Лінійні динамічні моделі. Динамічна модель В. Леонтьєва. Динаміка замкнутої виробничої системи.

Динамічна модель Леонтьєва є деталізованою моделлю росту валового суспільного продукту й національного доходу. Базою для динамічної моделі Леонтьєва служить статична модель міжгалузевого балансу в грошовому вираженні, що відбиває виробництво й розподіл валового суспільного продукту в галузевому розрізі, міжгалузеві виробничі зв'язки, використання матеріальних і трудових ресурсів, створення й розподіл національного доходу(НД). Кожна галузь у балансу розглядається двічі - як споживач і як виробник. Це й визначає матричну структуру балансу. У балансі розглядаються як галузі, так і підгалузі. В окремих випадках баланс може включати до декількох сотень позицій.

В основі статичної моделі лежить припущення про взаємозв'язок між нагромадженням і приростом валового продукту.

При побудові динамічної моделі В.Леонтьєва, як і для моделі міжгалузевого балансу, робляться наступні припущення:

1) у кожній галузі (або підгалузі) є єдина технологія виробництва;

2) норми виробничих витрат не залежать від обсягу випускної продукції;

3) не допускається заміщення у виробництві одних видів продукції іншими.

При цих припущеннях величина міжгалузевого потоку x_{ij} виявляється пов'язаної з валовою продукцією галузі в такий спосіб

$$x_{ij} = a_{ij}X_j$$

$$a_{ij} = \frac{x_{ij}}{X_j}, \qquad (3.1)$$

де a_{ij} – коефіцієнт прямих матеріальних витрат**,** за допомогою якого виміряються технологічні зв'язки між галузями.

Коефіцієнт a_{ij} показує скільки одиниць продукції *i-ої* галузі безпосередньо затрачається на випуск одиниці валової продукції *j-ої* галузі. Так, при *i=j* маємо коефіцієнт витрат власної продукції галузі на одиницю її валового випуску.

Всі коефіцієнти прямих матеріальних витрат утворять квадратну матрицю A_{nxn}

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots. & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots. & a_{2n} \\ \ldots. & \ldots. & \ldots. & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots. & a_{nn} \end{bmatrix} = \left[a_{ij}\right] . \qquad (3.2)$$

Статична модель міжгалузевого балансу в матричній формі має вигляд:

$$X=AX+Y, \qquad (3.3)$$

де A - матриця коефіцієнтів прямих матеріальних витрат;

X - вектор-стовпець валових обсягів випуску (ВОВ);

Y - вектор-стовпець кінцевого продукту (НД).

В основі динамічної моделі лежить припущення про взаємозв'язок між нагромадженням і приростом валової продукції. Цей взаємозв'язок реалізується за допомогою матриці капіталомісткості приростів виробництва. Крім того, передбачається миттєвість перетворень у приріст основних фондів і миттєвість віддачі цих фондів в обсяги виробництва (що, загалом кажучи, невірно). Час передбачається безперервним, що й визначає застосування диференціальних рівнянь.

Основне співвідношення моделі має вигляд:

$$X(t) = AX(t) + B\frac{dX}{dt} + C(t) \qquad (3.4)$$

де X(t) - вектор обсягів валового випуску продукції по галузях у момент часу t;

$\frac{dX}{dt}$ - вектор абсолютних приростів за малу одиницю часу;

A - матриця коефіцієнтів прямих витрат, включаючи витрати на відшкодування вибуття основних фондів;

AX(t) - виробниче споживання, що забезпечує просте відтворення;

B – матриця коефіцієнтів капіталомісткості приростів виробництва(b_{ij} – витрати виробничого нагромадження i-го виду продукції на одиницю приросту j-го виду продукції);

C(t) - вектор-стовпець, що характеризує споживання по галузях.

Рівняння моделі (3.4) записано у векторно-матричній формі відносно ВОВ.

Щодо величин, які приймають участь у рівнянні (3.4) передбачається виконання наступних умов.

1. *Матриця А продуктивна й нерозкладна.*

Визначення. Нехай $N=\{1,\ldots n\}$ - множина всіх галузей. Підмножина галузей $S\in N$ *ізольовано*, якщо $a_{ij}=0$, при всіх $i\notin S$ і $j\in S$. Це означає, що галузі з множини S не має потреби в продукції, виробленої іншими галузями, навіть побічно.

Якщо в множині галузей існує ізольована підмножина, то за допомогою перестановок рядків і стовпців матрицю А можна привести до виду

$$A=\begin{bmatrix} A_1 & A_2 \\ 0 & A_3 \end{bmatrix}. \tag{3.5}$$

Визначення. Матриця А називається *нерозкладної,* якщо її не можна привести до виду (3.5) тільки перестановкою рядків і стовпців.

Одне з основних властивостей нерозкладних матриць описується *теоремою Фробеніуса – Перона:*

1) Нерозкладна матриця А має позитивне власне число $\lambda_A > 0$, що перевершує по модулю всі інші її власні числа.

2) Власному числу λ_A відповідає єдиний (з точністю до ненульового множника) цілком позитивний вектор $\mathbf{X_A}$.

Отже, матриця коефіцієнтів повних витрат строго позитивна:

$(E-A)^{-1}>0$, $\det(B) \neq 0$.

2. Матриці А и В постійні в часі.

3. Капіталовкладення (інвестиції) виступають єдиним джерелом зростання виробництва. Тобто, у жодній галузі немає резервних виробничих потужностей.

При таких припущеннях змістовно інтерпретованими в рамках даної моделі можуть бути тільки стани, для яких $\frac{dX}{dt} \geq 0$. Якщо виконується ця умова, то системи будемо називати припустимими. Траєкторії, що не виводять систему з області припустимих станів, будемо також називати припустимими.

Використовуючи взаємозв'язок між ВОВ і НД у статичній моделі

$$X(t)=(E-A)^{-1}Y(t), \tag{3.6}$$

де вектор Y(t) характеризує галузеву структуру НД, одержимо рівняння моделі Леонтьева відносно НД:

$$Y(t) = B(E - A)^{-1}\frac{dY}{dt} + C(t). \tag{3.7}$$

Позначимо $B(E - A)^{-1} = B$. Коефіцієнт цієї матриці $\tilde{b}_{ij}$ характеризує величину виробничого нагромадження продукції i-го виду на одиницю приросту j-го елемента НД, а сама вона називається матрицею коефіцієнтів *повної приростної капіталомісткістю*.

Для обчислення можливостей системи досліджуємо модель (3.7) при різних траєкторіях споживання.

Визначимо технологічні можливості системи, які визначаються параметрами А и В. Для цього покладемо C(t) = 0. У цьому випадку (3.7) прийме вид:

$$Y(t) = B(E - A)^{-1}\frac{dY}{dt} . \tag{3.8}$$

Вираження (3.8) є система однорідних лінійних диференціальних рівнянь із постійними коефіцієнтами першого порядку. Загальне рішення цієї системи відповідно до теорії диференціальних рівнянь має вигляд

$$Y(t) = \sum_l d_l K_l e^{\frac{1}{s_l}t} \qquad (3.9)$$

де s_l – власні числа матриці повної *приростної капіталомісткістю*;

K_l – відповідні їм власні вектори;

d_l - коефіцієнти, які визначаються з початкової умови

$Y(0) = \sum_l d_l K_l$

Траєкторія, що виходить із Y(0), являє собою комбінацію експонент із різними темпами приросту ($1/s_l$). Отже, у загальному випадку розвиток по траєкторії $Y(t) = Y_0 e^{kt}$, тобто з єдиним для всіх галузей темпом, неможливо, і воно відбувається з постійними структурними змінами.

Внаслідок допущень моделі матриця $\tilde{B}=B(E-A)^{-1}>0$, отже в неї існує корінь Фробеніуса - Перона, s. Величину цього кореня покладено в межах:

$$\min_j \sum_i \tilde{b}_{ij} < s < \max_j \sum_i \tilde{b}_{ij}$$

Величина $\tilde{b}_{ij}=\sum \tilde{b}_{ij}$ (j=1,…n) називається повною *приростною капіталомісткістю* j-ої галузі.

Можливі два випадки поведінки траєкторії (3.8).

У першому випадку в траєкторії (3.8) домінує (переважає) експонента з показником ступеня, що пов'язаний з коренем Фробеніуса-Перрона. У цьому випадку згодом темп приросту кожного елемента НД починає наближатися до темпу, обумовленому даною експонентою, тобто **1/s**. Таким чином, на нескінченному періоді часу кожний з елементів НД починає розвиватися з темпом 1/s. Таким чином, *технологічний темп приросту* має вигляд: $\acute{p}=\frac{1}{s}$.Структура НД прагне в тому випадку до власного вектора, що відповідає K_s.

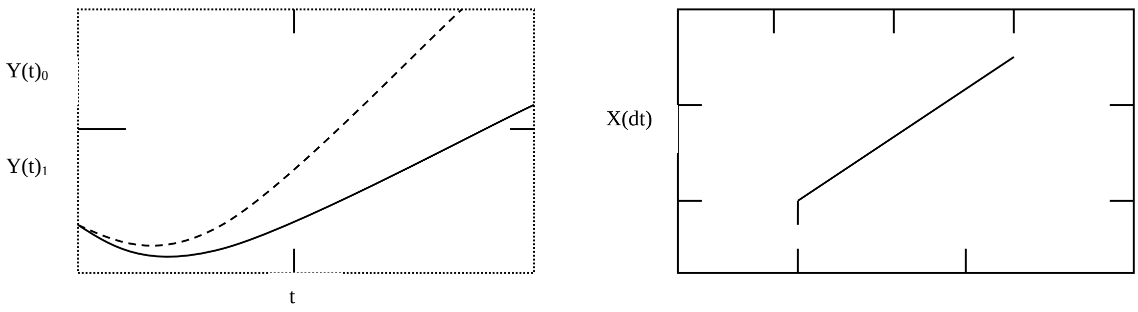

Рис. 3.1. Припустимі траєкторії розвитку

У другому випадку в (3.9) домінує експонента з показником ступеня, відмінним від 1/s. Це відбувається, коли існує позитивне власне число, відмінне від s. Позначимо домінуючий показник $1/s_0$. У цьому випадку власний вектор, що відповідає s_0, обов'язково має негативні компоненти й, тому що $s_0K_{s0} = \tilde{B}K_{s0}=B(E-A)^{-1}K_{s0}$, стовпець $(E - A)^{-1}K_{s0}$ також містить негативні компоненти. З огляду на (3.9), запишемо X(t) у такий спосіб:

$$X(t) = \sum_l d_l (E - A)^{-1} K_l e^{\frac{1}{s_l}t} \tag{3.10}$$

В останній рівності в останній частині присутні негативні компоненти, причому зі збільшенням t вони збільшуються по абсолютній величині. Отже, із часом вони з'являться й у лівій частині рівності. Таким чином, траєкторія виходить у неприпустиму зону.

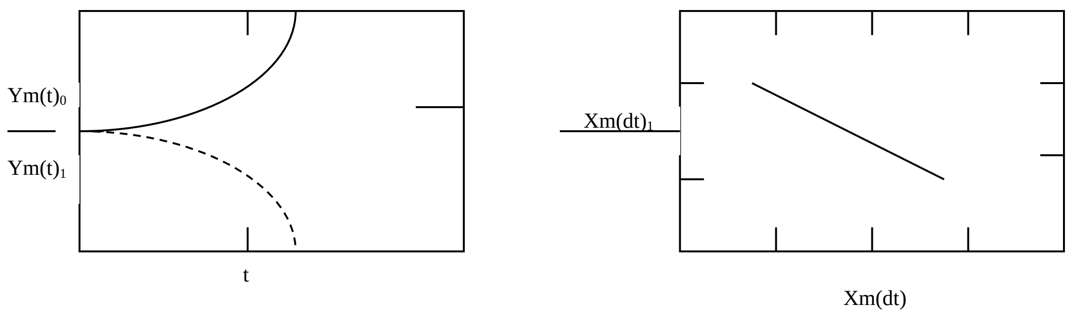

Рис. 3.2. Неприпустимі траєкторії розвитку

Зауваження: Траєкторія системи в першому випадку є припустимої, хоча початковий стан системи може бути й неприпустимим. І, навпаки, у другому випадку, хоча початковий стан системи є припустимим, траєкторія розвитку може виходити за межі припустимої області.