

1.6. Степеневі ряди

Функціональний ряд має вигляд

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) = u_1(x) + u_2(x) + \dots + u_n(x) + \dots,$$

де $u_1(x)$, $u_2(x)$, ..., $u_n(x)$, ... – деякі функції аргументу x .

Областю збіжності функціонального ряду є множина всіх значень x , при яких збігається числовий ряд з відповідних значень функцій $u_1(x)$, $u_2(x)$, ..., $u_n(x)$, ...

Важливим випадком функціонального ряду є **степеневий ряд**

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n + \dots, (**)$$

де a_n ($n = 0, 1, 2, 3, \dots$) – коефіцієнти ряду.

Інтервалом збіжності степеневого ряду називається інтервал $(-R, R)$ такий, що всередині нього ($|x| < R$) ряд збігається, причому абсолютно, а зовні ($|x| > R$) – ряд розбігається. Число R називається **радіусом збіжності** і може приймати значення від нуля до нескінченності. (У деяких рядів інтервал збіжності вироджується в точку ($R = 0$), або ж ряд збігається при всіх значеннях x ($R = \infty$)).

На кінцях інтервалу $x = \pm R$ одержані числові ряди досліджуються окремо.

Областю збіжності степеневого ряду є об'єднання інтервалу збіжності $(-R, R)$ і тих його кінців $x = \pm R$, де ряд збігається хоча б умовно.

Інтервал збіжності степеневого ряду $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ можна визначити:

а) за ознакою Даламбера для ряду з модулів:

$$\text{якщо } \lim_{n \rightarrow \infty} |u_{n+1}/u_n| < 1, \text{ то ряд збігається.}$$

б) за радикальною ознакою Коші для ряду з модулів:

якщо $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|u_n|} < 1$, то ряд збігається.

Для степеневих рядів стандартного вигляду (**), застосовуючи ці ознаки, відповідно одержуємо:

$$R = \lim_{n \rightarrow \infty} |a_n / a_{n+1}| \quad \text{або} \quad R = 1 / \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|}.$$

Аналогічно за цими ознаками можна знайти внутрішні точки області абсолютної збіжності функціонального ряду $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$. У межових точках відповідні числові ряди досліджуються окремо.

Зауважимо, що степеневий ряд вигляду

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n = a_0 + a_1 (x - x_0) + \dots + a_n (x - x_0)^n + \dots,$$

де x_0 – центр розвинення, можна привести до стандартного подання (**), якщо позначити $x_1 = x - x_0$:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x_1^n.$$

Такий ряд збігається при $|x - x_0| < R$ і розбігається при $|x - x_0| > R$. Отже, маємо інтервал збіжності $x_0 - R < x < x_0 + R$. На кінцях інтервалу збіжності при $x = x_0 + R$ і при $x = x_0 - R$ одержані числові ряди досліджуються окремо.

1.6.1. Приклади розв'язання задач

Приклад 1. Знайти області збіжності даних функціональних рядів:

$$\begin{aligned} \text{а)} \quad & \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{n} \sin \frac{x^2}{3^n}; \quad \text{б)} \quad \sum_{n=1}^{\infty} x^n \operatorname{tg} \frac{x}{n^2}; \quad \text{в)} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^{n-1}}{4^{n+2} x^n}; \\ \text{г)} \quad & \sum_{n=1}^{\infty} \ln^{2n} (x + 1/n); \quad \text{д)} \quad \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n 4^{3n}}{x^{2n} \ln n}. \end{aligned}$$

Розв'язання. а) Застосуємо ознаку Даламбера до ряду з абсолютних величин:

$$\begin{aligned}
 u_n &= \sqrt{n} \sin \frac{x^2}{3^n}; \quad u_{n+1} = \sqrt{n+1} \sin \frac{x^2}{3^{n+1}}; \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| = \\
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{\sqrt{n+1} \sin(x^2/3^{n+1})}{\sqrt{n} \sin(x^2/3^n)} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n+1}}{\sqrt{n}} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sin(x^2/3^{n+1})}{\sin(x^2/3^n)} = \\
 &= \left| \frac{\sin \alpha \sim \alpha \text{ при } \alpha \rightarrow 0; \quad \sin(x^2/3^{n+1}) \sim x^2/3^{n+1};}{\sin(x^2/3^n) \sim x^2/3^n \text{ при } n \rightarrow \infty} \right| = \\
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{1+1/n} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x^2/3^{n+1}}{x^2/3^n} = \frac{1}{3} \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{1+1/n} = \frac{1}{3} < 1.
 \end{aligned}$$

Отже, даний функціональний ряд збігається абсолютно при $x \in (-\infty, \infty)$, тобто його областю збіжності є вся числова пряма.

б) Застосуємо ознаку Даламбера до ряду з модулів:

$$\begin{aligned}
 \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{x^{n+1} \operatorname{tg}(x/(n+1)^2)}{x^n \operatorname{tg}(x/n^2)} \right| = |x| \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{\operatorname{tg}(x/(n+1)^2)}{\operatorname{tg}(x/n^2)} \right| = \\
 &= \left| \frac{\operatorname{tg} \alpha \sim \alpha \text{ при } \alpha \rightarrow 0; \quad \operatorname{tg}(x/(n+1)^2) \sim x/(n+1)^2;}{\operatorname{tg}(x/n^2) \sim x/n^2 \text{ при } n \rightarrow \infty} \right| = \\
 &= |x| \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{x/(n+1)^2}{x/n^2} \right| = |x| \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2}{(n+1)^2} = |x| \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{(1+1/n)^2} = |x|.
 \end{aligned}$$

Отже, при $|x| < 1$, тобто при $-1 < x < 1$ ряд збігається абсолютно. Дослідимо збіжність на кінцях інтервалу:

1) При $x = 1$ маємо ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{tg}(1/n^2)$. Цей ряд збігається за граничною ознакою порівняння зі збіжним рядом $\sum_{n=1}^{\infty} 1/n^2$:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\operatorname{tg}(1/n^2)}{(1/n^2)} = 1. \text{ Ряди поведуть себе однаково.}$$

2) При $x = -1$ маємо ряд $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \operatorname{tg}(1/n^2)$. Цей знакопо-

черговий ряд збігається абсолютно, бо розглянутий вище ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{tg}(1/n^2)$ є рядом з його модулів.

Отже, даний функціональний ряд збігається абсолютно при $-1 \leq x \leq 1$, тобто його областю збіжності є відрізок $[-1; 1]$.

в) Введемо нову змінну $z = 1/x$. Тоді $x = 1/z$ і ми маємо степенеий ряд за степенями z стандартного вигляду $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^{n-1}}{4^{n+2}} z^n$.

Знайдемо радіус збіжності цього ряду за радикальною ознакою Коші $R = 1 / \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|}$:

$$\begin{aligned} R &= 1 : \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = 1 : \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{5^{n-1} / 4^{n+2}} = 1 : \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5^{(n-1)/n}}{4^{(n+2)/n}} = \\ &= 1 : \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5^{1-1/n}}{4^{1+2/n}} = \frac{4}{5}. \end{aligned}$$

Отже, утворений ряд $\sum_{n=1}^{\infty} (5^{n-1} z^n / 4^{n+2})$ абсолютно збігається при $|z| < 4/5$, тобто $1/|x| < 4/5$, або $|x| > 5/4$. Таким чином, початковий ряд збігається абсолютно, якщо $x > 5/4$ або $x < -5/4$, тобто при $x \in (-\infty, -5/4) \cup (5/4, \infty)$. Дослідимо його збіжність на кінцях проміжків при $x = \pm 5/4$:

1) При $x = 5/4$ маємо ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^{n-1}}{4^{n+2} (5/4)^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{80}$ що розбігається за необхідною ознакою:

$$u_n = 1/80; \lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 1/80 \neq 0.$$

2) При $x = -5/4$ маємо ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^{n-1}}{4^{n+2} (-5/4)^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{80}$. Цей знакочерговий ряд розбігається, бо

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |u_n| = \lim_{n \rightarrow \infty} |(-1)^n \cdot 1/80| = 1/80 \neq 0.$$

Отже, даний функціональний ряд має область збіжності

$(-\infty; -5/4) \cup (5/4; +\infty)$, де збігається абсолютно.

г) Застосуємо радикальну ознаку Коші до ряду з модулів:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|u_n|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|\ln^{2n}(x+1/n)|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \ln^2(x+1/n) = \ln^2 x.$$

При $\ln^2 x < 1$ ряд збігається абсолютно. Звідси

$$|\ln x| < 1; \quad -1 < \ln x < 1; \quad e^{-1} < x < e.$$

Дослідимо збіжність на кінцях інтервалу:

1) При $x = e$ маємо ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \ln^{2n}(e+1/n)$. Оскільки:

$$\begin{aligned} q &= \lim_{n \rightarrow \infty} u_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \ln^{2n}(e+1/n) = |1^\infty| = \\ &= \left| \ln q = \ln \lim_{t \rightarrow \infty} \ln^{2t}(e+1/t) = \left| s = 1/t; s \rightarrow 0 \text{ нпу } t \rightarrow \infty \right| = \right. \\ &= 2 \lim_{s \rightarrow 0} \frac{\ln \ln(e+s)}{s} = \left| \frac{0}{0} \right| = 2 \lim_{s \rightarrow 0} \frac{(\ln \ln(e+s))'}{s'} = \\ &= 2 \lim_{s \rightarrow 0} \frac{1}{(e+s) \ln(e+s)} = \frac{2}{e}; \quad q = e^{2/e} = e^{2/e} \neq 0, \end{aligned}$$

то цей ряд розбігається, бо не виконується необхідна ознака.

2) При $x = e^{-1}$ маємо ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \ln^{2n}(e^{-1}+1/n)$. Оскільки:

$$\begin{aligned} q &= \lim_{n \rightarrow \infty} u_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \ln^{2n}(e^{-1}+1/n) = |1^\infty| = \\ &= \left| \ln q = \ln \lim_{t \rightarrow \infty} \ln^{2t}(e^{-1}+1/t) = \left| s = 1/t; s \rightarrow 0 \text{ нпу } t \rightarrow \infty \right| = \right. \\ &= 2 \lim_{s \rightarrow 0} \frac{\ln \ln(e^{-1}+s)}{s} = \left| \frac{0}{0} \right| = 2 \lim_{s \rightarrow 0} \frac{(\ln \ln(e^{-1}+s))'}{s'} = \\ &= 2 \lim_{s \rightarrow 0} \frac{1}{(e^{-1}+s) \ln(e^{-1}+s)} = -2e; \quad q = e^{-2e} = e^{-2e} \neq 0, \end{aligned}$$

то цей ряд також розбігається.

Отже, даний функціональний ряд збігається абсолютно при $e^{-1} < x < e$, тобто його областю збіжності є інтервал $(e^{-1}; e)$.

д) Введемо нову змінну $z = 1/x^2$. Тоді $x^2 = 1/z$ і ми маємо степеневий ряд за степенями z стандартного вигляду

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n 4^{3n} z^n}{\ln n}.$$

Знайдемо радіус збіжності цього ряду за ознакою

Даламбера $R = \lim_{n \rightarrow \infty} |a_n / a_{n+1}| :$

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{(-1)^n 4^{3n}}{\ln n}; \quad a_{n+1} = \frac{(-1)^{n+1} 4^{3(n+1)}}{\ln(n+1)}; \quad R = \lim_{n \rightarrow \infty} |a_n / a_{n+1}| = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{(-1)^{n+1} 4^{3(n+1)}}{\ln(n+1)} : \frac{(-1)^n 4^{3n}}{\ln n} \right| = 4^3 \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln n}{\ln(n+1)} = 64 \times \\ &\times \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\ln x)'}{(\ln(x+1))'} = 64 \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1/x}{1/(x+1)} = 64 \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(x+1)'}{x'} = 64. \end{aligned}$$

Отже, утворений ряд абсолютно збігається при $|z| < 64$, тобто $1/x^2 < 64$, або $|x| > 8$. Таким чином, початковий ряд збігається абсолютно, якщо $x > 8$ або $x < -8$, тобто при $x \in (-\infty, -8) \cup (8, \infty)$. Дослідимо його збіжність на кінцях проміжків при $x = \pm 8$:

1) При $x = 8$ маємо ряд $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n 4^{3n}}{8^{2n} \ln n} = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\ln n}$. Ряд з його

модулів $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\ln n}$ розбігається за основною ознакою порівняння з

розбіжним гармонічним рядом $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$, тому що $\frac{1}{\ln n} > \frac{1}{n}$.

Оскільки

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |u_n| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\ln n} = 0 \quad \text{і} \quad |u_n| = \frac{1}{\ln n} > \frac{1}{\ln(n+1)} = |u_{n+1}|,$$

то за ознакою Лейбница знакопочерговий ряд збігається умовно.

2) При $x = -8$ маємо ряд $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n 4^{3n}}{(-8)^{2n} \ln n} = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\ln n}$, що спів-

падає з одержаним при $x = 8$. Він збігається умовно.

Отже, областю збіжності даного функціонального ряду служить об'єднання двох закритих променів $(-\infty; -8] \cup [8; +\infty)$.

Приклад 2. Знайти області збіжності даних степеневих рядів:

$$\begin{aligned} \text{а) } \sum_{n=1}^{\infty} n \cdot 3^{n-1} x^n; \quad \text{б) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n x^n}{(n+2)2^{n-1}}; \quad \text{в) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n! x^n}{3^n (n+2)}; \\ \text{г) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-1)^n}{n(n+3)}; \quad \text{д) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)(x+2)^n}{5^n}; \quad \text{е) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4^n (x+1)^{2n}}{n}; \\ \text{є) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{6^{n-1} (x-3)^n}{n!}; \quad \text{ж) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n x^n}{5^{n+2}}; \quad \text{з) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n \ln n}{n^2}; \\ \text{и) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+3)^{2n+1}}{3n^2 + 2}; \quad \text{і) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+4)^{3n+2}}{5^{n-3}}; \\ \text{ї) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} x^{2n-1}}{\sqrt[3]{n}}; \quad \text{к) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n (x-4)^n}{n!}. \end{aligned}$$

Розв'язання. а) Маємо степеневий ряд за степенями x стандартного вигляду. Знайдемо радіус збіжності цього ряду за ознакою Даламбера $R = \lim_{n \rightarrow \infty} |a_n / a_{n+1}|$:

$$\begin{aligned} a_n = n \cdot 3^{n-1}; \quad a_{n+1} = (n+1) \cdot 3^n; \quad R = \lim_{n \rightarrow \infty} |a_n / a_{n+1}| = \\ = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{n \cdot 3^{n-1}}{(n+1) \cdot 3^n} \right| = \frac{1}{3} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n+1} = \frac{1}{3} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{1+1/n} = \frac{1}{3}. \end{aligned}$$

Ряд збігається абсолютно при $|x| < 1/3$, тобто $-1/3 < x < 1/3$.
Перевіримо збіжність ряду на кінцях цього проміжку:

1) При $x = 1/3$ маємо ряд $\sum_{n=1}^{\infty} n \cdot 3^{n-1} (1/3)^n = (1/3) \sum_{n=1}^{\infty} n$. Цей ряд розбігається, бо не виконується необхідна ознака:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = (1/3) \lim_{n \rightarrow \infty} n = \infty \neq 0.$$

2) При $x = -1/3$ маємо знакочерговий ряд

$\sum_{n=1}^{\infty} n \cdot 3^{n-1} (-1/3)^n = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n n$. Цей ряд теж розбігається, тому що

не виконується необхідна ознака: $\lim_{n \rightarrow \infty} |u_n| = (1/3) \lim_{n \rightarrow \infty} n = \infty \neq 0$.

Отже, область збіжності ряду – інтервал $x \in (-1/3; 1/3)$.

б) Маємо степеневий ряд за степенями x стандартного вигляду. Знайдемо радіус збіжності цього ряду за ознакою Даламбера

$$R = \lim_{n \rightarrow \infty} |a_n / a_{n+1}| :$$

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{(-1)^n}{(n+2)2^{n-1}}; \quad a_{n+1} = \frac{(-1)^{n+1}}{(n+3)2^n}; \quad R = \lim_{n \rightarrow \infty} |a_n / a_{n+1}| = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{(-1)^n (n+3) \cdot 2^n}{(n+2) \cdot 2^{n-1} \cdot (-1)^{n+1}} \right| = 2 \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+3}{n+2} = 2 \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1+3/n}{1+2/n} = 2. \end{aligned}$$

Ряд збігається абсолютно при $|x| < 2$, тобто $-2 < x < 2$. Перевіримо його збіжність на кінцях інтервалу:

1) При $x = -2$ маємо ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n (-2)^n}{(n+2)2^{n-1}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{2n} 2^n}{(n+2)2^{n-1}} = 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+2}.$$

Цей ряд розбігається за граничною ознакою порівняння з рядом $\sum_{n=1}^{\infty} b_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$, що розбігається:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n+2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{1+2/n} = 1.$$

2) При $x = 2$ маємо ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n 2^n}{(n+2)2^{n-1}} = 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+2}$. Щойно

показано, що ряд з модулів $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+2}$ розбігається. Знакопочерговий

ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+2}$ збігається умовно, бо для нього виконуються умови ознаки Лейбница:

$$a_n = 1/(n+2); a_1 = 1/3, a_2 = 1/4, a_3 = 1/5, \dots$$

$$1/3 > 1/4 > 1/5 > \dots > 1/(n+2) > \dots \quad \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} 1/(n+2) = 0.$$

Отже, даний степеневий ряд має область збіжності $(-2, 2]$, причому на правому кінці $x = 2$ він збігається умовно.

в) Маємо степеневий ряд за степенями x стандартного вигляду. Знайдемо радіус збіжності цього ряду за ознакою Даламбера $R = \lim_{n \rightarrow \infty} |a_n/a_{n+1}|$:

$$a_n = \frac{n!}{3^n(n+2)}; a_{n+1} = \frac{(n+1)!}{3^{n+1}(n+3)}; R = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n! \cdot 3^{n+1}(n+3)}{3^n(n+2)(n+1)!} =$$

$$= 3 \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n!}{(n+1)!} \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+3}{n+2} = 3 \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n+1} \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1+3/n}{1+2/n} = 3 \cdot 0 \cdot 1 = 0.$$

Отже, радіус збіжності даного ряду $R = 0$, тобто даний ряд збігається тільки при $x = 0$.

г) Маємо степеневий ряд за степенями $x-1$ стандартного вигляду. Знайдемо радіус збіжності цього ряду за ознакою Даламбера $R = \lim_{n \rightarrow \infty} |a_n/a_{n+1}|$:

$$a_n = \frac{1}{n(n+3)}; a_{n+1} = \frac{1}{(n+1)(n+4)}; R = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)(n+4)}{n(n+3)} =$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{n} \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+4}{n+3} = \lim_{n \rightarrow \infty} (1+1/n) \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1+4/n}{1+3/n} = 1.$$

Отже, ряд збігається абсолютно при $|x-1| < 1$, тобто $-1 < x-1 < 1$, або $0 < x < 2$. Перевіримо збіжність ряду на кінцях інтервалу:

1) При $x = 2$ маємо ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+3)}$ Цей ряд збігається за

основною ознакою порівняння з рядом $\sum_{n=1}^{\infty} 1/n^2$, що збігається:

$$a_n = \frac{1}{n^2 + 3n} < \frac{1}{n^2} = b_n.$$

Таким чином, при $x = 2$ степеневий ряд збігається абсолютно.

2) При $x = 0$ маємо ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n(n+3)}$. Це знакопочерговий ряд.

Вище показано, що ряд $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+3)}$, складений з його абсолютних величин, збігається. Отже, цей знакопочерговий ряд

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n(n+3)}$ збігається абсолютно.

Таким чином, даний степеневий ряд має область збіжності $[0, 2]$, де скрізь збігається абсолютно.

д) Маємо степеневий ряд за степенями $x + 2$ стандартного вигляду $\sum_{n=1}^{\infty} a_n (x + 2)^n$, де $a_n = (2n - 1)/5^n$. Знайдемо радіус збіжності цього ряду за ознакою Даламбера $R = \lim_{n \rightarrow \infty} |a_n / a_{n+1}|$:

$$R = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(2n - 1)/5^n}{(2n + 1)/5^{n+1}} = 5 \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2 - 1/n}{2 + 1/n} = 5.$$

Отже, даний ряд збігається при $|x + 2| < 5$, тобто $-5 < x + 2 < 5$, або $-7 < x < 3$. Розглянемо збіжність ряду на кінцях цього проміжку:

1) При $x = 3$ маємо ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n - 1)5^n}{5^n} = \sum_{n=1}^{\infty} (2n - 1)$. Цей ряд розбігається, бо не виконується необхідна ознака:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} (2n - 1) = \infty \neq 0.$$

2) При $x = -7$ маємо ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n - 1)(-5)^n}{5^n} = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n (2n - 1)$. Цей знакопочерговий ряд теж розбігається, бо

не виконується необхідна ознака: $\lim_{n \rightarrow \infty} |a_n| = \lim_{n \rightarrow \infty} (2n - 1) = \infty \neq 0$.

Таким чином, даний степеневий ряд має область збіжності $(-7,3)$.

е) Даний степеневий ряд за степенями $x+1$ має нестандартний вигляд. Знайдемо його інтервал збіжності безпосередньо за ознакою Даламбера:

$$u_n(x) = 4^n (x+1)^{2n} / n; \quad u_{n+1}(x) = 4^{n+1} (x+1)^{2n+2} / (n+1);$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{4^{n+1} (x+1)^{2n+2} \cdot n}{(n+1) \cdot 4^n (x+1)^{2n}} \right| =$$

$$= 4(x+1)^2 \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n+1} = 4(x+1)^2 \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{1+1/n} = 4(x+1)^2.$$

Даний ряд збігається абсолютно, якщо $4(x+1)^2 < 1$ або $(x+1)^2 < 1/4$, $-1/2 < x+1 < 1/2$, $-3/2 < x < -1/2$.

Перевіримо збіжність ряду на кінцях цього проміжку:

1) При $x = -1/2$ маємо ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4^n (1/2)^{2n}}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4^n}{2^{2n} n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4^n}{4^n n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}.$$

Це гармонічний ряд, що розбігається.

2) При $x = -3/2$ маємо ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4^n (-1/2)^{2n}}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4^n}{(-2)^{2n} n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4^n}{4^n n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}, \text{ що розбігається.}$$

Отже, область збіжності даного степеневому ряду – інтервал $(-3/2; -1/2)$.

є) Маємо степеневий ряд за степенями $x-3$ стандартного вигляду. Знайдемо радіус збіжності цього ряду за ознакою Даламбера $R = \lim_{n \rightarrow \infty} |a_n / a_{n+1}|$:

$$a_n = 6^{n-1} / n!; \quad a_{n+1} = 6^n / (n+1)!;$$

$$R = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{6^{n-1} (n+1)!}{n! 6^n} \right| = \frac{1}{6} \lim_{n \rightarrow \infty} (n+1) = \infty.$$

Отже, ряд збігається при $-\infty < x-3 < \infty$, або $-\infty < x < \infty$,

тобто область збіжності цього ряду $x \in (-\infty, \infty)$.

ж) Маємо степеневий ряд за степенями x стандартного вигляду. Знайдемо радіус збіжності цього ряду за ознакою Даламбера

$$R = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| a_n / a_{n+1} \right| :$$

$$a_n = \frac{3^n}{5^{n+2}} ; \quad a_{n+1} = \frac{3^{n+1}}{5^{n+3}} ; \quad R = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{3^n \cdot 5^{n+3}}{5^{n+2} \cdot 3^{n+1}} \right| = \frac{5}{3}.$$

Таким чином, даний степеневий ряд збігається абсолютно при $-5/3 < x < 5/3$. Дослідимо збіжність цього ряду на кінцях інтервалу:

1) При $x = 5/3$ маємо ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n \cdot (5/3)^n}{5^{n+2}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n \cdot 5^n}{5^{n+2} \cdot 3^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{5^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{25},$$

що розбігається, бо не виконується необхідна ознака:

$$u_n = 1/25 ; \quad \lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 1/25 \neq 0.$$

2) При $x = -5/3$ маємо ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n \cdot (-5/3)^n}{5^{n+2}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n (-1)^n \cdot 5^n / 3^n}{5^{n+2}} = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{25}.$$

Цей знакопочерговий ряд розбігається, бо не виконується необхідна ознака: $\lim_{n \rightarrow \infty} |u_n| = \lim_{n \rightarrow \infty} |(-1)^n \cdot 1/25| = 1/25 \neq 0$.

Отже, областю збіжності даного степеневого ряду служить інтервал $(-5/3, 5/3)$.

з) Маємо степеневий ряд за степенями x стандартного вигляду. Знайдемо радіус збіжності цього ряду за ознакою Даламбера

$$R = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| a_n / a_{n+1} \right| :$$

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{\ln n}{n^2} ; \quad a_{n+1} = \frac{\ln(n+1)}{(n+1)^2} ; \quad R = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{\ln(n+1)}{(n+1)^2} : \frac{\ln n}{n^2} \right| = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2}{(n+1)^2} \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln(n+1)}{\ln n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{(1+1/n)^2} \cdot \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\ln(x+1))'}{(\ln x)'} = \end{aligned}$$

$$= 1 \cdot \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1/(x+1)}{1/x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x'}{(x+1)'} = 1,$$

де друга границя як невизначеність типу ∞/∞ розкрита за правилом Лопітала.

Таким чином, даний степеневий ряд збігається абсолютно при $-1 < x < 1$. Дослідимо збіжність цього ряду на кінцях інтервалу:

1) При $x = -1$ маємо знакопочерговий ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \ln n}{n^2}$. До

ряду з його модулів $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{n^2}$ застосуємо інтегральну ознаку:

$$\begin{aligned} \int_1^{\infty} f(x) dx &= \int_1^{\infty} \frac{\ln x}{x^2} dx = \lim_{A \rightarrow \infty} \int_1^A \frac{\ln x}{x^2} dx = \left| \int_a^b u dv = uv \Big|_a^b - \int_a^b v du; \right. \\ u &= \ln x; \quad du = \frac{dx}{x}; \quad dv = \frac{dx}{x^2}; \quad v = -\frac{1}{x} \Big| = \lim_{A \rightarrow \infty} (\ln x \cdot (-1/x)) \Big|_1^A - \\ &- \lim_{A \rightarrow \infty} \int_1^A (-1/x) \frac{dx}{x} = - \lim_{A \rightarrow \infty} \frac{\ln A}{A} - \lim_{A \rightarrow \infty} (1/x) \Big|_1^A = - \lim_{A \rightarrow \infty} \frac{(\ln A)'}{A'} - \\ &- \lim_{A \rightarrow \infty} \frac{1}{A} + 1 = - \lim_{A \rightarrow \infty} \frac{1}{A} - 0 + 1 = 1 \neq \infty. \end{aligned}$$

Оскільки невластний інтеграл збігається, то знакопочерговий ряд збігається абсолютно.

2) При $x = 1$ маємо ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{n^2}$, що співпадає з вище дослідженим. Він збігається.

Отже, областю збіжності даного степеневому ряду служить відрізок $[-1; 1]$.

и) Маємо степеневий ряд за степенями $x+3$ нестандартного вигляду. Знайдемо його інтервал збіжності безпосередньо за ознакою Даламбера:

$$u_n = \frac{(x+3)^{2n+1}}{3n^2+2}; \quad u_{n+1} = \frac{(x+3)^{2(n+1)+1}}{3(n+1)^2+2} = \frac{(x+3)^{2n+3}}{3(n+1)^2+2};$$

$$\begin{aligned}\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)} \right| &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{(x+3)^{2n+3} \cdot (3n^2+2)}{(3(n+1)^2+2)(x+3)^{2n+1}} \right| = (x+3)^2 \times \\ &\times \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n^2+2}{3(n+1)^2+2} = (x+3)^2 \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3+2/n^2}{3(1+1/n)^2+2/n^2} = \\ &= (x+3)^2 \cdot (3/3) = (x+3)^2.\end{aligned}$$

Отже, при $(x+3)^2 < 1$ ряд збігається абсолютно, тобто ряд збігається абсолютно при $-1 < x+3 < 1$, або $-4 < x < -2$. Перевіряємо збіжність ряду на кінцях цього інтервалу:

1) При $x = -2$ маємо ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-2+3)^{2n+1}}{3n^2+2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3n^2+2}$. Цей

ряд збігається за ознакою порівняння з рядом $\sum_{n=1}^{\infty} 1/n^2$, що збігається:

$$a_n = 1/(3n^2+2), \quad b_n = 1/n^2; \quad a_n = 1/(3n^2+2) < 1/3n^2 < 1/n^2 = b_n.$$

Отже $a_n < b_n$, тобто ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3n^2+2}$ теж збігається.

2) При $x = -4$ маємо ряд:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-4+3)^{2n+1}}{3n^2+2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{2n+1}}{3n^2+2} = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3n^2+2}.$$

Цей ряд відрізняється від попереднього лише сталим множником -1 . Отже, він також збігається.

Таким чином, даний степеневий ряд має область збіжності $[-4, -2]$.

і) Маємо степеневий ряд за степенями $x+4$ нестандартного вигляду. Знайдемо його інтервал збіжності безпосередньо за радикальною ознакою Коші:

$$\begin{aligned}\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|u_n|} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\left| \frac{(x+4)^{3n+2}}{5^{n-3}} \right|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|x+4|^{(3n+2)/n}}{5^{(n-3)/n}} = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|x+4|^{3+2/n}}{5^{1-3/n}} = \frac{|x+4|^3}{5}.\end{aligned}$$

Ряд збігається абсолютно, якщо $|x + 4|^3/5 < 1$. Звідси
 $|x + 4| < \sqrt[3]{5}$; $-\sqrt[3]{5} < x + 4 < \sqrt[3]{5}$, $-\sqrt[3]{5} - 4 < x < \sqrt[3]{5} - 4$.

Перевіримо збіжність ряду на кінцях цього проміжку:

1) При $x = \sqrt[3]{5} - 4$ маємо ряд:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\sqrt[3]{5})^{3n+2}}{5^{n-3}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^{(3n+2)/3}}{5^{n-3}} = \sum_{n=1}^{\infty} 5^{2/3+3} = \sum_{n=1}^{\infty} 5^{11/3}.$$

Цей ряд розбігається, бо не виконується необхідна ознака:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = \lim_{n \rightarrow \infty} 5^{11/3} = 5^{11/3} \neq 0.$$

2) при $x = -\sqrt[3]{5} - 4$ маємо ряд:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-\sqrt[3]{5})^{3n+2}}{5^{n-3}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{3n+2} 5^{(3n+2)/3}}{5^{n-3}} = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n 5^{11/3}.$$

Цей ряд теж розбігається, бо $\lim_{n \rightarrow \infty} |u_n| = 5^{11/3} \neq 0$.

Таким чином, для даного степеневому ряду маємо область збіжності $(-\sqrt[3]{5} - 4, \sqrt[3]{5} - 4)$, де ряд збігається абсолютно.

і) Маємо степеневий ряд нестандартного вигляду (за непарними степенями x). Знайдемо його інтервал збіжності безпосередньо за ознакою Даламбера:

$$u_n = \frac{(-1)^{n+1} x^{2n-1}}{\sqrt[3]{n}}; \quad u_{n+1} = \frac{(-1)^{n+2} x^{2(n+1)-1}}{\sqrt[3]{n+1}} = \frac{(-1)^{n+2} x^{2n+1}}{\sqrt[3]{n+1}};$$

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{(-1)^{n+2} x^{2n+1} \cdot \sqrt[3]{n}}{\sqrt[3]{n+1} \cdot (-1)^{n+1} x^{2n-1}} \right| = |x|^2 \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[3]{\frac{n}{n+1}} = \\ &= |x|^2 \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[3]{\frac{1}{1+1/n}} = |x|^2 = x^2. \end{aligned}$$

Цей ряд збігається при $x^2 < 1$. Звідси $-1 < x < 1$.

Дослідимо збіжність на кінцях інтервалу:

1) При $x = 1$ маємо знакопчерговий ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt[3]{n}}$. За озна-

кою Лейбница він збігається, бо

$$a_1 = 1 > a_2 = \frac{1}{\sqrt[3]{2}} > a_3 = \frac{1}{\sqrt[3]{3}} > \dots \text{ і } \lim_{n \rightarrow \infty} |u_n| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt[3]{n}} = 0.$$

Складемо ряд з його абсолютних величин: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{n}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{1/3}}.$

Це розбіжний узагальнений гармонічний ряд. Отже, при $x=1$ маємо ряд, що збігається умовно.

2) При $x = -1$ маємо знакопочерговий ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}(-1)^{2n-1}}{\sqrt[3]{n}} = - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt[3]{n}},$$

що відрізняється від попереднього тільки знаком. Отже, він також збігається умовно.

Таким чином, ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} x^{2n-1}}{\sqrt[3]{n}}$ збігається абсолютно на інтервалі $(-1,1)$. На кінцях інтервалу він збігається умовно. Область збіжності – відрізок $[-1;1]$.

к) Маємо степеневий ряд за степенями $x-4$ стандартного вигляду. Знайдемо радіус збіжності цього ряду за ознакою Даламбера $R = \lim_{n \rightarrow \infty} |a_n/a_{n+1}|$:

$$a_n = \frac{n^n}{n!}; \quad a_{n+1} = \frac{(n+1)^{n+1}}{(n+1)!} = \frac{(n+1)^n \cdot (n+1)}{n!(n+1)} = \frac{(n+1)^n}{n!};$$

$$\begin{aligned} R &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{n^n n!}{n!(n+1)^n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n}{n+1} \right)^n = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n+1-1}{n+1} \right)^n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{-1}{n+1} \right)^{\frac{n+1}{-1} \cdot \frac{-n}{n+1}} = e^{-\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{1+1/n}} = e^{-1}. \end{aligned}$$

Таким чином, даний ряд збігається абсолютно при $|x-4| < e^{-1}$. Звідси $4-1/e < x < 4+1/e$.

Дослідимо збіжність на кінцях інтервалу:

1) При $x = 4+1/e$ одержуємо ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n (1/e)^n}{n!} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{e^n n!}$. За

формулою Стирлінга при $n \rightarrow \infty$ маємо $n! \approx (n/e)^n \sqrt{2\pi n}$. Отже, при $n \rightarrow \infty$ дістаємо

$$a_n = \frac{n^n}{e^n \cdot n!} \approx \frac{n^n}{e^n \cdot (n/e)^n \sqrt{2\pi n}} = \frac{1}{\sqrt{2\pi n}} \sim \frac{1}{\sqrt{n}} = b_n.$$

Тому порівняємо наш ряд з рядом $\sum_{n=1}^{\infty} 1/\sqrt{n}$, що розбігається. За граничною ознакою порівняння:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^n \sqrt{n}}{e^n n!} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^n \sqrt{n}}{e^n \cdot (n/e)^n \sqrt{2\pi n}} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \begin{pmatrix} \neq 0 \\ \neq \infty \end{pmatrix}.$$

Таким чином, ці ряди поведуть себе однаково, тобто розбігаються. Отже, при $x = 4 + 1/e$ ряд розбігається.

2) При $x = 4 - 1/e$ маємо знакопечерговий ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n (-1/e)^n}{n!} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n n^n}{e^n n!} = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n.$$

Знайдемо границю модулів його членів:

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} a_n &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^n}{e^n n!} = \left| n! \approx \left(\frac{n}{e} \right)^n \sqrt{2\pi n} \text{ при } n \rightarrow \infty \right| = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^n}{e^n \cdot (n/e)^n \sqrt{2\pi n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi n}} = 0. \end{aligned}$$

Крім того, при $n \rightarrow \infty$ маємо:

$$a_n = \frac{1}{\sqrt{2\pi n}} > a_{n+1} = \frac{1}{\sqrt{2\pi(n+1)}}.$$

Отже, за ознакою Лейбніца знакопечерговий ряд збігається.

Оскільки вище доведено, що ряд з його модулів $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{e^n n!}$ розбігається, то цей ряд збігається умовно.

Таким чином, область збіжності даного степеневому ряду – півінтервал $[4 - 1/e, 4 + 1/e)$. На лівому кінці збіжність умовна.

1.6.2. Задачі для самостійної роботи

Завдання. Знайти області збіжності даних степеневих рядів:

№	Завдання	№	Завдання
1	$\sum_{n=1}^{\infty} n^2 \cdot 5^{n+2} x^n$	9	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n x^n}{n \cdot 3^{n+1}}$
2	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n-2)! x^n}{2^n \cdot n}$	10	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+2)^n}{(n+1)(n+2)}$
3	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n (x+2)^n}{(n+1)!}$	11	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n (x-2)^{2n}}{n+2}$
4	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^{n+2} (x-1)^n}{(2n-1)!}$	12	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{6^{n+1} (x+4)^n}{4^{n-3}}$
5	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-2)^{n+4}}{4n^2 - 3}$	13	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^{n+5} (x-2)^n}{2^{3n-1}}$
6	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n+1} x^3}{3^{2n}}$	14	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-3)^{2n+3}}{4^{n+1}}$
7	$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n x^n}{n \sqrt{\ln n}}$	15	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} x^{2n+1}}{\sqrt[3]{n+2}}$
8	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(3n+1)(x-1)^n}{4^{n+2}}$	16	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+6)^n}{5^{2n} \sqrt{4n^2 - 1}}$