або B»:

Знаходження І з АБО

Ймовірність «A і B» = ймовірність A + ймовірність B − ймовірність «A або B».

Таким чином, знаючи будь-які три з цих чотирьох ймовірностей (ймовірностей подій A, B, «A і B» і «A або B»), можна знайти четверту, невідому ймовірність.

В яких випадках виявляються корисними ці формули? Один з випадків їх застосування полягає в тому, щоб взяти в якості вихідної відомі відомості про можливості і обчислити за відповідною формулою ймовірність іншої події, яка, можливо, представляє більший інтерес або має велику важливість. Інший випадок – якщо ми хочемо переконатися, що інформація, на якій ґрунтуються рішення, логічно несуперечлива. Припустимо, наприклад, що у нас є можливості для подій A і B, обчислених як відносні частоти на основі даних минулих спостережень. Планується використовувати суб'єктивну оцінку ймовірності подій «A і B» і «A або B». При цьому може виявитися корисним переконатися в тому, що зв'язок між чотирма розглянутими величинами імовірності не суперечить наведеним вище формулам.

Одна подія ЗА УМОВИ іншої: облік наявної інформації

Розглядаючи завдання визначення ймовірності настання події з урахуванням того, що деяка інша подія вже відбулася, ми приходимо до поняття **умовної ймовірності** першої події *ЗА УМОВИ настання* другої події. (Всі прості ймовірності, про які йшла мова до цих пір, можна назвати безумовними ймовірностями – це дозволить уникнути зайвої плутанини). Наведемо кілька прикладів умовних ймовірностей.

1. Припустимо, ваша місцева команда може виграти важливу гру з імовірністю 70%. Тепер введемо в розгляд нову інформацію, відповідну події «після закінчення першого тайму команда виграє». Залежно від того, чи реалізується ця подія, ймовірність перемоги змінюється. Імовірність перемоги команди за умови, що вона дійсно виграє після першого тайму, виявиться вище і буде дорівнювати, наприклад, 85%. Ця ймовірність 85% являє собою ймовірність події «команда здобула перемогу» за умови настання події «команда виграє після першого тайму». Імовірність виграшу за умови, що команда програє після першого тайму, буде менше, ніж загальна ймовірність перемоги, що складає 70%; нехай, наприклад, ця ймовірність оцінюється в 35%. Дана величина є ймовірність події «команда здобула перемогу» за умови настання події «команда програє після першого тайму».

2. На успіх нового комерційного проекту впливає багато факторів. Для того щоб описати їх дію, можна розглянути вплив на умовну ймовірність успіху різних чинників, таких як сприятливі чи несприятливі економічні умови

і дії конкурентів. Економічне зростання буде підвищувати шанси на успіх; це означає, що ймовірність успіху за умови економічного зростання буде більше, ніж загальна (безумовна) ймовірність успіху.

Правило обчислення умовної ймовірності при наявності додаткової інформації

Для знаходження умовної ймовірності події «успіх» за умови настання події «економічне зростання» необхідно обчислити, яка частина сценаріїв події «економічне зростання» буде відповідати остаточному результату «успіх». Ця величина дорівнює результату ділення ймовірності події «успіх і економічне зростання» на ймовірність події «економічне зростання».

Описане вище відповідає загальним правилам обчислення умовних ймовірностей. Імовірність (умовна) події А за умови події В (тобто за умови, що подія В настала), якщо ймовірність події В позитивна, обчислюється таким чином.

Умовна ймовірність

$$\text{Ймовірність A за умови B} = \frac{\text{Ймовірність "A і B"}}{\text{Ймовірність B}}$$

Слід розрізняти ймовірність А за умови В (яка описує ймовірність події А, обчислену з урахуванням того, що має місце подія В) і ймовірність В за умови А (яка описує істотно іншу ситуацію – ймовірність настання події В, обчислену з урахуванням того, що має місце подія А). Для повноти картини наведемо тут і формулу для обчислення ймовірності події В за умови події А.

$$\text{Ймовірність B за умови A} = \frac{\text{Ймовірність "A і B"}}{\text{Ймовірність A}}$$

Наприклад, якщо ймовірність того, що в несправному приладі перегорів запобіжник, становить 6%, ймовірність обриву проводу дорівнює 4%, а ймовірність наявності обох цих несправностей виявляється рівною 1%, можна розрахувати умовну ймовірність поломки дроту за умови того, що в приладі перегорів запобіжник:

$$\text{Умовна імовірність поломки дроту за умови, що перегорів запобіжник} =$$
$$= \frac{\text{Ймовірність "поломка дроту і перегорів запобіжник"}}{\text{Ймовірність перегорання запобіжнику}} = \frac{0{,}01}{0{,}06}$$
$$= 0{,}167.$$

В цьому випадку перегоряння запобіжника означає підвищення ймовірності того, що в несправному приладі присутній також і обрив проводу.

Така умовна ймовірність свідчить про те, що з усіх приладів, в яких згорів запобіжник, 16,7% зазвичай мають ще й обрив проводу. Зверніть увагу на те, наскільки ця умовна ймовірність більше, ніж безумовна ймовірність обриву проводу (4%). Це пов'язано з тим, що при розгляді приладів зі згорілим запобіжником більше не йдеться про «всі прилади»; тепер інтерес представляють лише мало хто з них, а саме 6% всіх приладів. Імовірність «обриву проводу» при цьому зростає з 4 до 16,7%, що і відображає врахування цієї додаткової інформації.

На рис. 4.4.7 показана діаграма Венна для розглянутого випадку. Зверніть увагу на те, що безумовні ймовірності всередині кожного з кіл представлені коректними вихідними значеннями (0,06 для згорілого запобіжника і 0,04 для поломки дроту). Оскільки відомо, що в приладі перегорів запобіжник, то при розгляді умовної ймовірності саме відповідне цій події коло стає новим вибірковим простором (з огляду на те, що інших можливих результатів немає). У цьому новому вибірковому просторі всі існуючі раніше ймовірності необхідно ділити на 0,06 (безумовна ймовірність того, що згорів запобіжник), оскільки тепер результати цієї події на 100% представляють нову ситуацію.

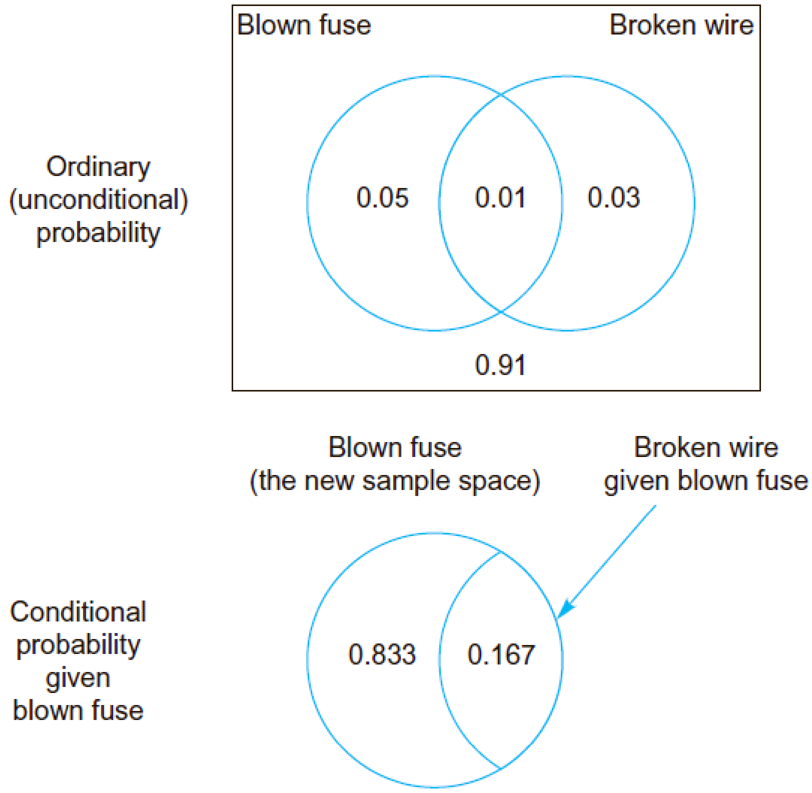


Рис. 6.4.7. Діаграма Венна для безумовної ймовірності (вгорі) і умовної ймовірності за умови згорілого запобіжника (внизу). При наявності цієї інформації має сенс розглядати тільки коло, що відповідає події «запобіжник згорів»; таким чином, це коло стає новим повним вибірковим простором. Ділення початкової ймовірності на 0,06 (ймовірність перегорання запобіжника) дає значення умовних ймовірностей в новому вибірковому просторі

Умовні ймовірності для несумісних подій

Оскільки дві несумісних події не можуть спостерігатися разом, з інформації про те, що одна з них відбулася, слідує, що друга не відбулася. Це означає, що умовна ймовірність першої події за умови настання другої дорівнює нулю, звичайно, якщо ймовірність другої події не дорівнює нулю.

Умовна ймовірність для двох несумісних подій

Імовірність А за умови В = 0,

якщо ймовірність події В не дорівнює 0.

Незалежні події

Дві події називаються **незалежними**, якщо інформація про одну з них не змінює існуючу до отримання цієї інформації ймовірність іншої події. Якщо інформація про деяку подію *змінює* оцінку ймовірності іншої події, такі події називаються **залежними**. Наприклад, події «бути курцем» і «захворіти на рак» виявляються залежними, оскільки відомо, що курці частіше хворіють на рак, ніж ті, хто не палять. З іншого боку, події «інвестицій цінні папери вашого портфелю завтра виростуть в ціні» і «завтра вранці ви проспите» є незалежними, оскільки той факт, що ви проспите, ніяк не вплине на ціни фондового ринку.

Формально незалежність подій можна описати таким чином: події A і B є незалежними, якщо ймовірність A дорівнює умовній ймовірності A за умови B.

Події A і B незалежні, якщо

$$\text{Ймовірність A} = \text{ймовірність A за умови B}$$

Події A і B залежні, якщо

$$\text{Ймовірність A} \neq \text{ймовірність A за умови B}$$

Існує кілька способів визначення того, чи є дві події незалежними. При цьому, як правило, необхідно застосовувати відповідні формули; «чисто умоглядні» міркування на тему про те, чи повинні події бути незалежними або залежними, можна використовувати тільки як останній засіб у разі, коли інформації для використання формул виявляється недостатньо. Нижче наведені три формули. Використовувати слід формулу, що найбільш підходить для конкретної наявної інформації, оскільки всі три формули повинні (відповідно до алгебраїчних правил) завжди давати однакові результати.

Події A і B незалежні, якщо виконується одна з наступних співвідношень:

$$\text{Ймовірність A} = \text{ймовірність A за умови B;}$$

$$\text{Ймовірність B} = \text{ймовірність B за умови A;}$$

$$\text{Ймовірність A і B} \neq \text{ ймовірність A } * \text{ ймовірність B.}$$

Третя формула дозволяє знайти ймовірність "A і B" для випадку двох подій, про які відомо, що вони незалежні. Однак в разі залежних подій ця формула дає невірний результат.

Приклад. Жінки на керівних посадах

У корпораціях Сієтла (США), які налічують 500 і більше співробітників, працює 468 керівників. З них 30 керівників – жінки. Якщо скористатися підходом до визначення ймовірності на основі відносної частоти, можна сказати, що умовна ймовірність того, що жінка працює на керівній посаді, становить 30 / 468 = 0,064 (тобто 6,4% жінок займають керівні посади). В цілому серед всього населення жінки зустрічаються з ймовірністю (безумовною) 51,2%. Оскільки ймовірність того, що конкретна людина належить до числа жінок, змінюється при обліку додаткової інформації про «робота на керівній посаді» від 51,2% до всього лише 6,4%, дані події не є незалежними. Це означає, що події «бути жінкою» і «займати керівну посаду» виявляються залежними. Зверніть увагу на те, що отриманий висновок випливає з наведених вище правил (описаних відповідними рівняннями) і чисел, а не просто із загальних міркувань з досліджуваного питання.

Той факт, що дані події залежні, відображає історичні тенденції нерівноправності статей для даної місцевості і даного часу: чоловікам більшою мірою властиве бути керівниками, ніж жінкам (ймовірності стати керівником для чоловіків і жінок розрізняються), а керівники частіше виявляються чоловіками, ніж жителі цієї країни в цілому (ймовірність бути чоловіком для керівника і для жителя країни розрізняються).

Таке дослідження ймовірності показує, що нерівність статей існує, однак при цьому не прояснює його причини. Якщо подивитися на виражені в процентах кількісні результати, ясно видно, що тут є залежність, яка вказує на існування нерівності статей. Такі відмінності можуть бути пов’язані з дискримінацією при прийомі на роботу, з обмеженнями на кваліфікацію для кандидатів на відповідну посаду або пояснені деякими іншими причинами; аналіз ймовірностей сам по собі не вказує на те, яке з пояснень є дійсно вірним.

Приклад. Ринкова ефективність

Про фінансові ринки кажуть, що вони ефективні, якщо поточні ціни відображають всю наявну інформацію. Відповідно до теорії ринкової ефективності неможливо отримати додатковий прибуток на основі аналізу цінової інформації за попередній період, оскільки ця інформація вже відображена в існуючих цінах. Інший висновок полягає в тому, що ціни повинні змінюватися випадковим чином, оскільки будь-які систематичні зміни ринок враховує.

Один із способів перевірки ефективності ринку полягає в тому, щоб простежити існування зв'язку між змінами цін вчора і сьогодні. Якщо дві події «ціна росла вчора» і «ціна зростає сьогодні» незалежні, це буде підтвердженням ефективності ринку. В такому випадку знання вчорашніх цінових тенденцій не допомагає в прогнозі тенденцій, які існують на ринку сьогодні.

У той же час, якщо ці події залежні, то ринок неефективний. Так, наприклад, якщо ринок має певну «інерцію» і виявляє тенденцію до продовження зростання або зниження цін, відомості про вчорашні підвищення на ринку роблять більш правдоподібним сьогоднішнє зростання цін. Однак подібне твердження є несумісним з теорією ринкової ефективності, відповідно до якої ринок врахує заздалегідь таке подальше зростання і відмінності між безумовною та умовною ймовірностями спостерігатися не будуть.

Правило перетину (I) для незалежних подій

Як уже згадувалося раніше, для незалежних подій (і тільки для незалежних подій) ймовірність події «A і B» можна знайти простим множенням ймовірностей двох розглянутих подій.

Правило перетину (I) для незалежних подій

$$\text{Імовірність «A і B»} = \text{ймовірність A} * \text{ймовірність B}.$$

Приклад. Оцінка ризику для великої електростанції

Оскільки на великих електростанціях можливе виникнення аварій, вони представляють для навколишнього середовища і населення певну потенційну небезпеку. Незважаючи на те, що така потенційна небезпека дуже мала, засоби масової інформації час від часу нагадують нам про те, що аварії все-таки відбуваються. Припустимо, що ймовірність перегріву на деякій електростанції становить 0,001 (одиниця до тисячі) для одного дня, а ймовірність відмови резервної системи охолодження дорівнює 0,000001 (одиниця на мільйон). Якщо припустити, що ці події незалежні, ймовірність «великої аварії» (тобто настання події «перегрів і відмова резервної системи охолодження») складе 0,001 * 0,000001 = 0,000000001 (одиниця на мільярд), що часто вважається прийнятно малою ймовірністю.

Однак припущення про те, що ці події незалежні, може виявитися і таким, що не відповідає істині. Може здаватися, що безпосереднього зв’язку між відмовою однієї системи (що призводить до перегріву) і відмовою іншої (в результаті чого система позбавляється резервного охолодження) немає. Однак незалежність не визначається суб’єктивними оцінками; для того, щоб зробити висновок про незалежність подій, необхідно досліджувати самі ймовірності. При цьому цілком може виявитися, що події, які розглядаються – залежні; так, наприклад, може статися природна катастрофа (повінь або землетрус), що призводить до виходу з ладу обох систем. Якщо події, що розглядаються, не незалежні, оцінка «одиниця на мільярд» ймовірності виникнення великої аварії може виявитися хибною і реальна ймовірність буде набагато більше.

Зв’язок між незалежними і несумісними подіями

Необхідно чітко розрізняти незалежні і несумісні події. Дві незалежних події не можуть бути несумісними (за винятком випадку, коли одна з них має нульову ймовірність). У свою чергу, дві несумісних події не можуть виявитися незалежними (знову ж таки, за винятком випадку, коли ймовірність однієї з них дорівнює нулю). Якщо ймовірність однієї з подій (або обох подій) дорівнює нулю, події є і незалежними, і несумісними.

4.5. Як вирішувати імовірнісні задачі

Існують два способи вирішення завдань на знаходження ймовірності: простий і складний. Складний спосіб полягає в творчому застосуванні правильної комбінації викладених раніше правил, простий спосіб – в тому, щоб побудувати дерево ймовірностей і знайти відповіді прямо на такому великому малюнку. Інший корисний метод, що допомагає розібратися в ситуації, пов’язаний з побудовою таблиць спільних ймовірностей. І ще один метод, який ми вже розглянули, полягає в використанні діаграм Венна. Незалежно від вибору способу – простого або складного – відповідь повинна бути однаковою.

Дерево ймовірностей

Дерево ймовірностей – це малюнок, на якому показані безумовні і умовні ймовірності для комбінацій двох і більше подій. Розглянемо спочатку приклад, для якого дерево ймовірностей вже побудовано, і простежимо деталі його побудови. Дерево ймовірностей тісно пов’язане з деревом рішень, яке широко використовують у фінансах та інших областях комерційної діяльності.

Приклад. Управління підтримкою програмного забезпечення

Підтримка програмного забезпечення – досить складний вид діяльності. Деякі користувачі дзвонять, щоб отримати пораду, як працювати з програмою. Іншим необхідно допомогти вирішити проблеми, з якими вони зіткнулися під час роботи. Уявіть собі, що в якості керівника відділу підтримки ви кількісно описали ймовірності деяких характерних дзвінків користувачів і зобразили свої результати у вигляді дерева ймовірностей, показаного на рис. 4.5.1.

Рис. 4.5.1 містить багато інформації. Будемо розглядати його зліва направо. Перш за все зазначимо, що ймовірність події «користувач роздратований» становить 0,20 (це означає, що 20% всіх, хто звернувся за допомогою, були роздратовані, а 80% – ні).

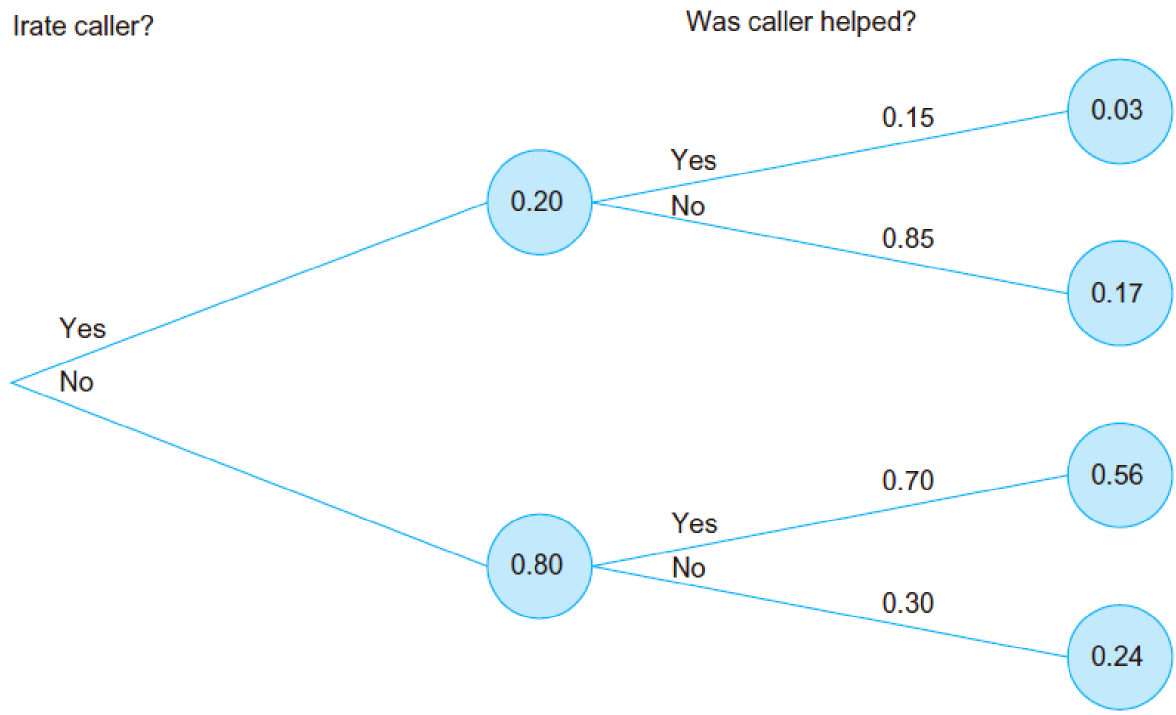


Рис. 4.5.1. Дерево ймовірностей для подій «користувач роздратований» (irate caller) і «користувач отримав допомогу» (was caller helped). Цифрами в кружечках показані ймовірності; інші цифри позначають величини умовних ймовірностей

Умовні ймовірності записані на малюнку над чотирма гілками дерева, розташованими прямо під написом «Чи отримав користувач допомогу?». Зверніть увагу, що 15% роздратованих користувачів допомогу отримали (це ймовірність події «користувач отримав допомогу» за умови події «користувач роздратований»), а 85% роздратованих користувачів допомоги не отримали. Нижче намальовані дві інші гілки. Вони свідчать про те, що допомогу отримали 70% «нероздратованих» користувачів і не отримали допомогу 30% таких користувачів. Явно видно, що відділ підтримки краще порається з наданням допомоги користувачам, які при зверненні не висловлюють свого роздратування (співвідношення користувачів, які отримали допомогу, для цих груп становить 70% до 15%).

Числа в кружках в правій частині рис. 4.5.1 показують ймовірності різних подій, сформованих шляхом комбінування *І* та *НЕ*. Імовірність того, що користувач був роздратований і отримав допомогу, становить 0,03. Це означає, що 3% всіх користувачів були роздратовані І отримали при цьому допомогу. Далі, 17% всіх користувачів були роздратовані І допомоги НЕ отримали; в 56% випадків користувачі НЕ були роздратовані І допомогу отримали, а 24% користувачів НЕ були роздратовані І допомоги НЕ отримали.

З представленого на малюнку дерева можна знайти будь-яку ймовірність, що представляє інтерес. Імовірність події «користувач роздратований» приведена в першому стовпці обведених в кружок чисел (0,20), а ймовірність протилежної події, «не роздратований», показана в гуртку, розташованому безпосередньо нижче. Імовірність події «користувач отримав допомогу» знаходимо складанням двох ймовірностей, поміщених в кружках справа, що характеризують отримання допомоги: 0,03 + 0,56 = 0,59. Умовна ймовірність події «користувач отримав допомогу» за умови настання події «користувач роздратований» приведена над відповідною гілкою дерева, вона дорівнює 0,15. Дещо складніше знайти ймовірність події «користувач роздратований» за умови події «користувач отримав допомогу». Для цього можна скористатися визначенням умовної ймовірності.

Умовна імовірність «користувач роздратований» за умови «користувач отримав допомогу»=

$$= \frac{\text{Ймовірність "користувач роздратований і отримав допомогу"}}{\text{Ймовірність "користувач отримав допомогу"}}$$

$$= \frac{0{,}03}{0{,}03 + 0{,}56} = 0{,}051$$

Таким чином, з усіх користувачів, яким співробітники відділу надали допомогу, роздратованими при зверненні були 5,1%. Інший спосіб знайти цю умовну ймовірність полягає в тому, щоб побудувати нове дерево ймовірностей, що починається не з події «користувач роздратований», а з події «користувач отримав допомогу». Оскільки для того, щоб представити деяку умовну ймовірність, інформацію, що задає умову, необхідно розмістити в дереві перед цією умовною ймовірністю.

Правила побудови дерева ймовірностей

Для побудови дерева ймовірностей перш за все необхідно намалювати саме дерево, потім записати на малюнку всю відому для даного завдання інформацію та, нарешті, скористатися основними правилами, щоб обчислити відсутні числа і закінчити дерево.

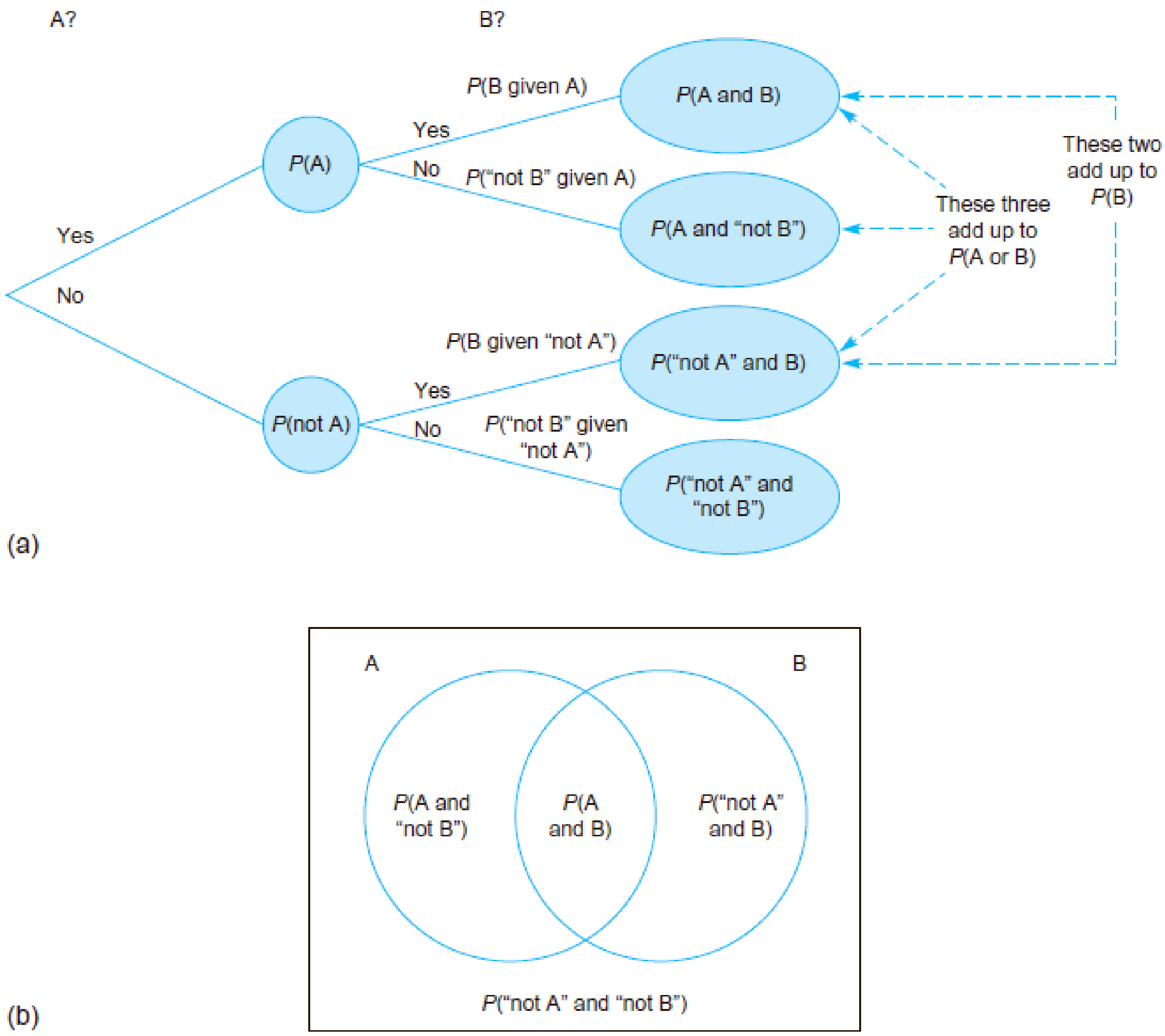


Рис. 6.5.2. а) Дерево ймовірностей з показаними на ньому ймовірностями (в колах і овалах) і умовними ймовірностями (поруч з гілками); b) Діаграма Венна, що включає чотири базові ймовірності. Ці чотири ймовірності відповідають ймовірностям, розміщеним праворуч на кінцях гілок дерева ймовірностей

1. Ймовірності вказуються в кожній з кінцевих точок і обводиться кружками. На кожному рівні дерева сума цих ймовірностей повинна дорівнювати 1 (або 100%). Так, наприклад, на рис. 4.5.1 сума ймовірностей на першому рівні становить 0,20 + 0,80 = 1,00 і на другому рівні: 0,03 + 0,17 + 0,56 + 0,24 = 1,00. Це правило допомагає заповнити один порожній кружок в стовпці, якщо значення всіх інших ймовірностей цього рівня відомі.

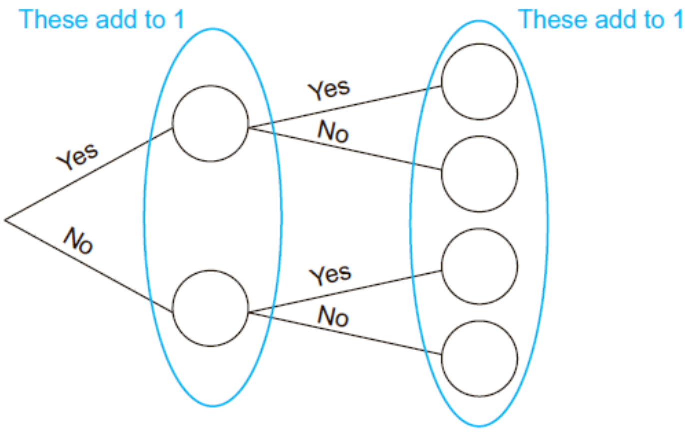


Рис. 4.5.3. Перше правило побудови дерева ймовірності

2. Умовні ймовірності вказуються поруч з кожною з гілок (крім, можливо, гілок першого рівня). Для кожної з груп гілок, що виходять з однієї точки, сума цих ймовірностей також дорівнює 1 (або 100%). Наприклад, на рис. 4.5.1 для першої групи гілок отримуємо 0,15 + 0,85 = 1,00 і для другої групи: 0,70 + 0,30 = 1,00. Це правило дозволяє обчислити одне невідоме значення умовної ймовірності в групі гілок, що виходять з однієї точки.

3. Обведена колом на початку гілки ймовірність, помножена на умовну ймовірність поруч з цією гілкою, дає ймовірність, записану в колі в кінці гілки. Наприклад, на рис. 4.5.1 для верхньої гілки, що йде вправо, маємо 0,20 * 0,15 = 0,03, для наступної гілки: 0,20 * 0,85 = 0,17; аналогічні співвідношення виконуються і для інших двох гілок. Це правило можна використовувати для обчислення одного невідомого значення ймовірності з трьох, що відповідає деякій гілці.

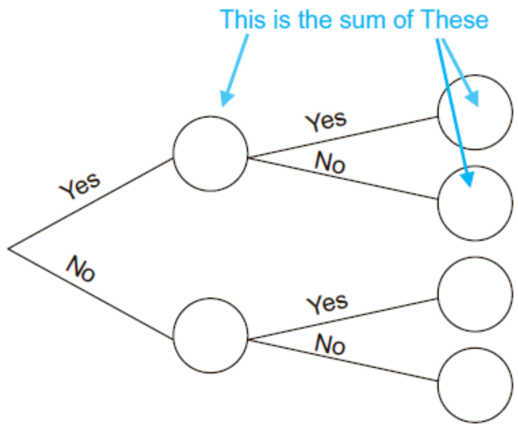


Рис. 4.5.4. Друге правило побудови дерева ймовірності

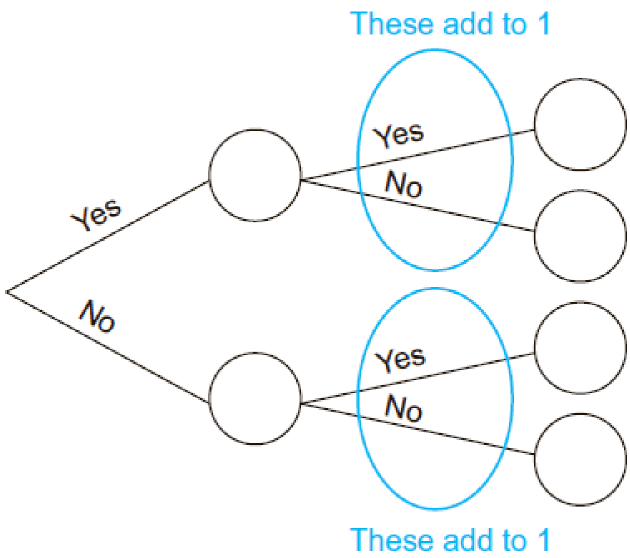


Рис. 4.5.5. Третє правило побудови дерева ймовірності

4. Записане в колі значення ймовірності дорівнює сумі обведених кружками ймовірностей на кінцях всіх гілок, що виходять з цього кола вправо. Так, наприклад, для рис. 4.5.1 з кола зі значенням 0,20 виходять дві гілки, на кінцях яких знаходяться обведені кружками ймовірності, сума яких дорівнює цьому значенню: 0,03 + 0,17 = 0,20. Це правило дозволяє знайти одне невідоме значення ймовірності в групі, що включає цю ймовірність і всі ймовірності на кінцях гілок дерева, що виходять з відповідного кола.

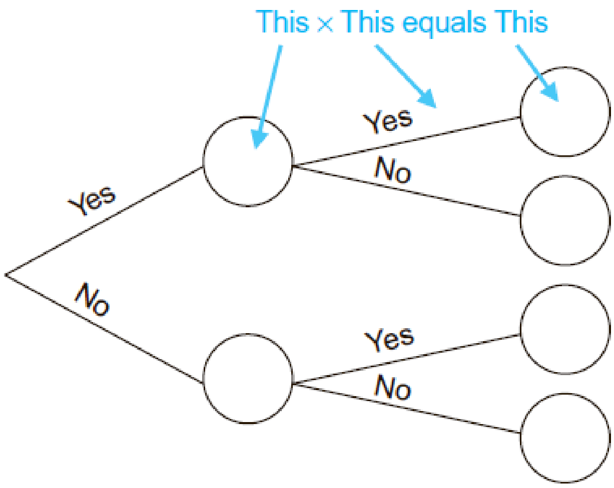


Рис. 4.5.6. Четверте правило побудови дерева ймовірності

Використовуючи ці правила можна, знаючи все, крім одного значення ймовірності для деякої гілки або на деякому рівні, знаходити це невідоме значення. Загальний вигляд такого типу дерева ймовірностей з позначенням змісту всіх чисел, що позначають дерево, наведено на рис. 4.5.2, a. Загальний вигляд відповідної діаграми Венна показаний для порівняння на рис. 4.5.2, b.

Приклад. Перевірка співробітників на вживання наркотиків

Уявіть собі, що ваша фірма збирається провести обов'язкову перевірку всіх співробітників на предмет вживання ними наркотиків. Щоб оцінити необхідні витрати (необхідні для тестування кошти і можливі психологічні проблеми) і очікуваний виграш (підвищення продуктивності праці), прийнято рішення досліджувати різні результати на основі розгляду ситуації для одного працівника. Ви збираєтеся скористатися деревом ймовірностей для обчислення недостатньої, але необхідної інформації.

Процедура тестування неідеальна. Співробітники лабораторії повідомили, що якщо людина вживає наркотики, тест буде «позитивним» з імовірністю 90%. Разом з тим, якщо людина наркотики не вживає, тест покаже «негативний» (тобто «не позитивний») результат в 95% випадків. На основі неофіційного опитування деяких працівників можна очікувати, що приблизно 8% всього персоналу вживають наркотики.

Базове дерево ймовірностей для даної ситуації показане на рис. 4.5.7. Подія «вживає наркотики» вміщено на ньому першою, оскільки частина вихідної інформації представлена як умовна ймовірність, для якої ця подія виступає умовою.

Після нанесення на діаграму вихідної інформації отримуємо дерево ймовірностей, наведене на рис. 4.5.8. Зверніть увагу на те, що величини 90% і 95% відображають умовні ймовірності вздовж відповідних гілок; значення 8% для тих, хто вживає наркотики, є безумовною ймовірністю.

Для заповнення дерева в якості вихідної інформації можна використовувати і значення інших ймовірностей, які не завжди вдається розмістити безпосередньо на дереві. Так, наприклад, якщо б нам повідомили ймовірність (безумовну) для результату «тест позитивний», її не можна було б безпосередньо нанести на малюнок; потрібно було б зробити примітку, що сума значень в першому і третьому кружках на правому краю дорівнює значенню цієї ймовірності.

Скористаємося тепер нашими основними правилами для нанесення відсутніх значень на дерево ймовірностей. Цей процес схожий на розгадування головоломки, і йти тут до правильного результату можна різними шляхами. Так, наприклад, можна скористатися першим правилом, щоб знайти, що величину 0,08 доповнює величина 0,92. Друге правило дає значення умовних ймовірностей, 0,10 і 0,05. І, нарешті, скориставшись третім правилом, отримуємо всі величини умовних ймовірностей для заповнення кружків в правій частині. Остаточно заповнене дерево ймовірностей показано на рис. 4.5.9.

Тепер легко можна побудувати і діаграму Венна, скориставшись для цього результатами з правої частини, показаними на рис. 4.5.9 дерева ймовірностей. Незважаючи на те, що діаграма Венна для отримання результатів не потрібна, її використання також часто може бути корисним.

З дерева ймовірностей (рис. 4.5.9) або діаграми Венна (рис. 4.5.10) легко знайти будь-яку ймовірність або умовну ймовірність. Ось кілька прикладів.

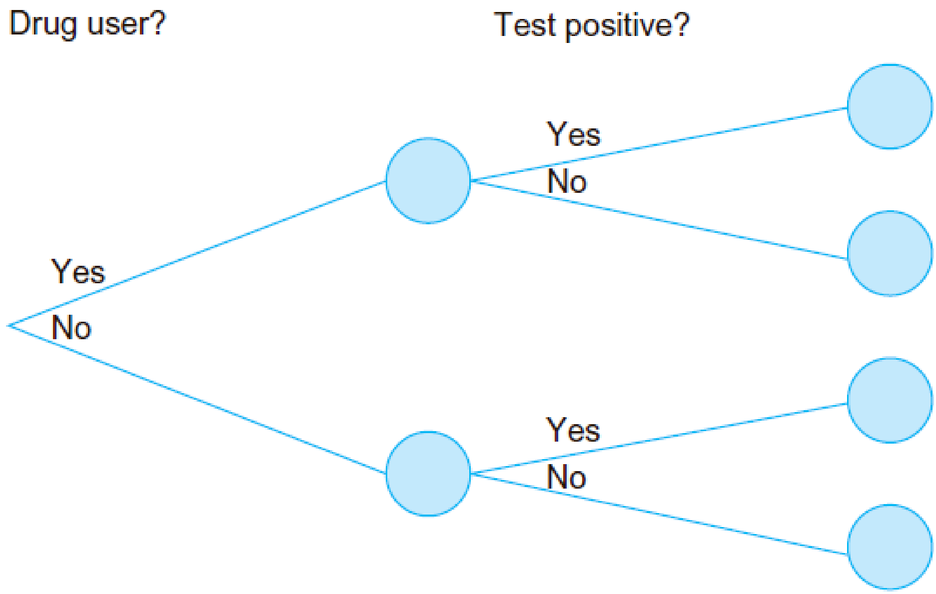


Рис. 4.5.7. Дерево ймовірностей для подій «вживає наркотики» і «тест позитивний» до нанесення на нього вихідної інформації

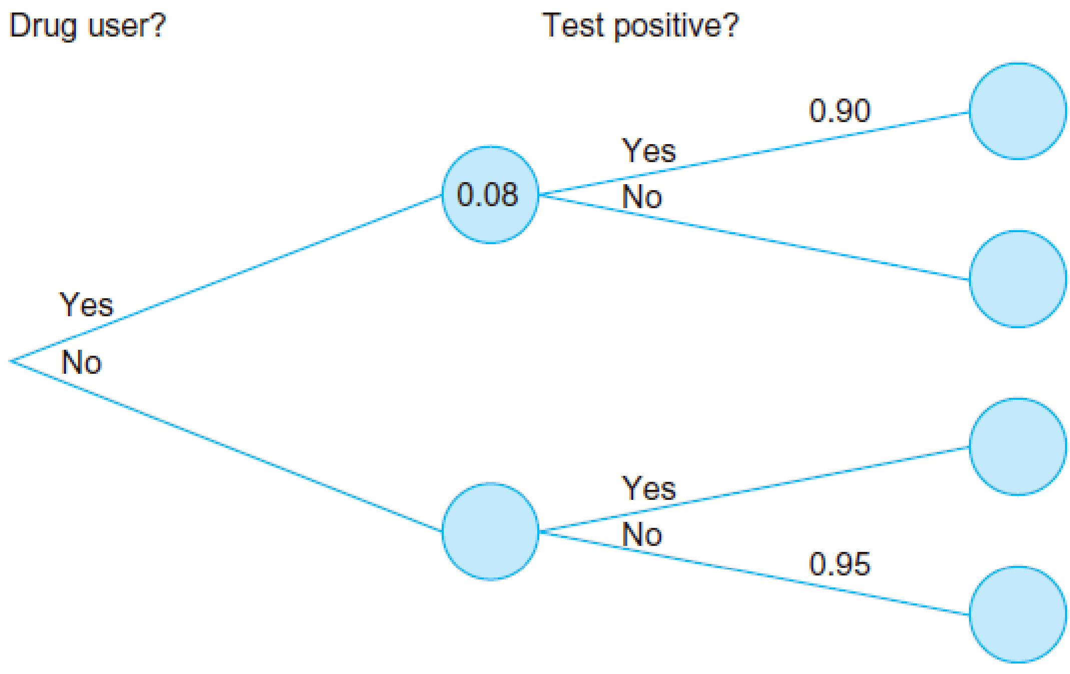


Рис. 4.5.8. Дерево ймовірностей після нанесення на нього вихідної інформації

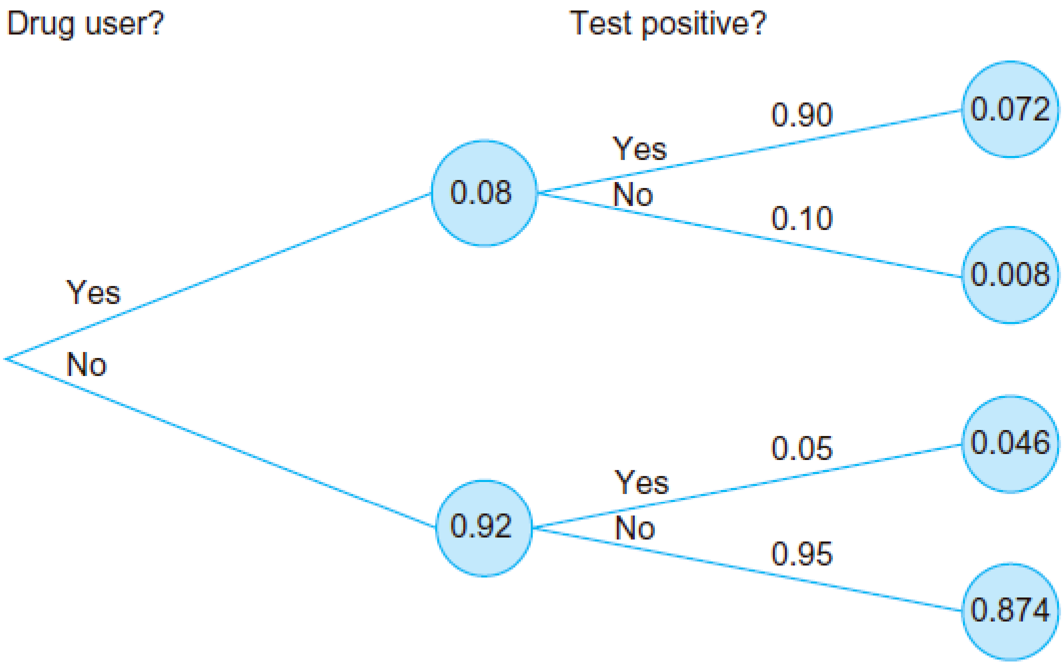


Рис. 4.5.9. Дерево ймовірностей після застосування основних правил

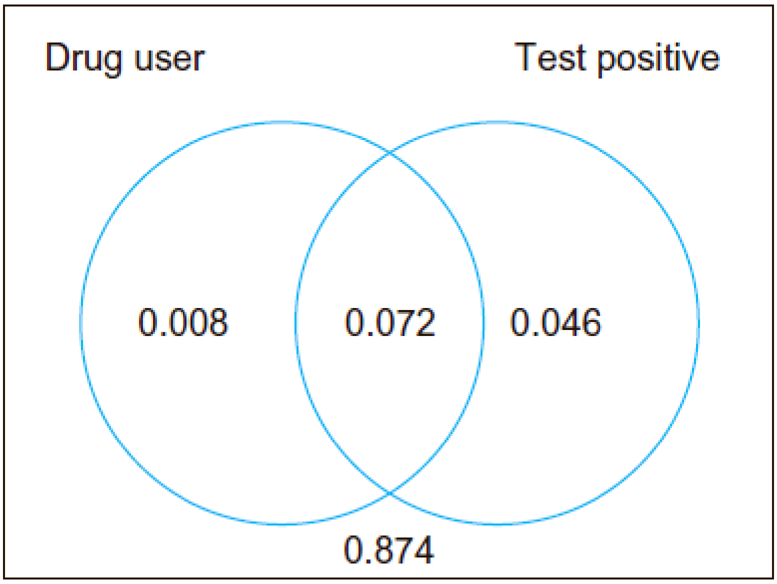


Рис. 4.5.10. Діаграма Венна для прикладу перевірки працівників на вживання наркотиків із зазначенням чотирьох основних ймовірностей

Імовірність «вживає наркотики і тест позитивний» = 0,072.

Імовірність «наркотики не вживає, але тест позитивний» = 0,046.

Імовірність «тест позитивний» = 0,072 + 0,046 = 0,118.

Імовірність «тест позитивний» за умови, що «наркотики не вживає» = 0,05. Інші умовні ймовірності можна знайти, скориставшись відповідними формулами, наприклад:

Умовна ймовірність «наркотики вживає» за умови, що «тест позитивний»=

$$= \frac{\text{Ймовірність "наркотики вживає і тест позитивний"}}{\text{Ймовірність "тест позитивний"}} =$$

$$= \frac{0{,}072}{0{,}072 + 0{,}046} = \frac{0{,}072}{0{,}118} = 0{,}610.$$

Ця умовна ймовірність представляє особливий інтерес. Незважаючи на високу надійність методики тестування (90% позитивних результатів для людей, що вживають наркотики, і 95% негативних для тих, хто їх не вживає), умовна ймовірність того, що в разі позитивного результату тесту людина дійсно вживає наркотики, виявляється рівною лише 61% . Це означає, що серед всіх працівників, для яких тест виявиться позитивним, тільки 61% виявляться тими, хто дійсно вживає наркотики, в той час як інші 39% – ні.

Ось над цим уже потрібно подумати тверезо. Чи є сенс проводити перевірку, в результаті якої 39% людей, для яких тестування вкаже на вживання наркотиків, виявляться звинуваченими в цьому марно? Аналіз ймовірностей має в даному випадку велике значення, оскільки дозволяє трансформувати наявну інформацію в значно більш корисні для прийняття рішень ймовірності.

Приклад. Використання пілотного проекту для аналізу можливого успіху випуску товару на ринок

Припустимо, що ваша фірма збирається випустити на ринок новий товар і на вас лежить відповідальність за адекватну подачу опису відповідних можливостей вищому керівництву. В даному випадку існують два основних питання: по-перше, чи слід взагалі працювати над даним проектом і, по-друге, чи є сенс спочатку зробити вкладення в пілотний проект для опрацювання його на тестованому ринку: такий проект буде вимагати менших витрат і надасть можливість отримати деяку інформацію щодо того, на скільки велика ймовірність успіху нового товару.

Для того щоб зібратися з думками, слід продумати такий сценарій, щоб включити в нього як пілотний проект, так і власне випуск продукції на ринок. Припустимо, що при цьому представляються розумними наступні значення ймовірностей.

1. Імовірність того, що випуск товару на ринок виявиться успішним, становить 0,60.

2. Імовірність успішного виконання пілотного проекту дорівнює 0,70. (Це значення трохи вище, оскільки в разі пілотного проекту ринок виявляється більш сприйнятливим).

3. Імовірність того, що успішним виявиться або пілотний проект, або випуск товару на ринок (або обидва) становить 0,75.

Для того щоб прийняти рішення про те, чи є сенс робити пілотний проект, слід знайти (1) умовну ймовірність того, що випуск товару на ринок буде успішним за умови досягнення успіху в виконанні пілотного проекту, і (2) умовну ймовірність того, що випуск товару на ринок буде успішним навіть при відсутності успіху в виконанні пілотного проекту. Крім того, для повноти картини знадобляться також (3) ймовірність того, що успішними будуть і випуск товару на ринок, і виконання пілотного проекту, а також (4) ймовірність провалу обох.

Всі перераховані ймовірності можна знайти, творчо застосувавши для цих цілей основні формули, наведені в розділі 4.4. Однак пошук правильної для даного конкретного випадку комбінації формул може зажадати значних витрат часу. Простіший шлях обчислення необхідних значень ймовірностей полягає в побудові дерева ймовірностей, яке і допоможе знайти відповіді на поставлені питання.

На рис. 4.5.11 показане базове дерево ймовірностей з представленою на ньому вихідною інформацією. Зверніть увагу на те, що для двох з трьох відомих чисел безпосередньо на дереві ймовірностей місця немає; їх можна вказати поруч, як це показано на малюнку.

Що робити далі? Перше правило побудови дерева ймовірностей (або правило додатковості подій) дає можливість знайти ймовірність додаткової, або протилежної, події, величину якої слід помістити в ліве нижнє коло на діаграмі: 1,00 – 0,70 = 0,30. Кружки, розташовані в правій колонці, заповнити трохи складніше. Якщо три верхніх значення при складанні дають 0,75, а сума двох з них становить 0,60, третя величина повинна дорівнювати різниці цих чисел, тобто 0,75 – 0,60 = 0,15. Це значення записуємо в другий зверху кружок (ймовірність «успішний пілотний проект і неуспішний випуск товару»). Тепер можна скористатися правилом 4 для знаходження ймовірності, яку слід помістити в верхнє коло: 0,70 – 0,15 = 0,55. Отже, у нас заповнені два з тих верхніх кружечків в правій колонці; оскільки всі вони в сумі дають величину 0,75, невідома досі величина дорівнює 0,75 – 0,55 – 0,15 = 0,05. З цього моменту для заповнення дерева ймовірностей можна використовувати основні правила. Результат у вигляді заповненого дерева ймовірностей показаний на рис. 4.5.11.

У вщент заповненому дереві ймовірностей можна знайти значення всіх необхідних ймовірностей (а також значення будь-яких інших ймовірностей, які також можуть представляти інтерес). Нижче ці ймовірності перераховані разом з короткими коментарями до інтерпретації умовних ймовірностей.

Імовірність успішного випуску товару на ринок за умови успішного виконання пілотного проекту становить 0,786. Якби пілотний проект був ідеальним засобом прогнозу успіху нової продукції, ця величина дорівнювала б 1,00. Однак в реальному житті ситуація неідеальна і після успішного виконання пілотного проекту шанси нового товару на успіх оцінюються лише в 78,6%.

Імовірність того, що випуск товару на ринок буде успішним в разі провалу пілотного проекту дорівнює 0,167. Якби пілотний проект міг повністю передбачити наявність або відсутність успіху в подальшому, ця величина дорівнювала б 0. Однак в цьому випадку ми бачимо, що з імовірністю 16,7% випуск товару може бути успішним навіть після провалу пілотного проекту.

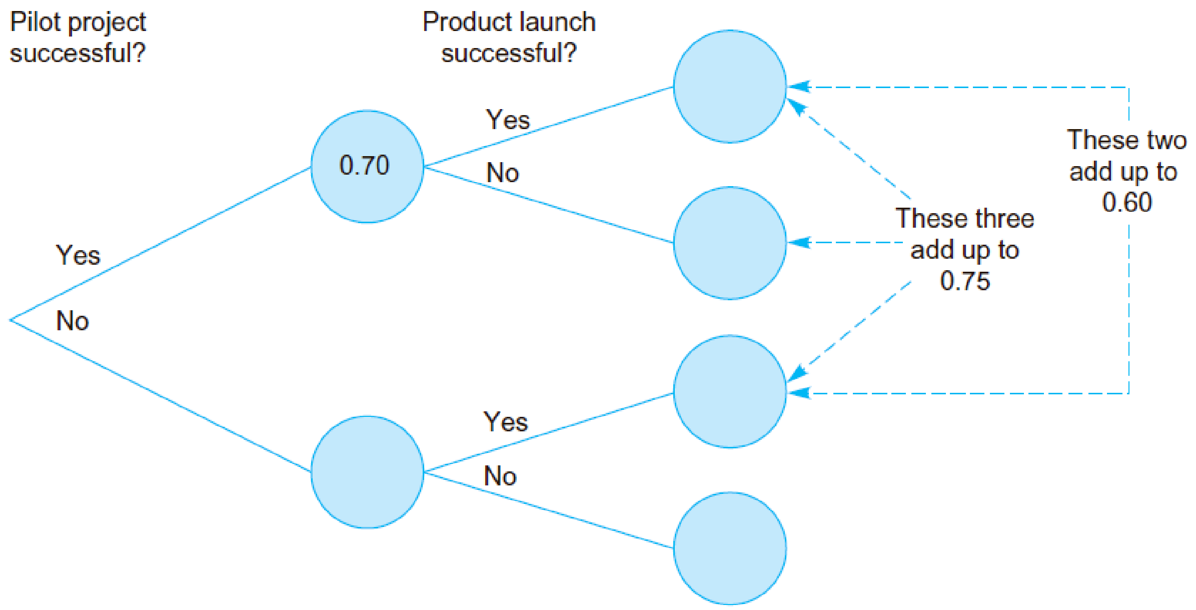


Рис. 4.5.11. Початкове дерево ймовірностей до застосування основних правил

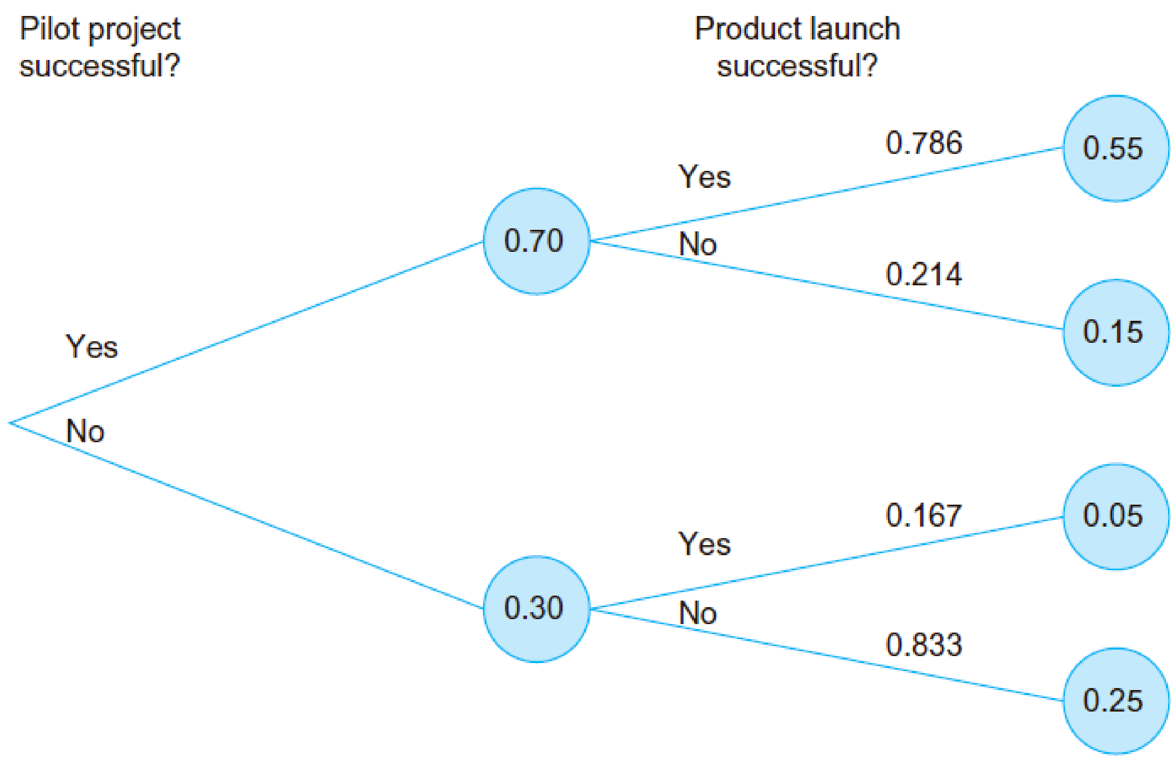


Рис. 4.5.12. Заповнене дерево ймовірностей із застосуванням основних правил

Імовірність того, що успішними будуть і виконання пілотного проекту, і випуск товару на ринок, складає 0,55.

Імовірність провалу обох становить 0,25.

Приклад. Рішення завдання «За якими дверима захований приз?»

Тепер ми можемо побудувати дерево ймовірності і для прикладу, наведеного в розділі 4.1. Розумно припустити, що приз може перебувати за будь-якими з цих дверей (тобто у нас немає ніяких підказок щодо того, за якими дверима він захований), і вибір двері відбувається випадково. Дерево ймовірностей для даної ситуації показано на рис. 4.5.13. Це дерево дещо відрізняється від тих, які ми будували раніше, оскільки з кожної вершини виходить три гілки. Однак основні правила для дерева ймовірностей справедливі як і раніше.

При побудові дерева вихідними є ймовірність того, що приз знаходиться за певними дверима (1/3), і умовні ймовірності висунутих припущень (також 1/3 – умовна ймовірність завжди одна і та ж, оскільки невідомо, за якими з дверей знаходиться приз). Далі, дотримуючись правил заповнення дерева ймовірностей, приходимо до чіткої відповіді: зміна вибору подвоює шанси на виграш з 1/3 до 2/3.

Таблиця спільних ймовірностей

Таблиця спільних ймовірностей для двох подій містить значення ймовірностей самих подій, протилежних їм подій, а також комбінацій (з використанням *I*) подій. Нижче наведена таблиця (табл. 4.5.1) спільних ймовірностей для розглянутого в попередньому розділі прикладу перевірки працівників на предмет вживання ними наркотиків.

Числа в осередках таблиці – це чотири обведених колами числа в правій частині дерева ймовірностей. Числа поза таблицею – підсумкові значення, які називають безумовними можливостями і описують ймовірності кожного з подій і його доповнення.

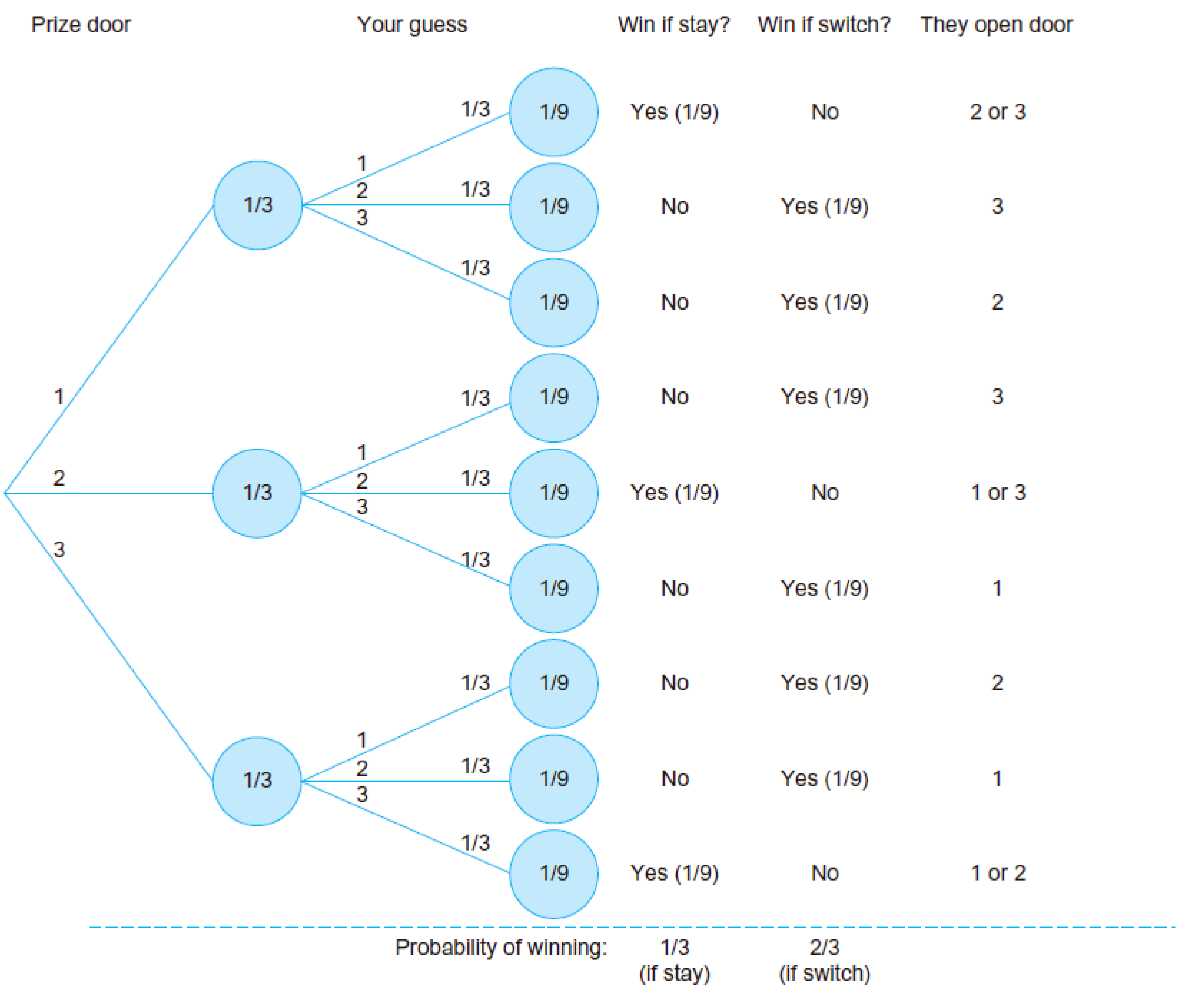


Рис. 4.5.13. Заповнене дерево ймовірностей із застосуванням основних правил

Таблиця 4.5.1. Таблиця спільних ймовірностей

		Тест позитивний?		
		Так	Ні	
Вживає наркотики?	Так	0,072	0,008	0,08
	Ні	0,046	0,874	0,92
		0,118	0,882	1

На рис. 4.5.14 показаний загальний вигляд таблиці спільних ймовірностей і приведена інтерпретація значень. Зверніть увагу, що тут немає умовних ймовірностей; їх можна легко знайти, застосовуючи основну формулу обчислення умовної ймовірності.

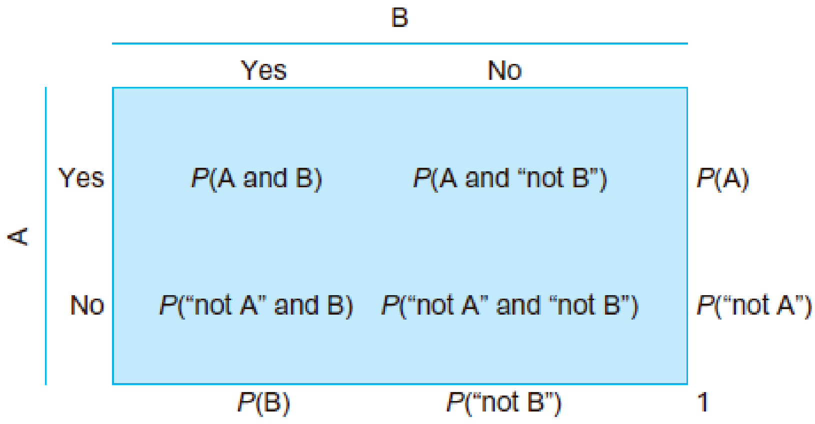


Рис. 4.5.14. Загальний вигляд таблиці спільних ймовірностей

Додатковий матеріал

Резюме

Для розуміння випадкових, непередбачуваних ситуацій реального світу слід починати з чіткого опису існуючих можливостей і ретельної побудови суворої схеми дослідження відповідних ймовірностей. **Випадковий експеримент** – це чітко визначена процедура, результат якої можна спостерігати, але неможливо точно передбачити заздалегідь. Кожен випадковий експеримент характеризується **вибірковим простором**, що представляє собою набір всіх можливих результатів. Вибірковий простір формується заздалегідь, коли ще невідомо, яким виявиться результат конкретного виконання випадкового експерименту. При кожному виконанні випадкового експерименту реалізується тільки один **результат**, що представляє собою результат випадкового експерименту і описує спостережувані наслідки даного експерименту. Кожен раз при виконанні випадкового експерименту або відбувається, або не відбувається деяка **подія**; формально подія являє собою деякий заздалегідь, до проведення експерименту, визначений набір результатів. У кожній конкретній ситуації може бути один або більше подій, що становлять інтерес.

Кожній події відповідає число від 0 до 1, так звана **ймовірність**, яка описує, наскільки правдоподібною є настання даної події при кожному виконанні випадкового експерименту. Якщо випадковий експеримент проводиться багато разів, можна знайти **відносну частоту** події, рівну частці від ділення кількості спостережень даної події на кількість виконаних випадкових експериментів. Відповідно до **закону великих чисел** при багаторазовому повторенні експерименту відносна частота (представляє собою випадкове число) наближається до ймовірності (точного, фіксованого значення). Таким чином, відносну частоту, засновану на отриманих раніше даних, можна використовувати в якості наближеного значення ймовірності. **Теоретична ймовірність** розраховується з використанням точної, заснованої на математичної теорії, формулі або моделі, такій, як правило *рівної ймовірності*; таким чином, при рівноймовірних результатах

$$\text{Ймовірність події} = \frac{\text{Кількість результатів в події}}{\text{Загальна кількість можливих результатів}}.$$

Суб'єктивна ймовірність є думкою певної особи (якщо є можливість, тут слід скористатися послугами експерта у відповідній області) з питання про ймовірність деякої події. Застосовуваний в статистичному аналізі **метод Байеса** дозволяє використовувати суб'єктивні ймовірності в формальних математичних розрахунках. Метод, альтернативний методу Байеса, називається **частотним аналізом**. Цей метод не використовує суб'єктивні ймовірності для розрахунків, однак і він не є повністю об'єктивним, оскільки попередні думки мають певний вплив на вибір даних і моделі (математичної основи).

Діаграма Венна є малюнком, на якому представлено безліч всіх можливих результатів (вибірковий простір). Вона має вигляд прямокутника, всередині якого показані події, часто у вигляді кіл або овалів. Приклад діаграми Венна наведено на рис. 4.6.1. **Доповнення** події, або протилежна подія, являє собою іншу подію, яка спостерігається тільки в тому випадку, коли перша подія не відбувається. Відповідно до правила додатковості подій

$$\text{Імовірність «не A»} = 1 - \text{ймовірність A}.$$

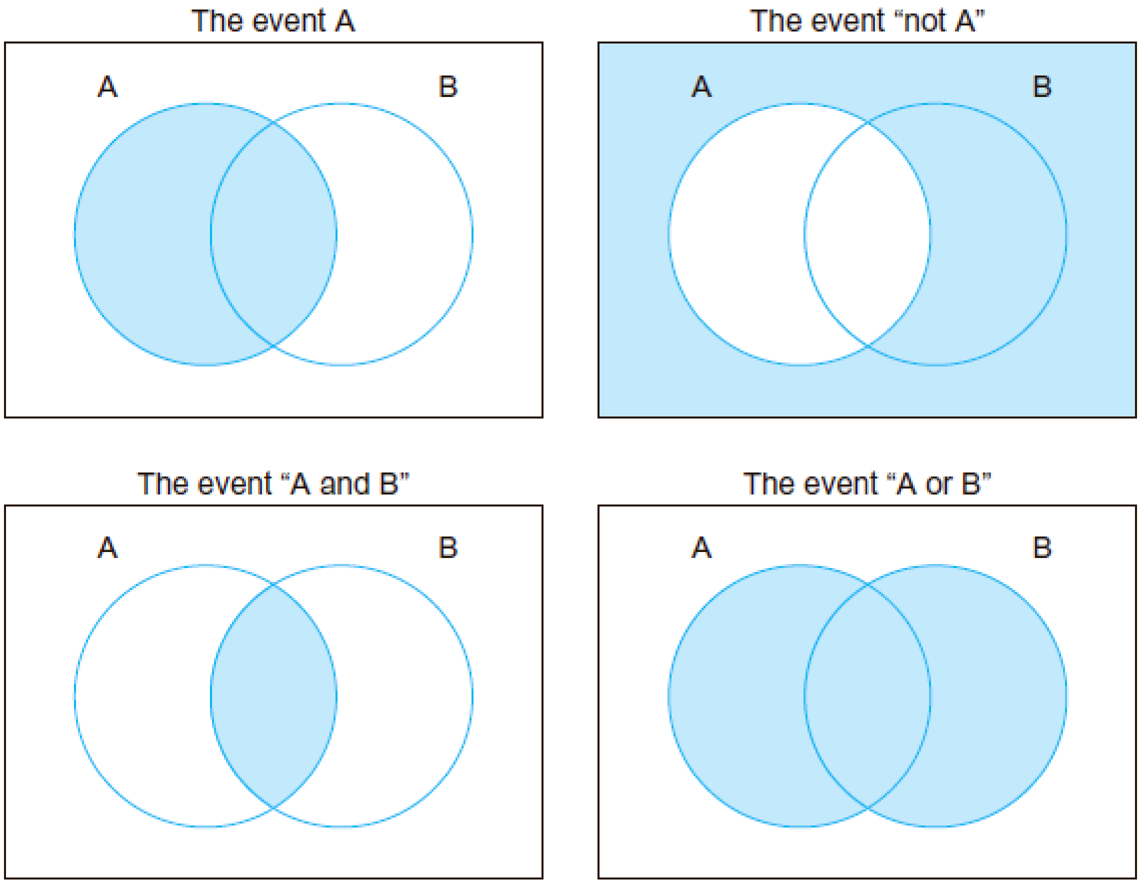


Рис. 4.6.1. Діаграма Венна чітко ілюструє сенс операторів НЕ, І, а також АБО, які визначають події через інші події

Перетином, або добутком, двох подій називається подія, яка настає тоді, коли в результаті однократного виконання випадкового експерименту відбуваються і одна подія *І* інша.

Дві події, які не можуть наступити одночасно, називаються **несумісними подіями**. Для несумісних подій існують такі правила:

$$\text{Імовірність "A і B"} = 0;$$

$$\text{Імовірність A чи B} = \text{ймовірність A} + \text{Імовірність B}.$$

Об’єднання, або сума, двох подій – це подія, яка настає тоді, коли в результаті однократного виконання випадкового експерименту відбувається або одна подія, або інша (або обидві ці події разом). Знаючи будь-які три з чотирьох ймовірностей (ймовірностей подій A, B, «A і B» і «A або B»), можна знайти невідоме четверте значення за допомогою однієї з наведених нижче формул.

$$\text{Імовірність "А чи В"} =$$
$$= \text{Імовірність А} + \text{Імовірність В} - \text{Імовірність "А і В"}.$$
$$\text{Імовірність "А і В"} =$$
$$= \text{Імовірність А} + \text{Імовірність В} - \text{Імовірність "А або В"}.$$

Переглянувши ймовірність події з метою обліку інформації про те, що відбулася деяка інша подія, отримуємо **умовну ймовірність** даної події за умови настання іншої події. Звичайна ймовірність (до обліку настання іншої події) називається **безумовною ймовірністю**. Умовні ймовірності знаходять наступним чином (якщо ймовірність події, що визначає умову, дорівнює нулю, то умовна ймовірність не визначена):

$$\text{Умовна ймовірність А за умови В} = \frac{\text{Ймовірність "А і В"}}{\text{Ймовірність В}}$$

Умовна ймовірність двох несумісних подій завжди дорівнює нулю (якщо тільки вона не виявляється невизначеною в силу технічних причин).

Дві події називаються **незалежними подіями**, якщо інформація про одну подію не змінює оцінку ймовірності іншої події. Якщо ж інформація про одну подію змінює оцінку ймовірності іншої, події називаються **залежними**. Для визначення того, чи є дві події залежними або незалежними, можна використовувати одну з наведених нижче формул. Події А і В незалежні, якщо виконується будь-яке з наступних співвідношень:

$$\text{Імовірність А} = \text{Умовна ймовірність А за умови В};$$
$$\text{Імовірність В} = \text{Умовна ймовірність В за умови А};$$
$$\text{Імовірність А і В} = \text{ймовірність А} * \text{ймовірність В}.$$

Третьою формулою можна скористатися для обчислення ймовірності «А і В» для двох подій, про які відомо, що вони незалежні; проте в разі залежних подій ця формула дає невірний результат. Дві незалежних події не можуть бути несумісними, за винятком випадку, коли ймовірність однієї з них дорівнює нулю.

Дерево ймовірностей – це малюнок, на якому показані ймовірності і деякі умовні ймовірності для комбінації двох або більше подій. Один з найпростіших способів вирішення завдання визначення значень ймовірностей полягає в побудові дерева ймовірностей, на якому потім можна знайти необхідні відповіді. Всі значення ймовірностей і умовних ймовірностей можна знайти шляхом додавання чисел, зазначених на дереві ймовірностей, або шляхом застосування формули обчислення умовної ймовірності. Нижче наведено чотири правила побудови і перевірки правильності дерева ймовірностей.

1. Ймовірності вказуються в кожній точці закінчення гілок дерева і обводяться кружком. Сума ймовірностей на кожному рівні дерева повинна дорівнювати 1 (або 100%).
2. Умовні ймовірності вказуються поруч з кожною з гілок (за винятком, можливо, гілок першого рівня). Для будь-якої групи гілок, що виходять з однієї точки, сума відповідних умовних ймовірностей дорівнює 1 (або 100%).
3. Імовірність, записана в кружку на початку гілки, помножена на умовну ймовірність, зазначену поруч з цією гілкою, дорівнює ймовірності, записаної в кружку на кінці гілки (праворуч).
4. Записана в кружку ймовірність дорівнює сумі обведених кружками ймовірностей на кінцях всіх гілок, що виходять з цього кружка вправо.

У **таблиці спільних ймовірностей** для двох подій наводяться ймовірності подій, протилежних їм подій, а також ймовірності комбінацій подій, отриманих за допомогою операції *I*. Умовні ймовірності можна обчислити за допомогою таблиці спільних ймовірностей, скориставшись формулою для обчислення умовної ймовірності.

Основні терміни

- Випадковий експеримент (random experiment)
- Вибірковий простір (sample space)
- Результат (outcome)
- Подія (event)
- Ймовірність (probability)
- Відносна частота (relative frequency)

– Закон великих чисел (law of large numbers)

– Теоретичне значення ймовірності (theoretical probability)

– Суб'єктивна оцінка ймовірності (subjective probability)

– Метод Байєса (Bayesian analysis)

– Частотний (НЕ Байєсівський) аналіз (frequentist (non Bayesian) analysis)

– Діаграма Венна (Venn diagram)

– Доповнення (не) (complement (not))

– Перетин (і) (intersection (and))

– Добуток

– Несумісні події (mutually exclusive events)

– Об'єднання (або) (union (or))

– Сума подій

– Умовна ймовірність (conditional probability)

– Безумовна ймовірність (unconditional probability)

– Незалежні події (independent events)

– Залежні події (dependent events)

– Дерево ймовірностей (probability tree)

– Таблиця спільних ймовірностей (joint probability table)

Контрольні питання

1. а) Що таке випадковий експеримент?

   б) Чому визначення випадкового експерименту допомагає сконцентрувати увагу при дослідженні невизначеної ситуації?

2. а) Що таке вибірковий простір?

   б) Чи є якась невизначеність або випадковість у вибірковому просторі?

3. а) Що таке результат?

   б) Чи повинен результат обов'язково бути числом?

4. а) Що таке подія?

б) Чи може у випадковому експерименті бути більш ніж одна подія, що представляє інтерес?

5. а) Що таке ймовірність?

б) Що з перерахованого можна охарактеризувати ймовірністю: випадковий експеримент, вибіркове простір, подія?

в) Якщо випадковий експеримент виконується тільки один раз, що можна сказати про подію, ймовірність якої дорівнює 0,06?

6. а) Що таке відносна частота події?

б) Чим відносна частота відрізняється від ймовірності події?

в) Про що свідчить закон великих чисел?

7. а) Назвіть три основні джерела отримання значень ймовірності.

б) Сформулюйте правило рівної ймовірності.

в) Чи можна використовувати в якості значення ймовірності чиєсь припущення?

г) У чому полягає відмінність між аналізом методом Байеса і частотним аналізом?

8. Що таке несумісні події?

9. а) Що таке доповнення події?

б) Чому дорівнює ймовірність доповнення події?

10. а) Що таке перетин двох подій?

б) Чому дорівнює ймовірність «одна подія і інша подія», якщо відомі наступні дані:

1) Ймовірності цих подій і ймовірність «одна подія або інша подія»?

2) Ймовірності цих подій, а також відомо, що вони незалежні?

3) Те, що розглядаються події несумісні?

11. а) Що таке об’єднання двох подій?

б) Чому дорівнює ймовірність «одна подія або інша», якщо відомі:

1) Ймовірності цих подій і ймовірність «одна подія і інша»?

2) Те, що розглядаються події несумісні?

12. а) Дайте інтерпретацію умовної ймовірності з точки зору нової інформації.

б) Чи завжди ймовірність події A за умови події B виражається тим же числом, що і ймовірність події B за умови події A?

в) Як можна знайти умовну ймовірність, знаючи ймовірності двох подій і ймовірність їх перетину?

г) Чому дорівнює умовна ймовірність для двох незалежних подій?

д) Чи є ймовірність події A за умови події B ймовірністю події A чи ймовірністю події B?

13. а) Дайте інтерпретацію незалежності двох подій.

б) Як можна зробити висновок про те, чи є дві події незалежними або залежними?

в) За яких умов дві несумісних події можуть бути незалежними?

14. а) Що таке дерево ймовірностей?

б) Сформулюйте чотири правила побудови і перевірки коректності дерева ймовірностей.

15. Що таке таблиця спільних ймовірностей?

16. Що таке діаграма Венна?