# 9. ДВІЙКОВІ ЦИКЛІЧНІ КОДИ

**9.1. Теоретичні положення**

Подання кодових комбінацій у циклічних кодах виконують у вигляді поліномів від формальної змінної *х*, що дозволяє звести дії над кодовими комбінаціями до дій над поліномами. Так, сума двох двій-кових поліномів виконується додаванням за модулем 2 ко­ефіцієнтів за рівних степенів змінної *х*. Наприклад, отримаємо суму за модулем 2 двох поліномів: ( *х*4⊕*х*3⊕*х*⊕1)⊕( *x*3⊕*x*2⊕*x*) = *x*4⊕*x*2⊕1. Множення виконується за звичай­ними правилами множення степеневих функцій, але коефіцієнти однакових степенів додаються за модулем 2. Так, ( *x*4⊕*x*3⊕*x*⊕1)( *x*⊕1 )  =  *x*5⊕*x*4⊕*x*2⊕*x*⊕*x*4⊕*x*3⊕*x*⊕1 =  =  *x*5⊕*x*3⊕*x*2⊕1.

Ділення також виконується як звичайне ділення поліномів, при цьому операція віднімання співпадає з операцією додавання  ⊕. Наприклад, ( *x*5⊕*x*3⊕*x*2⊕1 ) / ( *x*⊕1 )  =  *х*4⊕*х*3⊕*х*⊕1.

До циклічних належать лінійні блокові ( *n*,*k*) - коди, у яких циклічний зсув елементів будь-якої дозволеної комбінації призводить до виникнення також дозволеної комбінації, що належить до даного коду. Така циклічна перестановка з’являється завдяки помноженню полінома даної комбінації на *x*.Щоб степінь полінома не перевищував *n* – 1, член *x n* замінюється одиницею.

Особливу роль в теорії циклічних кодів відіграють твірні поліноми, у якості яких звичайно використовуються незвідні поліноми та їх добутки.

**Циклічні коди з *dmin*= 3** .Розрізняють алгебраїчні та матричні способи побудови циклічних кодів. Існують три алгебраїчні спо­соби побудови кодових комбінацій циклічного коду, які випливають з виразу

  , ( 9.1 )

де *r* – кількість перевірочних розрядів у комбінації циклічного коду; *Q*(*x*) – поліном первинної кодової комбінації; *P*( *x*) – твірний полі-ном; *C*(*x*) – частка від ділення того степеня, що і *Q*(*x*); *R*(*x*) – ос­тача від ділення, яка має степінь, не більший за *r* – 1. З виразу  ( 9.1 )  можна одержати три способи побудови циклічного коду:

*F*1(*x*)  =  *xrQ*(*x*) ⊕ *R*(*x*);

*F*2(*x*)  =  *C*(*x*) *P*(*x*);

*F*3(*x*)  =  *Q*(*x*) *P*(*x*) ,

де *F*(*x*)  –  комбінація циклічного коду.

Перші два способи дають один і той же роздільний циклічний код, тобто *F*1(*x*)  =  *F*2(*x*), у якому розташування інформаційних і перевірочних елементів буде підпорядковано правилу: *k*старших роз-рядів комбінації  –  інформаційні, решта *n* – *k*= *r* розрядів  –  пере-вірочні. Третій спосіб використовується для побудови нероздільного циклічного коду, де інформаційні і перевірочні елементи в комбінаціях не відокремлені одні від одних, що ускладнює процес декодування.

Деякі твірні поліноми для циклічних кодів наведені у табл. 9.1.

 Таблиця 9.1

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| Кількість перевірочних еле­ментів *r* | Твірний поліном *P*(*x*) | Двійковийза­писполінома |
| 3 | *x*3⊕*x*⊕1 | 1011 |
| 3 | *x*3⊕*x*2⊕1 | 1101 |
| 4 | *x*4⊕*x*⊕1 | 10011 |
| 4 | *x*4⊕*x*3⊕1 | 11001 |
| 5 | *x*5⊕*x*2⊕1 | 100101 |
| 5 | *x*5⊕*x*3⊕1 | 101001 |
| 5 | *x*5⊕*x*3⊕*x*2⊕*x*⊕1 | 101111 |
| 5 | *x*5⊕*x*4⊕*x*2⊕*x*⊕1 | 110111 |
| 6 | *x*6⊕*x*5⊕*x*4⊕1 | 1110001 |
| 8 | *x*8⊕*x*7⊕*x*6⊕*x*5⊕*x*2⊕*x*⊕1 | 111100111 |

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| 9 | *x*9⊕*x*5⊕*x*3⊕1 | 1000101001 |

Очевидно, що *F*(*x*) повинен ділитися на *P*(*x*) без остачі. На цьому і грунтується перевірка кодової комбінації на наявність помилок при прийомі. Якщо прийнята комбінація *F*\*(*x*) ділиться на *P*(*x*) без ос­тачі, вона визнається безпомилковою. Якщо після ділення залишається ненульова остача, це свідчить про наявність помилки у прийнятій комбінації циклічного коду.

Для виправлення помилки можна скористатися методом гіпотез. Цей метод грунтується на послідовній побудові гіпотез про помилки у молодшому розряді прийнятої кодової комбінації, потім, якщо гіпотеза не підтверджується, у другому розряді і так далі, поки гіпотеза не підтвердиться і остача від ділення *F*\*(*x*)⊕*E*(*x*), де *E*(*x*) – поліном по­милки, на *P*(*x*) не дасть нульовий результат. Це означає, що *F*(*x*) = *F*\*(*x*)⊕*E*(*x*) і помилка виправлена.

Розрізняють три матричні способи одержання циклічного коду, два з яких грунтуються на побудові твірної матриці, і один – пе­ревірочної.

За першим способом будується твірна матриця

*G*=   .

За другим способом також будується твірна матриця циклічного коду, але на відміну від першого, у якості рядків такої матриці викори­стовують усі можливі комбінації коду, що мають тільки одну одиницю в інформаційній частині; перевірочні елементи для таких комбінацій можна ви­значити за допомогою першого алгеб­раїчного способу побудови коду.

Третій матричний спосіб побудови циклічного коду грун­тується на одержанні перевірочної матриці за допомогою викори­стання перевірочного полінома, який визначається за формулою:

*Н*(*х*)=(*xn*⊕1)/*P*(*x*),

де *n*=2*r*–1. При цьому, перевірочна матриця має вигляд:

*H*  =   .

Процес кодування і декодування за допомогою твірної або перевірочної матриць циклічного коду провадиться аналогічно даному процесу у двійковому груповому коді, викладеному в розділі 8.

***Циклічні коди з dmin=*4** можуть виявляти одно-, дво- і три­кратні помилки. Для збільшення кодової відстані до *dmin*= 4 кількість перевірочних елементів у кодовій комбінації такого коду має бути на один більшою, ніж у коді з  *dmin*= 3. Твірний поліном *P*(*x*)(*d*=4) такого коду визначається як добуток твірного поліному *P*(*x*)(*d*=3) циклічного коду, який має *dmin*= 3, на поліном ( *x*⊕1), тобто:

*P*(*x*)(*d*=4)= *P*(*x*)(*d*=3)(*x*⊕1).

Процедура кодування і декоду­вання залишається такою ж, як і для циклічного коду з *dmin*= 3.

***Вкорочені циклічні коди*** будуються за аналогією з двійковими груповими кодами на основі побудови твірної або перевірочної матриць ( див. розділ 8 ).

**Коди Боуза-Чоудхурі-Хоквінгема  ( БЧХ )** є різновидом циклічних кодів з кодовою відстанню *dmin* 3. Коди БЧХ дозволяють виявляти і виправляти будь-яку кількість помилок у залежності від мінімальної кодової відстані. При кодуванні задаються кількістю по­милок, яку слід виправити, або кодовою відстанню і загальною кількістю елементів у кодовій комбінації *n*. Кількість інформаційних ел

ементів *k* та перевірочних елементів *r* визначається при побудові коду.

Так довжина кодової комбінації *n* у кодах БЧХ визначається з виразів [24]:

 *n*= 2*h*–1,   або *n*= (2*h*–1)/*g*, ( 9.2 )

де *h* – ціле число; *g*  – непарне додатне число, при діленні на яке одержуємо *n* цілим непарним числом. Таким чином, *n* може бути тільки непарним числом. Тобто, керуючись виразом ( 9.2 ), визначаємо, що кількість елементів у комбінаціях коду БЧХ може дорівнювати 3, 7, 15, 31, 63, 127, 255, 511, 1023 тощо.

Кількість перевірочних елементів коду відповідає співвідношенню

*r*≤  *h*( *dmin*– 1 ) / 2 , ( 9.3 )

звідки кількість інформаційних елементів

 *k* ≥ ( 2*h* – 1) – *h*( *dmin*– 1) / 2 . ( 9.4 )

Твірний поліном коду БЧХ визначається як добуток так званих мінімальних поліномів *Мi*(*x*), із непарними індексами:

 *P*(*x*) = *M*1(*x*)*M*3(*x*)...*MV*(*x*), ( 9.5 )

де *V* = *dmin*– 2 . Можна пересвідчитись, що кількість мінімальних поліномів у добутку ( 9.5 ) дорівнює максимальній кількості *s* помилок, які гарантовано виправляються кодом.

У таблиці 9.2 наведені основні параметри деяких кодів БЧХ .

 Таблиця 9.2

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| *n* | *k* | *r* | *dmin* | Твірний поліном  *Р*8 |
| 7 | 4 | 3 | 3 | 13 |
| 15 | 11 | 4 | 3 | 23 |
|  | 7 | 8 | 5 | 721 |
|  | 5 | 10 | 7 | 2467 |
| 31 | 26 | 5 | 3 | 45 |
|  | 21 | 10 | 5 | 3551 |
|  | 16 | 15 | 7 | 107657 |

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
|  | 11 | 20 | 11 | 5423325 |
|  | 6 | 25 | 15 | 313365047 |
| 63 | 57 | 6 | 3 | 103 |
|  | 51 | 12 | 5 | 12471 |
|  | 45 | 18 | 7 | 1701317 |
|  | 39 | 24 | 9 | 166623567 |
|  | 36 | 27 | 11 | 1033500423 |
|  | 30 | 33 | 13 | 1574641656547 |
|  | 24 | 39 | 15 | 17323260404441 |
|  | 18 | 45 | 21 | 1363026512351725 |

Подані в таблиці параметри були визначені у відповідності з вик­ладеною вище методикою. Для зручності запису твірні поліноми *Р*(*х*) подані у вісімковій системі числення ( *P*8). Щоб одержати твірний поліном у звичайному вигляді, тобто у тій формі, яка використовується для побудови кодів БЧХ, треба перевести кожну вісімкову цифру у двійковий трибіт. Так, наприклад, *Р*8=45 запишеться двійковими числами: 4 – 100 та 5 – 101. Таким чином одержуємо двійкове число 100101, яке запи­сується поліномом *Р*(*х*)=*x*5⊕*x*2⊕1.

Як було показано вище, коди БЧХ мають непарне значення мінімальної кодової відстані *dmin*. Для того, щоб збільшити *dmin* на оди­ницю, досить помножити твірний поліном коду БЧХ на двочлен (*х*⊕1).

Кодування у кодах БЧХ виконується так само, як і у звичай­них циклічних кодах, у тому числі і за допомогою матричних способів ( див. вище ). Декодування кодів БЧХ ( виявлення та виправлення поми­лок ) також може виконуватися з використанням методики, викладеної для циклічних кодів з *dmin*< 5.

**9.2. Приклади розв’язання задач**

Задача 9.2.1

Закодувати двійковим циклічним кодом, що виправляє одно­кратні помилки, кодову комбінацію двійкового простого коду 1110 та показати процес виправлення будь-якої однократної помилки в одер­жаній комбінації циклічного коду. Визначити надмірність коду.

***Розв’язання.*** Для того, щоб закодувати комбінацію простого коду циклічним кодом, необхідно вибрати твірний поліном. Степінь твірного поліному *Р*(*х*) визначається кількістю перевірочних еле­мен-тів *r* у комбінації циклічного коду, а величина *r* при *dmin*= 3 ви­зна-чається з виразу  2*r*–1 *n*. Тобто, при *k*= 4 маємо *r*= 3. Таким чином з табл. 9.1 вибираємо поліном степені 3: *Р*(*х*)=*x*3⊕*x*⊕1.

Виконуємо кодування комбінації двійкового простого коду 1110. Для цього

– записуємо її у вигляді полінома: *Q*(*x*)=*x*3⊕*x*2⊕*x*;

– помножимо   *Q*(*x*) на   *xr*;  оскільки   *r*= 3,   то  *Q*(*x*)*x*3=

(*x*3⊕*x*2⊕*x*)*x*3= *x*6⊕*x*5⊕*x*4;

– поділимо *Q*(*x*)*x*3 на *P*(*x*) з метою визначення остачі *R*(*x*), ко­ефіцієнти при степенях *x* якого є перевірочними елементами комбінації циклічного коду:

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| ⊕ |  *x*6⊕*x*5⊕*x*4 |  |  *x*3⊕*x*⊕1 |
|  *x*6⊕*x*4⊕*x*3 |  |  *x*3⊕*x*2 |
|  ⊕ |  *x*5⊕*x*3 |  |  |
|  *x*5⊕*x*3⊕*x*2 |  |  |
|  |  *x*2 |  |  . |

Одержуємо остачу *R*(*x*)=*x*2, якій відповідає трирозрядний век­тор ( *r*= 3 )  – 100 ; додаємо остачу *R*(*x*) до *Q*(*x*)*x*3 і отримуєм

о кодову комбінацію двійкового циклічного коду *F*(*x*)= =*Q*(*x*)*x*3⊕*R*(*x*)= *x*6⊕*x*5⊕х4⊕*x*2 → *F* = 1110100.

Покажемо процес виправлення однократної помилки. Для цього припустимо, що при передачі виникла однократна помилка, поліном та век­тор якої відповідно *E*(*x*)= *x*3 та 0001000. Тоді поліном *F*\*(*x*) прийнятої  комбінації  *F*\*(*x*) = *F*(*x*)⊕*E*(*x*) =*x*6⊕*x*5⊕*x*4⊕⊕*x*3⊕*x*2  → 1111100.

Декодер виконує перевірочне ділення *F*\*(*x*) на той же твірний поліном *P*(*x*), який був використаний при кодуванні:

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  ⊕ | *x*6⊕*x*5⊕*x*4⊕*x*3⊕*x*2 |  *x*3⊕*x*⊕1 |
| *x*6⊕*x*4⊕*x*3 |  *x*3⊕*x*2⊕1 |
|  ⊕ | *x*5⊕*x*2 |  |
| *x*5⊕*x*3⊕*x*2 |  |
|  ⊕ | *x*3 |  |
| *x*3⊕*x*⊕1 |  |
|  |  *x*⊕1 |  . |

Отже, остача *R*(*x*) =  *x*⊕1 або *R*=  011.

Оскільки остача від ділення не дорівнює нулю, робимо висно­вок про наявність помилки у прийнятій комбінації *F*\*(*x*).

Для визначення місця помилки скористуємося методом гіпотез.

*Крок 1*. Висуваємо гіпотезу про помилку у молодшому роз­ряді комбінації циклічного коду *F*\*(*x*), тобто вважаємо, що поліном та вектор помилки відповідно *E*1(*x*) = 1 та *E*1= 0000001. Беремо суму за модулем  2 *F*\*(*x*)⊕*E*1(*x*):

 *F*\*(*x*)⊕*E*1(*x*)=(*x*6⊕*x*5⊕х4⊕*x*3⊕*x*2)⊕1= *x*6⊕*x*5⊕х4⊕*x*3⊕*x*2⊕1;

ділимо отриману суму на *P*(*x*) з метою підтвердження ( у разі нульової остачі ) або спростування ( у разі ненульової остачі ) висунутої гіпотези:

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  ⊕  | *x*6⊕*x*5⊕*x*4⊕*x*3⊕*x*2⊕1 | *x*3⊕*x*⊕1 |
| *x*6⊕*x*4⊕*x*3 | *x*3⊕*x*2⊕1 |
|  ⊕ | *x*5⊕*x*2⊕1 |  |
| *x*5⊕*x*3⊕*x*2 |  |
|  ⊕ | *x*3⊕1 |  |
| *x*3⊕*x*⊕1 |  |
|  |  *x* |  . |

Остача *R*(*x*) = *x*, тобто  *R*(*x*)≠0, і гіпотеза відхиляється.

*Крок 2*. Висуваємо гіпотезу про помилку у другому розряді *F*\*(*x*), тобто вважаємо, що *E*2(*x*) = *x* → *E*2=  0000010. Беремо суму за модулем 2 *F*\*(*x*)⊕*E*2(*x*):

*F*\*(*x*)*E*2(*x*) = (*x*6⊕*x*5⊕*x*4⊕*x*3⊕*x*2)⊕*x* = *x*6⊕*x*5⊕*x*4⊕*x*3⊕*x*2⊕*x*;

ділимо цю суму на *P*(*x*) з метою підтвердження або спростування гі-потези:

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  ⊕  | *x*6⊕*x*5⊕*x*4⊕*x*3⊕*x*2⊕*x* | *x*3⊕*x*⊕1 |
| *x*6⊕*x*4⊕*x*3 | *x*3⊕*x*2⊕1 |
|  ⊕ | *x*5⊕*x*2⊕*x* |  |
| *x*5⊕*x*3⊕*x*2 |  |
|  ⊕ | *x*3⊕*x* |  |
| *x*3⊕*x*⊕1 |  |
|  |  1 |  . |

Остача *R*(*x*) = 1, тобто *R*(*x*)0, і гіпотеза відхиляється.

*Крок 3*. Висуваємо гіпотезу про помилку у третьому розряді *F*\*(*x*), тобто вважаємо, що *E*3(*x*)=*x*2 →  *E*3=  0000100. Беремо суму

му за модулем 2 *F*\*(*x*)⊕*E*3(*x*):

 *F*\*(*x*)⊕*E*3(*x*) = (*x*6⊕*x*5⊕*x*4⊕*x*3⊕*x*2)⊕*x*2= *x*6⊕*x*5⊕*x*4⊕*x*3;

ділимо цю сумму на *P*(*x*) з метою підтвердження або спростування гіпотези:

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  ⊕  | *x*6⊕*x*5⊕*x*4⊕*x*3 |  *x*3⊕*x*⊕1 |
| *x*6⊕*x*4⊕*x*3 |  *x*3⊕*x*2⊕1 |
|  ⊕ | *x*5 |  |
| *x*5⊕*x*3⊕*x*2 |  |
|  ⊕ | *x*3⊕*x*2 |  |
| *x*3⊕*x*⊕1 |  |
|  |  *x*2⊕*x*⊕1 |  . |

Остача *R*(*x*)=*x*2⊕*x*⊕1, тобто *R*(*x*)0, і гіпотеза відхиляється.

*Крок 4*. Висуваємо гіпотезу про помилку у четвертому роз­ряді *F*\*(*x*), тобто вважаємо, що *E*4(*x*)=*x*3 →  *E*4=  0001000. Беремо суму за модулем 2 *F*\*(*x*)⊕*E*4(*x*):

 *F*\*(*x*)⊕*E*4(*x*) = (*x*6⊕*x*5⊕*x*4⊕*x*3⊕*x*2)*x*3= *x*6⊕*x*5⊕*x*4⊕*x*2;

ділимо отриману суму на *P*(*x*) з метою підтвердження або спростування гіпотези:

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
|  ⊕ |  *x*6⊕*x*5⊕*x*4⊕*x*2 |  |  *x*3⊕*x*⊕1 |
|  *x*6⊕*x*4⊕*x*3 |  |  *x*3⊕*x*2 |
|  ⊕ |  *x*5⊕*x*3⊕*x*2 |  |  |
|  *x*5⊕*x*3⊕*x*2 |  |  |
|  | 0 |  |  . |

Остача *R*(*x*)=0, тобто помилка дійсно була у четвертому розряді, а вихідна комбінація циклічного коду має вигляд:

 *F*(*x*)=*F*\*(*x*)⊕*E*4(*x*)= *x*6⊕*x*5⊕х4⊕*x*2 →  *F*= 1110100.

Надмірність коду *R* = *r*/ *n*= 3 / 7.

Задача 9.2.2

Закодувати двійковим циклічним кодом, що виправляє одно­кратні помилки, кодову комбінацію двійкового простого коду

*Q*(*x*) = *x*5⊕*x*2 і виправити будь-яку однократну помилку в одержаній комбінації циклічного коду. Визначити надмірність коду.

***Розв’язання.*** Щоб закодувати задану кодову комбінацію *Q*(*x*)=*x*5⊕*x*2 ( *Q*= 100100 ) циклічним кодом, що виправляє однократні помилки ( *dmin*= 3 )  необхідно вибрати твірний поліном. Степінь твірного поліному *P*(*x*) визначається кількістю перевірочних елементів *r*, яку визначаємо з виразу 2*r*–1*n* ( для *dmin*= 3 ). При *k*= 6 одержуємо *r* = 4 та вибираємо з таблиці 9.1 поліном четвертого степеня: *P*(*x*) = *x*4⊕*x*⊕1.

Виконаємо кодування первинної кодової комбінації *Q*(*x*) = = *x*5⊕*x*2, для чого знайдемо остачу *C*(*x*) від ділення *Q*(*x*)*x*4 на *P*(*x*), а потім помножимо її на *P*(*x*).Маємо

 *Q*(*x*)*x*4= (*x*5⊕*x*2)*x*4= *x*9⊕*x*6.

Поділимо отриманий добуток на *P*(*x*) з метою визначення частки *C*(*x*) від ділення:

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
|  ⊕ |  *x*9⊕*x*6 |  |  *x*4⊕*x*⊕1 |
|  *x*9⊕*x*6⊕*x*5 |  |  *x*5⊕*x* |
|  ⊕ |  *x*5 |  |  |
|  *x*5⊕*x*2⊕*x* |  |  |
|  |  *x*2⊕*x*  |  |  . |

Тобто *C*(*x*) = *x*5⊕*x*.Помножимо *C*(*x*) на *P*(*x*) і одержимо ко-дову комбінацію циклічного коду:

 *F*(*x*)=*C*(*x*)*P*(*x*)=(*x*5⊕*x*)(*x*4⊕*x*⊕1)=*x*9⊕*x*6⊕*x*2⊕*x*,

або у двійковому вигляді *F*= 1001000110.

Виправляємо однократну помилку.

Припустимо, що при передачі по каналу зв’язку виникла од­нократна помилка, поліном якої *E*(*x*)=1. Тоді поліном прийнятої кодової комбінації циклічного коду *F*\*(*x*)=*x*9⊕*x*6⊕*x*2⊕*x*⊕1.

 Декодер виконує перевірочне ділення *F*\*(*x*) на твірний поліном *P*(*x*):

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
|  ⊕ |  *x*9⊕*x*6⊕*x*2⊕*x*⊕1 |  |  *x*4⊕*x*⊕1 |
|  *x*9⊕*x*6⊕*x*5 |  |  *x*5⊕*x* |
|  ⊕ |  *x*5⊕*x*2⊕*x*⊕1 |  |  |
|  *x*5⊕*x*2⊕*x* |  |  |
|  | 1 |  |  . |

Тобто *R*(*x*)=1≠0.Це вказує на наявність помилки у прийнятій кодовій комбінації.

Для визначення місця помилки скористуємося методом гіпотез, першим кроком якої є гіпотеза про наявність помилки у мо­лодшому розряді прийнятої кодової комбінації *F*\*(*x*), тобто вважаємо, що поліном та вектор помилки відповідно *E*1(*x*)=1 та  *E*1=  0000000001. Визначаємо суму за модулем 2 *F*\*(*x*)*E*1(*x*) та ділимо цю суму на *Р*(*х*) з метою підтвердження або спростування гіпотези:

*F*\*(*x*)*E*1(*x*)=(*x*9⊕*x*6⊕*x*2⊕*x*⊕1)⊕1= *x*9⊕*x*6⊕*x*2⊕*x*;

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
|  ⊕ |  *x*9⊕*x*6⊕*x*2⊕*x* |  |  *x*4⊕*x*⊕1 |
|  *x*9⊕*x*6⊕*x*5 |  |  *x*5⊕*x* |
|  ⊕ |  *x*5⊕*x*2⊕*x*  |  |  |
|  *x*5⊕*x*2⊕*x* |  |  |
|  | 0 |  |  . |

 Тобто *R*(*x*) = 0, що вказує на те, що помилка дійсно була у першому розряді.

Таким чином, вихідна комбінація циклічного коду *F*(*x*)=*x*9⊕*x*6⊕*x*2⊕*x*  → *F* = 1001000110.

Надмірність коду *R* = *r*/ *n*=  4 / 10  =  2 / 5.

Задача 9.2.3

Знайти твірний поліном *Р*(*х*) двійкового коду БЧХ, здатного виправляти трикратні помилки та призначеного для передачі символів деякого алфавіту, потужність якого дорівнює 32.

***Розв’язання.*** Мінімальна кодова відстань для коду БЧХ, здат­ного виправляти трикратні помилки, *dmin*= 2*s*+ 1 = 2 × 3 + 1 = 7. Для пере­дачі символів алфавіту потужністю 32 повідомлень достатньо мати *k*= 5 двійкових інформаційних символів (25=32).

Для визначення твірного полінома *Р*(*х*) коду БЧХ, що має *dmin*= 7 та *k*= 5, скористаємося таблицею 9.2. Бачимо, що мінімальна довжина коду БЧХ з заданими параметрами *n*= 15  ( *k*= 5, *r*= 10, *dmin*= 7 ), для якого твірний поліном у вісімковій системі числення *P*8= 2467, або у двійковій системі числення *P*2= 010100110111. Таким чином твірний поліном коду БЧХ буде мати вигляд *P*(*x*)=*x*10⊕*x*8⊕*x*5⊕*x*4⊕*x*2⊕*x*⊕1.

Задача 9.2.4

Закодувати двійковим кодом БЧХ , що виявляє до шести по­милок та має п’ять інформаційних символів, кодову комбінацію двійкового простого коду 10101. Показати процес виявлення шести помилок. Визначити надмірність коду.

***Розв’язання.*** Поліном, який відповідає комбінації 10101 первинного коду, має вигляд *Q*(*x*)=*x*4⊕*x*2⊕1. Для того, щоб код БЧХ міг виявляти шість помилок, він повинен мати  *dmin*=  *s*+ 1 = 6 + 1 = 7. Тому, користуючись таблицею 9.2, визначаємо параметри коду БЧХ, який має здатність виявляти шість помилок: *n*= 15, *k*= 5, *r*= 10, *P*8= 2467. Переводимо значення твірного поліному, що записане у вісімковій системі числення, у двійкову *P*2= 010100110111, і далі за-писуємо його у вигляді поліному: *P*(*x*)=*x*10⊕*x*8⊕*x*5⊕*x*4⊕*x*2⊕*x*⊕1.

Закодуємо задану комбінацію двійкового простого коду кодом БЧХ, для чого :

–  помножимо *Q*(*x*) на *хr*: (*x*4⊕*x*2⊕1)*x*10=*x*14⊕*x*12⊕*x*10;

–  поділимо *Q*(*x*)*x*10 на *P*(*x*) і визначимо остачу *R*(*x*):

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| ⊕ |  *x*14⊕*x*12⊕*x*10 |  |  *x*10⊕*x*8⊕*x*5⊕*x*4⊕*x*2⊕*x*⊕1 |
|  *x*14⊕*x*12⊕*x*9⊕*x*8⊕*x*6⊕*x*5⊕*x*4 |  |  *x*4⊕1 |
|  ⊕ |  *x*10⊕*x*9⊕*x*8⊕*x*6⊕*x*5⊕*x*4 |  |  |
|  *x*10⊕*x*8⊕*x*5⊕*x*4⊕*x*2⊕*x*⊕1 |  |  |
|  |  *x*9⊕*x*6⊕*x*2⊕*x*⊕1 |  |  ; |

тобто остача *R*(*x*)=*x*9⊕*x*6⊕*x*2⊕*x*⊕1;

–  визначаємо суму *Q*(*x*)*x*10⊕*R*(*x*) і одержуємо поліном кодової комбінаціє коду БЧХ: *F*(*x*) = *x*14⊕*x*12⊕*x*10⊕*x*9⊕*x*6⊕*x*2⊕*x*⊕1; йому відповідає комбінація 101011001000111.

Покажемо процес виявлення шести помилок. Припустимо, що при передачі виникли 6 помилок. Нехай поліном шестикратної помилки *E*(*x*) = *x*12⊕*x*10⊕*x*9⊕*x*6⊕*x*5⊕*x*2. Тоді поліном прий­нятої комбінації коду БЧХ: *F*\*(*x*) =  *x*14⊕*x*5⊕*x*⊕1.

 Для виявлення помилок декодер виконує перевірочне ділення прийнятої комбінації  *F*\*(*x*) коду БЧХ на той же твірний поліном *P*(*x*), який був використаний при кодуванні:

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| ⊕ |  *x*14⊕*x*5⊕*x*⊕1 |  |  *x*10⊕*x*8⊕*x*5⊕*x*4⊕*x*2⊕*x*⊕1 |
|  *x*14⊕*x*12⊕*x*9⊕*x*8⊕*x*6⊕*x*5⊕*x*4 |  |  *x*4⊕x2⊕1 |
|  ⊕ |  *x*12⊕*x*9⊕*x*8⊕*x*6⊕*x*4⊕*x*⊕1 |  |  |
|  *x*12⊕*x*10⊕*x*7⊕*x*6⊕*x*4⊕*x*3⊕*x*2 |  |  |
|  ⊕ |  *x*10⊕*x*9⊕*x*8x7⊕x3⊕*x*2⊕*x*⊕1 |  |   |
|  *x*10⊕*x*8⊕*x*5⊕*x*4⊕*x*2⊕*x*⊕1 |  |  |
|  |  *x*9⊕*x*7⊕*x*5⊕*x*4⊕*x*3 |  |  . |

Остача від ділення *R*(*x*)≠0, що вказує на наявність помилок у прийнятій кодовій комбінації *F*\*(*x*). Здатність побудованого коду

БЧХ виправляти помилки ( *dmin*= 7 ) не дозволяє виправити ці шість помилок.

Надмірність коду *R* =  *r*/ *n*=  10 / 15  =  2 / 3.

**9.3. Задачі**

**9.3.1.**  Закодувати двійковим циклічним кодом з  *dmin* = 3, що виправ­ляє однократні помилки, комбінацію двійкового простого коду *Q*(*x*) довжиною  *k*інформаційних елементів згідно з варіантом, поданим в таблиці 9.3.1. Твірний поліном *P*(*x*) визначити з таблиці 9.1. Показати процес виправлення будь-якої однократної помилки і визначити надмірність коду.

####  Таблиця 9.3.1

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| № варіанта | *k* | Поліном комбінації двійковогопростого коду *Q*(*x*) |
| 1 | 4 | *x*2⊕*x*⊕1 |
| 2 | 5 | *x*4⊕*x*2⊕*x* |
| 3 | 6 | *x*5⊕*x*2⊕1 |
| 4 | 7 | *x*6⊕*x*⊕1 |
| 5 | 8 | *x*7⊕*x*6⊕*x*4⊕*x* |
| 6 | 9 | *x*7⊕*x*5⊕*x*3⊕1 |
| 7 | 10 | *x*9⊕*x*6⊕*x*2⊕*x*⊕1 |
| 8 | 11 | *x*10⊕*x*9⊕*x*8⊕*x*4⊕*x* |
| 9 | 12 | *x*11⊕*x*10⊕*x*7⊕*x*6⊕*x*3⊕1 |
| 10 | 14 | *x*13⊕*x*12⊕*x*10⊕*x*9⊕*x*3⊕*x*2 |

**9.3.2.**  Закодувати двійковим циклічним кодом, що виявляє три­кратні помилки ( *dmin* = 4 ), кодову комбінацію двійкового простого коду  *Q*(*x*)  довжиною  *k*інформаційних елементів згідно з варіантом, пода­ним в таблиці 9.3.2. Твірний поліном  *P*(*x*) визначити з таблиці 9.1. Показати процес виявлення будь-якої трикратної помилки і визна­чити надмірність коду.

####  Таблиця 9.3.2

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| № варіанта | *k* | Поліном комбінації двійковогопростого коду *Q*(*x*) |
| 1 | 4 | *x*2⊕*x*⊕1 |
| 2 | 5 | *x*4⊕*x*2⊕*x* |
| 3 | 6 | *x*5⊕*x*4⊕*x*2⊕1 |
| 4 | 7 | *x*6⊕*x*4⊕*x*⊕1 |
| 5 | 8 | *x*7⊕*x*6⊕*x*3⊕*x* |
| 6 | 9 | *x*8⊕*x*3⊕*x*⊕1 |
| 7 | 10 | *x*9⊕*x*6⊕*x*2⊕*x*⊕1 |
| 8 | 11 | *x*10⊕*x*9⊕*x*5⊕*x*2⊕1 |
| 9 | 12 | *x*11⊕*x*8⊕*x*7⊕*x*3⊕*x*2 |
| 10 | 14 | *x*13⊕*x*11⊕*x*10⊕*x*7⊕*x*3⊕*x* |

**9.3.3.** Побудувати твірну матрицю двійкового циклічного коду з мінімальною кодовою відстанню *dmin* = 3 ( здатного виправляти однократні помилки ), твірний поліном  *P*(*x*)  якого та довжина *n* вибираються згідно з варіантом, поданим в таблиці 9.3.3.

Таблиця 9.3.3

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| №варіанта | Довжинакоду *n* | Твірний поліном циклічного коду *P*(*x*) |
| 1 | 7 | *x*3⊕*x*2⊕1 |
| 2 | 9 | *x*4⊕*x*⊕1 |
| 3 | 15 | *x*4⊕*x*3⊕1 |
| 4 | 16 | *x*5⊕*x*2⊕1 |
| 5 | 17 | *x*5⊕*x*3⊕*x*2⊕*x*⊕1 |

**9.3.4.** Побудувати перевірочну матрицю двійкового циклічного коду з мінімальною кодовою відстанню *dmin* = 3 ( здатного виправляти однократні помилки ), твірний поліном  *P*(*x*)  якого та довжина *n* вибираються згідно з варіантом, поданим в таблиці 9.3.4.

 Таблиця 9.3.4

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| №варіанта | Довжина коду *n* | Твірний поліном циклічного коду *P*(*x*) |
| 1 | 7 | *x*3⊕*x*⊕1 |
| 2 | 10 | *x*4⊕*x*⊕1 |
| 3 | 12 | *x*4⊕*x*3⊕1 |
| 4 | 18 | *x*5⊕*x*3⊕1 |
| 5 | 20 | *x*5⊕*x*4⊕*x*2⊕*x*⊕1 |

**9.3.5.** Згідно з варіантом, поданим в таблиці 9.3.5, знайти твірний поліном  *P*(*x*)  двійкового коду БЧХ, який має *N*0 дозволених кодових комбінацій та здатен виправляти по­милки кратності *s*. Визначити надмірність коду.

 Таблиця 9.3.5

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| № варіанта | Кратність помилки , *s* | *N*0 |
| 1 | 2 | 128 |
| 2 | 2 | 100 |
| 3 | 3 | 32 |
| 4 | 5 | 2048 |
| 5 | 7 | 64 |

**9.3.6.** Згідно з варіантом, поданим в таблиці 9.3.6, закодувати ко­дову комбінацію двійкового простого коду, якій відповідає поліном *Q*(*x*), двійковим кодом БЧХ, що виявляє *s*  помилок. Показати процес виявлення будь-якої помилки кратності *s*  і визначити надмірність коду.

####  Таблиця 9.3.6

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| № варіанта | Кратність *s* помилок, що виявляються | Поліном комбінації двійкового простого коду *Q*(*x*) |
| 1 | 4 | *x*6⊕*x*⊕1 |
| 2 | 6 | *x*4⊕*x*2⊕*x* |
| 3 | 4 | *x*20⊕*x*4⊕*x*2⊕1 |
| 4 | 6 | *x*15⊕*x*8⊕*x*⊕1 |
| 5 | 10 | *x*10⊕*x*6⊕*x*3⊕*x* |