Математичний апарат, що описує характеристики складних динамічних систем

Якщо поведінку системи розглядати як ланцюг послідовних кінцевих змін її станів, то змінні системи, міняючись у часі, у кожний даний момент будуть характеризуватися деякими значеннями. Якщо одне певне значення змінної u_1 у момент часу t_1, перетворюється в наступне значення u_2 у момент часу t_2, то вважається, що відбувся перехід з (u_1,t_1) в (u_2,t_2). Фактор, під дією якого відбувається перехід, називається *оператором*. Змінна, що випробувала вплив оператора, називається *операндом*. Результат переходу – (u_2,t_2) називається *образом*. Якщо розглядати деяку множину всіх переходів системи зі стану a у стан b, зі стану c у стан d і т.д., то така множина переходів для деякої множини операндів називається *перетворенням*.

Перетворенням можна дати математичне подання за допомогою методу, запропонованого У. Ешби.

Нехай множина станів деякої системи включає стан a,b,c,d і на цю множину операндів діє оператор *P*. Тоді поведінку системи можна описати, наприклад, у такий спосіб:

$$\mathrm{P} = \left\{ \frac{abcd}{bdac} \right. \tag{1.7}$$

У першого рядка запису перераховані стани системи, або операнди. У другому рядку під кожним операндом перебувають образи, у які система переходить зі стану, записаного у верхньому рядку, під дією оператора *P*. У цьому прикладі множина елементів другого рядка не містить не одного нового елемента в порівнянні з першої.

Перетворення, що породжує нові елементи, називається *замкнутим*.

На рисунку1.1 представлений граф переходом системи з наведеними вище перетворенням.

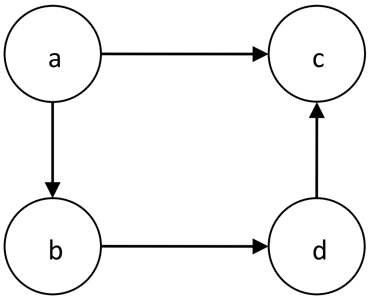

Рис. 1.1. Граф переходів станів системи

В іншім перетворенні $P=\left\{\frac{abcd}{ebca}\right.$ - утримується новий елемент е, отже, перетворення виходить за межі вихідної множини станів системи й називається *незамкнутим.*

Перетворення виду $P=\left\{\frac{abcd}{bdac}\right.$ є однозначним, взаємно однозначним і замкнутим. Перетворення виду $P=\left\{\frac{abcd}{abcd}\right.$ є тотожним.

Перетворення також можна представити в матричній формі, наприклад, для перетворення виду $P=\left\{\frac{abcd}{accb}\right.$ одержуємо матрицю переходів

p	a	b	c	d,
a	1	0	0	0
b	0	0	0	1
c	0	1	1	0
d	0	0	0	0

де операнди представлені в заголовку стовпця, а образи - у заголовку рядка.

Наведений приклад описує зміна станів системи з детермінованою дією, що описана *однозначним* перетворювачем. Однозначність перетворення означає, що система не може перейти у два або більше стани при заданому вихідному. Таким чином, детермінована динамічна система поводиться так само, як замкнуте однозначне перетворення.

Якщо в систему (або її зовнішнє середовище) входять стохастичні елементи, то переходи зі стану в стани не будуть строго детермінованими. У цьому випадку перетворення повинне відбивати не тільки можливі нові стани системи, але й імовірність, з якої ці стани здійсняться. Наприклад, дане перетворення $P:\downarrow\begin{pmatrix} \dfrac{a}{c+d} & \dfrac{b}{e+k+m} & \dfrac{c}{v}\end{pmatrix}$ при ймовірності $\left(\dfrac{3}{4};\dfrac{1}{4}\right)\left(\dfrac{1}{2};\dfrac{1}{4};\dfrac{1}{4}\right)$. У матричній формі це перетворення буде виглядати в такий спосіб:

P	a	b	c
c	¾	0	0
d	¼	0	0
e	0	½	0
k	0	¼	0
m	0	¼	0
v	0	0	1

Система подій може бути описана за допомогою апарата символічної логіки. Логічні функції заперечення, кон‘юнкції, диз'юнкції, імплікації, еквіваленції широко застосовуються при моделюванні автоматичних систем.

Розрізняють три типи, або режими поведінки системи: рівноважний, перехідний і періодичний.

Стан рівноваги системи може розглядатися як деяка тотожність перетворень, що відбуваються в ній, що визначають однаковий стан системи в будь-який момент часу. У рівноважній системі кожна частина перебуває в стані рівноваги в умовах, обумовлені іншими її частинами.

При вивченні поведінки динамічних систем важливим є дослідження характеру перехідних процесів. *Перехідний процес* - це процес зміни в часі координат динамічної системи при її переході з одного сталого стану в інше під дією прикладеного збурювання, що змінює стан, структуру або параметри системи, або внаслідок ненульових початкових умов.

У безперервних системах, як правило, що встановився режим (тобто режим стійкого функціонування), досягається за нескінченно великий час.

До понять рівноваги й стійкості примикає поняття циклу в перетворенні системи.

Циклом називається така послідовність станів системи, при якій повторна зміна перетворень змушує систему проходити повторно цю послідовність. Це можна проілюструвати перетворенням виду (рис. 1.2):

$$\text{P}\left\{\frac{abcdefgh}{chbhaceg}\right\} \tag{1.8}$$

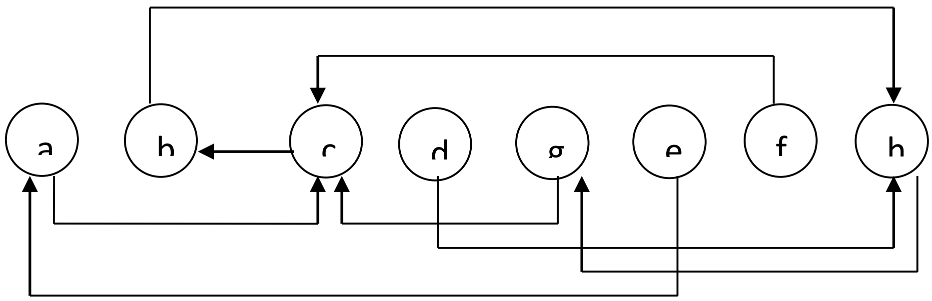

Рис. 1.2. Граф циклічного перетворення

Якщо в початковим момент часу система перебуває в стані *п*, то одержуємо послідовність станів:

$$a\ \underbrace{cbhg}\ \underbrace{cbhg}\ \underbrace{cbhg}\dots \tag{1.9}$$

Очевидно, виділяється цикл довжиною 4. Перехід $a\rightarrow c$ можна розглядати як перехідний процес до сталої циклічної поведінки.

Більш загальним є опис системи з допомогу набору функцій: перехідної, передатної й імпульсної. Цей спосіб придатний для опису безперервних систем, що складаються з множини елементів.

Перехідна функція - функція, що відбиває реакцію динамічної системи на вхідний сигнал при нульових початкових умовах. Перехідна функція є важливою характеристикою системи, що повністю визначає її динамічні властивості. Знаючи перехідну функцію $h(t)$, можна визначити сигнал $y(t)$ на виході системи при подачі в момент часу t_0 - Про на її вхід сигнал $x(t)$:

$$y(t)=x(0)*h(t)+\int_0^t \frac{dx(\tau)}{d\tau}h(t-\tau)d\tau \tag{1.10}$$

Передатна функція - це функція, що представляє собою відношення перетворювача Лагранжа $Y(p)$ вихідної координати $y(t)$ лінійної динамічної системи (або окремої ланки) до перетворення Лапласа *X(p)* її вхідної координати *x(t)* при нульових початкових умовах: *W(p)=Y(p)/X(p).* Передатна функція лінійних фізично реалізованих динамічних систем з постійними параметрами є дрібно-раціональними функціями параметра перетворювача Лапласа *p.*

Імпульсна функція задає вхідний сигнал, що надійшов у систему. Вона може мати, наприклад, східчастий вид, одиничний вплив і т.п.

Для лінійних динамічних систем імпульсна функція *g(t)* і передатна функція *w(p)* пов'язані з перехідною функцією *h(t)* співвідношеннями:

$$g(t\ ) = \frac{dh(t)}{dt}, \quad h(t) = \frac{1}{2p}\int_{c-iw}^{c+iw} \frac{w(p)}{p} e^{pt} dp;$$

$$w(p)= \int_{0}^{\infty} \frac{dh}{dt} e^{-pt} dt\,.$$

де c - компонента абсолютної збіжності.

Перехідні й передатні функції широко використаються в пакетах програм імітаційного моделювання й прогнозування на основі нейронних мереж.