Динаміка корисності благ споживачів. Вплив флуктуацій на динаміку благ споживачів. Моделі економічних циклів Гудвина.

У рамках класичного підходу до моделювання економічних систем розглядаються лінійні системи, у яких малим сигналам на вході відповідає мала реакція на виході. Інтерес постнеокласичної науки, парадигматика якої багато в чому заставляється термодинамікою нерівновагих процесів, зміщається убік нелінійних систем, більше властивій природі.

«Нелінійність» - фундаментальний концептуальний вузол нової парадигми, яку можна назвати також парадигмою нелінійності. Більше того, у науковому середовищі з'явилося вираження «нелінійне мислення».

У математичному змісті нелінійність означає певний вид рівнянь, що містять шукані величини в ступенях більше одиниці або коефіцієнти, що залежать від властивостей середовища. Нелінійні рівняння можуть мати трохи (більше одного) якісно різних рішень.

Звідси виникає фізичний зміст нелінійності: безлічі рішень нелінійного рівняння відповідає безліч шляхів еволюції системи, які описані цими рівняннями (нелінійної системи).

Більше того, вивчаючи різні стадії розвитку процесів у відкритому нелінійному середовищі, можна чекати на якісні зміни картини процесів, у тому числі переструктурування - ускладнення й деградацію - організації середовища. Причому це відбувається не при зміні параметрів середовища, а як результат саморозвитку процесів у ній.

У світоглядному плані нове осмислення нелінійності відбилося в цілому ряді наукових ідей:

- ідеї багатоваріантності, альтернативності шляхів еволюції;
- ідеї вибору з даних альтернатив;
- ідеї темпу еволюції (швидкості розвитку процесів у середовищі);
- ідеї необоротності еволюції.

Феномен нелінійності можна охарактеризувати наступними особливостями.

1. Завдяки нелінійності має силу найважливіший принцип «розростання малого», або «посилення збурювань». За певних умов нелінійність може підсилювати збурювання, тобто робити малу відмінність більшим, макроскопічним по наслідках.

2. Певні класи нелінійних систем демонструють іншої важлива властивість - граничну чутливість. Нижче порога все зменшується, забувається, не залишає ніяких слідів у природі, науці, культурі, а вище порога, навпроти, багаторазово підсилюється.

3. Нелінійність породжує якась подоба квантового ефекту - дискретність шляхів еволюції нелінійних систем (середовищ). Тобто, на даному нелінійному середовищі можливий аж ніяк не будь-який шлях еволюції, а лише певний спектр цих шляхів.

4. Нелінійність означає можливість несподіваних, так званих емерджентних змін напрямку плину процесів. Нелінійність процесів робить принципово ненадійними й недостатніми прогнози.

З нелінійністю, крім того, зв'язані уявлення про можливості на певних стадіях сверхшвидкого розвитку процесів. В основі механізму такого розвитку лежить нелінійний позитивний зворотний зв'язок. Негативний зворотний зв'язок дає стабілізуючий афект, змушуючи систему повернутися до стану рівноваги. Позитивний зворотний зв'язок, підсилюючи відхід системи від рівноваги, повинна приводити лише до нестійкості й, здавалося б, до руйнування системи.

Як видно з попереднього викладу, використання нелінійних моделей динаміки складних систем починалося в природничих науках (фізику, хімії, біології), але потім захопило й науки, що вивчають життєдіяльність людського суспільства. У цей час спостерігається ріст інтересу економістів до нелінійних моделей, зокрема, адаптації фізичних (досить добре вивчених) моделей до економічних процесів. Свідченням цьому є виникнення такого напрямку, як еконофизика (econophysics), застосування теорії еволюції біологічних організмів до моделювання розвитку макро- і мікроекономічних об'єктів, використання теорії хаосу для керування й стабілізації економічної політики й ін. Далі розглянемо методи математичного моделювання, що реалізують принципи синергетики й нелінійності. Одним з основних результатів нелінійного підходу є визнання можливості різноманітного розвитку систем, наявності біфуркації.

Моделі економічних циклів Гудвина

Моделі Гудвина описують виникнення циклічних коливань в економічному розвитку.

Будемо вважати, що в будь-який момент часу t економіка має у своєму розпорядженні основний капітал К, що включає заводи, устаткування й т.д. Його обсяг змінюється зі швидкістю, рівної відношенню чистих капіталовкладень до загального зношування за даний період часу. Джерелом економічного доходу є обсяг виробництва Y і споживання С. Ці величини зв'язані між собою відносинами

$$C = \alpha Y + \beta$$
$$Y = C + \frac{dK}{dt} \qquad (5.1, 5.2)$$

де α і β - постійні параметри, такі, що α<0 и β < С.

β - частка постійного споживання, кіт не залежить від обсягу виробництва.

З рівняння (5.1) видно, що між обсягом виробництва й споживанням існує лінійна залежність. Рівняння (5.2) означає, що вся випущена продукція, яка або споживається, або йде на розширення виробництва. Припустимо далі, що основним капіталом К управляють так, щоб підтримувати на рівні, пропорційному обсягу виробництва. Якщо R - бажаний рівень основного капіталу в момент часу t, то

$$R = \gamma Y, \qquad (5.3)$$

де γ - деякий параметр.

Представимо перший варіант моделі. З рівнянь (1) і (2) треба, що

$$Y - \alpha Y = \beta + \frac{dK}{dt} \qquad (5.4)$$

звідки

$$Y = \frac{\beta + K}{1 - \alpha} \qquad (5.5)$$

Зі співвідношень видно, що періодична поведінка величини Y може виникнути як наслідок коливань у капіталовкладенні К. У свою чергу, ці коливання виникають із прагнення зрівняти величини К и R (бажаний рівень основного капіталу). Нехай проводиться екстремальна політика капіталовкладень:

$$\frac{dK}{dt} = \begin{cases} K_1 > 0, если K < R \\ 0, если K = R \\ -K_2 < 0, если K > R \end{cases} \qquad (5.6)$$

де K_1 і K_2 не залежать від часу t.

Розглянемо сутність формули (5.6). Якщо основний капітал менше бажаного рівня, то умова (5.6) відповідає максимальному рівню капіталовкладень (перша умова в (5.6)). Якщо ж бажаний рівень перевищений, то капіталовкладення нульові, а основний капітал амортизується зі швидкістю K_2 (третя умова (5.6)). $K_1>K_2$ означає, що при максимальному рівні капіталовкладень швидкість, з якої можуть будуватися нові підприємства більше швидкості амортизації й старіння.

З рівнянь (5.3) - (5.6) треба, що

$$R = \begin{cases} R_1 = \gamma \dfrac{\beta + k_1}{1 - \alpha}, если K < R \\ R_0 = \gamma \dfrac{\beta}{1 - \alpha}, если K = R \\ R_2 = \gamma \dfrac{\beta - k_2}{1 - \alpha}, если K > R \end{cases} \qquad (5.7)$$

Нехай $R_2<K<R_1$, так що при t=0 виконується $R=R_1$. Тоді рівень капіталовкладень дорівнює $k_1 >0$, величина k росте, а Y залишається постійної (рис. 5.1) доти, поки не досягається рівність $K=R_1$. Тоді R приймає значення R_0, тому що K=R. Тепер $K=R_1>R=R_0$, і величина R миттєво стає рівної R_2. Таким чином, до миттєво міняється від величини K_1 до K_2, а R — від R_1 до R_2. У той же самий момент, відповідно до формули (5.5), різко падає обсяг виробництва. Тепер До убуває до величини R_2. Аналогічне міркування показує, що R при цьому стає рівної R_1, так що $K=R_2<R=R_1$, і величина K знову стає рівної K_1. Основний капітал До знову зростає до R_1, і цикл замикається. Таким чином, обидві величини - K и Y - випробовують коливання. як показано на рисунку 5.1.

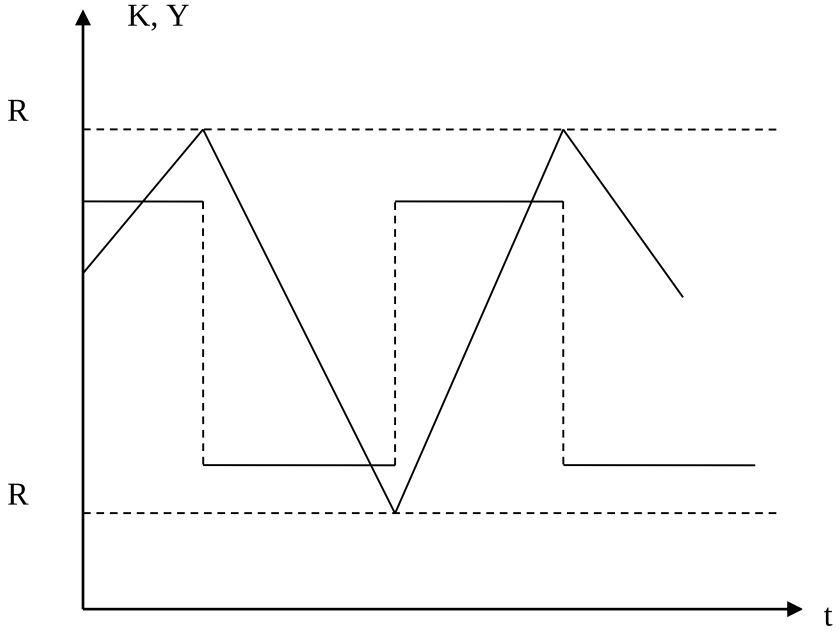

Рис. 5.1. Коливання величин K, Y у часі для політики капіталовкладень

Узагальнений варіант моделі добре відбиває економічний цикл. Під час періодів капіталовкладення обсяг виробництва високий, і економіка перебуває в періоді підйому. Коли ж капіталовкладення відсутні, обсяг виробництва падає, і економіка перебуває в стані депресії. Однак у розглянутої моделі є багато недоліків. Так, перегони в капіталовкладенні й миттєвій реакції на них з боку обсягу виробництва Y не відповідають дійсності. Крім того, з умови до $K_1=K_2$ треба, що періоди спаду значно перевищують періоди підйому, чого в реальності не спостерігається. Більше того, у моделі відсутній загальний ріст економіки, тому що обсяг виробництва, основний капітал та інші показники періодично приймають колишні значення.

Модифікована модель економічних циклів Гудвина

Приведемо другий варіант моделі. Модифікуємо модель, з огляду на такі фактори:

1) вплив капіталовкладень на ріст обсягу виробництва;

2) відсутність стрибкоподібних змін у капіталовкладенні.

Для обліку першого фактора змінимо рівняння (5.5) так, щоб у функції Y не було стрибків навіть у тому випадку, коли величина K їх має. Це можна зробити, замінивши рівняння (5.5) на

$$Y = \frac{1}{1-\alpha}(\beta + \frac{dK}{dt} - \varepsilon\frac{dY}{dt}) \tag{5.9}$$

де ε— деяка позитивна константа.

Зрозуміло, що новий доданок в (5.9) породжує затримку в реакції функції Y на зміну K. З рівняння (5.9) знаходимо:

$$\begin{aligned} &\varepsilon\frac{dY}{dt} + (1-\alpha)Y = \beta + k_1, еслиK > R \\ &\varepsilon\frac{dY}{dt} + (1-\alpha)Y = \beta - k_{21}, еслиK < R \end{aligned} \tag{5.10, 5.11}$$

Припустимо, що в момент часу $t=t_1$ депресія закінчується й відбувається миттєвий перехід від (5.11) до рівняння (5.10), тоді залежність величини Y від часу t для фази підйому буде мати вигляд

$$Y(t) = \frac{\beta + k_1}{1-\alpha}(1 - e^{\frac{\alpha-1}{\varepsilon}(t-t_1)}) + Y(t_1)e^{\frac{\alpha-1}{\varepsilon}(t-t_1)} \tag{5.12}$$

З рішення (5.12) видно, що величина Y не зростає миттєво до значення $\frac{\beta + k_1}{1-\alpha}$, а прагне до нього при t→∞. Помітимо, що час, що потрібно для того, щоб функція Y(t) із заданою точністю став рівній цій величині, цілком залежить від параметра ε. Аналогічним образом, рівняння (5.11) згладжує стрибкоподібне падіння Y(t) (рис. 5.1) наприкінці періоду підйому.

Ліквідуємо тепер розриви в капіталовкладенні, тобто «зм'якшимо» раптовий перехід від K=κ_1 до K= -κ_2 (і навпаки), що виникає, коли K стає рівним R.

Розглянемо ту частину капіталовкладень, що виникає зі зміною обсягу виробництва. Зміни в капіталовкладенні відбувається тому, що ми хочемо підтримувати основний капітал на рівні бажаного капіталу. Зміна величини Y викликає зміна R, що, у свою чергу, тягне зміну K. Ясно, що якби нам удалося підтримувати $K=\gamma Y$, те виконувалося б і співвідношення K=R. Але такого бути не може, оскільки рівність не може виконуватися при всіх значеннях t, тому що величина K має верхню границю k_1 і нижню границю ($-\kappa_2$). Тому припустимо, що $K = \psi(Y)$. Вид функції $\psi(Y)$ зображений на рисунку 5.2.

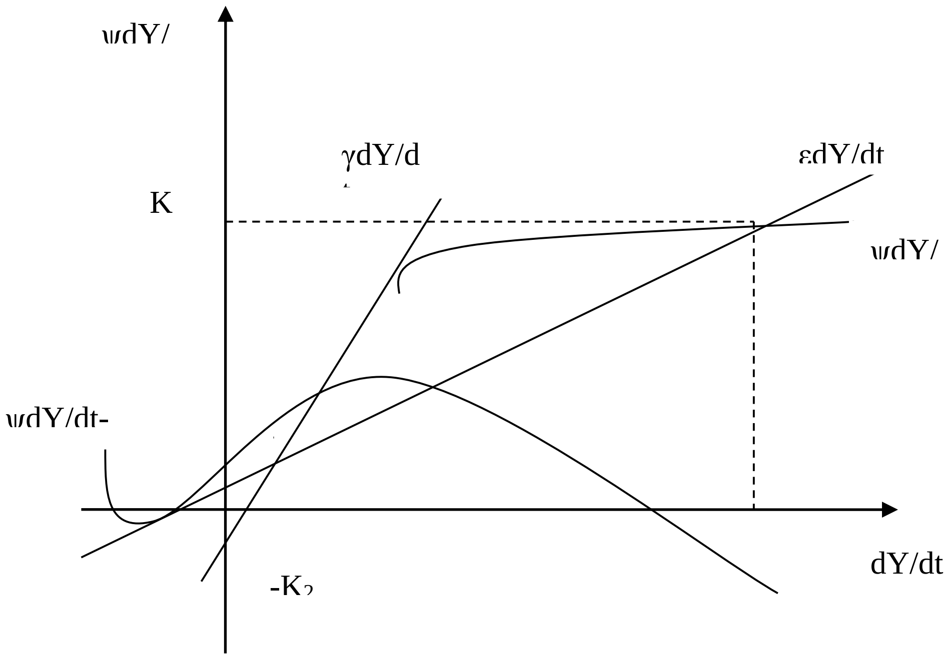

Рис. 5.2. Змушені капіталовкладення $\psi(Y)$

Як видно з рисунка, змушені капіталовкладення $\psi(Y)$ близькі до ідеального рівня γY для малих величин Y, а при більших |Y| вони обмежені величинами κ_1 до ($-\kappa_2$). Помітимо, що функція $\psi(Y)$—εY немонотонна (тобто має «горби») і схожа на кубічну параболу. Коли капіталовкладення досягають свого максимального значення, основний капітал перестає задовольняти вимозі $K=\gamma Y$.

Це означає, що K треба вибрати у вигляді

$$\frac{dK}{dt} = L + \psi\left(\frac{dY}{dt}\right) \tag{5.13}$$

де ψ(Y) - індуковані капіталовкладення, викликані зміною обсягу виробництва, L — вплив інших капіталовкладень.

Тоді рівняння (5.9) треба замінити на

$$Y = \frac{1}{1-\alpha}\left[\beta + L + \psi(\frac{dY}{dt}) - \varepsilon\frac{dY}{dt}\right] \tag{5.14}$$

Щоб одержати графік функції Y залежно від Y, потрібно зрушити функцію ψ(Y)—εY, зображену на рис. 5.2, на величину β+L і розділити на (1-а). Якщо величина β+L досить велика, то вийде графік, подібний наведеному на рис. 5.3

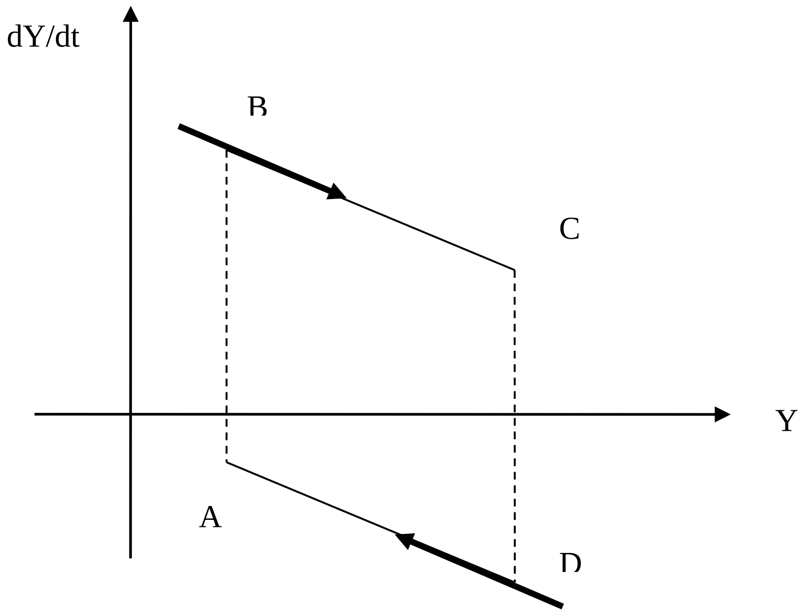

Рис. 5.3. Поведінка другої моделі на фазовій площині, рух відбувається тільки по немонотонній характеристиці

Ця крива, разом з допущенням про стрибки, повністю описує поведінки другої моделі. Крапки, що відповідають всім можливим станам моделі, лежать на цій кривій, і знак показує, зростає або убуває величина Y. Таким чином, рух крапки, що визначає стан системи, повинне відбуватися в напрямках, зазначених стрілками. Крапка (β+ L; 0) є нестійкою нерухомою крапкою системи. Із крапок C и A повинні відбуватися перегони. Припустивши, що перегони походять з A в B й з C у D, одержимо релаксаційні коливання для Y.

Тепер розглянемо третій варіант моделі. Враховуючи тепер запізнювання реальних капіталовкладень щодо ухвалення рішення про їхню необхідність. Це означає, що індуковані вкладення в момент часу *t* насправді залежать не від Y(t), а від *Y(t —υ)*, де *υ* — запізнювання.

Тоді замість рівняння (5.14) треба писати:

$$\varepsilon \frac{dY}{dt} + (1-\alpha)Y(t) - \psi\left(\frac{dY(1-\vartheta)}{dt}\right) = \beta + L \tag{5.15}$$

Якщо ввести *τ*=*t* - *υ*, з (5.15) одержимо

$$\varepsilon \frac{dY(\tau+\vartheta)}{d\tau} + (1-\alpha)Y(\tau+\vartheta) - \psi\left(\frac{dY(\tau)}{d\tau}\right) = \beta + L \tag{5.16}$$

Розкладемо ліву частину рівняння (5.16) по ступенях u і збережемо лише члени першого порядку по υ. Тоді знаходимо:

$$\varepsilon \frac{dY(\tau)}{d\tau} + \varepsilon\vartheta \frac{d^2Y(\tau)}{d\tau^2} + (1-\alpha)\left[Y(\tau) + \vartheta \frac{dY(\tau)}{d\tau}\right] - \psi\left(\frac{dY(\tau)}{d\tau}\right) = \beta + L \tag{5.17}$$

Або

$$\varepsilon\vartheta \frac{d^2Y(\tau)}{d\tau^2} + \left[\varepsilon + (1-\alpha)\vartheta\right]\frac{dY(\tau)}{d\tau} + (1-\alpha)Y(\tau) - \psi\left(\frac{dY(\tau)}{d\tau}\right) = \beta + L \tag{5.18}$$

Якщо вважати, що $\beta + L = const$ й ввести

$$y = \frac{Y - (\beta + L)}{1 - L}, \tag{5.19}$$

то (5.18) можна представити у вигляді:

$$\varepsilon\vartheta \frac{d^2Y(\tau)}{d\tau^2} + \left[\varepsilon + (1-\alpha)\vartheta\right]\frac{dY(\tau)}{d\tau} - \psi\left(\frac{dY(\tau)}{d\tau}\right) + (1-\alpha)y(\tau) = 0\,. \tag{5.20}$$

Введемо нові залежні й незалежні змінні співвідношеннями:

$$x = y\sqrt{\frac{1-\alpha}{\varepsilon\vartheta}}\,, \tag{5.21}$$

$$t = \tau \sqrt{\frac{1-\alpha}{\varepsilon \vartheta}} \,. \tag{5.22}$$

Тоді замість (5.20) маємо:

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + X\left(\frac{dx}{dt}\right) + x = 0 \,, \tag{5.23}$$

де

$$X\left(\frac{dx}{dt}\right) = \frac{1}{\sqrt{(1-\alpha)\varepsilon\vartheta}} \left\{ [\varepsilon + (1-\alpha)\vartheta] \frac{dx}{dt} - \psi\left(\frac{dy(\tau)}{dt}\right) \right\}. \tag{5.24}$$

Якщо $[\varepsilon + (1-\alpha)\vartheta] < \gamma$, то функція X(x) схожа на кубічну параболу,

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + \varepsilon \left[1 - \left(\frac{dx}{dt}\right)^2 \right] \left(\frac{dx}{dt}\right) + x = 0 \tag{5.25}$$

і в неї є стійкі граничні цикли, тобто мають місце автоколивання.