Динамічна модель Леонтьєва

Розглянемо умовний приклад для динамічної моделі Леонтьева. Нехай економіка агрегована до двох галузей, відомі матриці прямих матеріальних витрат, пріростної капіталоємності і початковий стан системи:

$$A = \begin{pmatrix} 0,1 & 0,2 \\ 0,2 & 0,3 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 0,8 & 0,9 \\ 0,5 & 0,4 \end{pmatrix}$$

$$X(0) = \begin{pmatrix} 50 \\ 50 \end{pmatrix}, \qquad Y(0) = \begin{pmatrix} 25 \\ 15 \end{pmatrix}$$

Визначимо траєкторію розвитку системи. Для цього обчислимо матрицю повної пріростної капіталоємності:

$$(E - A) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1-0,1 & 0-0,2 \\ 0-0,2 & 1-0,3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,9 & -0,8 \\ -0,8 & 0,7 \end{pmatrix};$$

$$(E - A)^{-1} = \begin{pmatrix} 1,19 & 0,34 \\ 0,34 & 1,53 \end{pmatrix},$$

$$\tilde{B} = B(E - A)^{-1} = \begin{pmatrix} 1,25 & 1,64 \\ 0,73 & 0,78 \end{pmatrix}.$$

Знаходимо власні числа цієї матриці, вирішуючи характеристичне рівняння:

$$\left|\tilde{B} - \lambda E\right| = 0$$

$$\begin{pmatrix} 1,25 & 1,64 \\ 0,73 & 0,78 \end{pmatrix} - \lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1,25-\lambda & 1,64 \\ 0,73 & 0,78-\lambda \end{pmatrix} = \left(1,25-\lambda\right)\left(0,78-\lambda\right) - 0,73 \cdot 1,64 = \lambda^2 - 2,03\lambda - 0,22 = 0;$$

$$\lambda_1 = 2,14; \qquad \lambda_2 = -0,10.$$

Отже, показники міри експонент в загальному рішенні дорівнюють:

$$Y(t) = \sum_l d_l K_l e^{\frac{1}{\lambda_l} t}$$

$$\rho_1 = \frac{1}{\lambda_1} = 0,47, \quad \rho_2 = \frac{1}{\lambda_2} = -9,69$$

Визначаємо відповідні власні вектори K_1 і K_2 з точністю до множника.

Для $\lambda_1 = 2,14$ характеристичне рівняння матриці $\tilde{B}$ прийме вигляд:

$$\tilde{B}=\begin{pmatrix}1,25-\lambda_1 & 1,64\\ 0,73 & 0,78-\lambda_1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1,25-2,14 & 1,64\\ 0,73 & 0,78-2,14\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-0,89 & 1,64\\ 0,73 & -1,36\end{pmatrix}.$$

$$\begin{pmatrix}-0,89 & 1,64\\ 0,73 & -1,36\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\end{pmatrix}=0,$$

$$\begin{cases}-0,89x_1+1,64x_2=0\\ 0,73x_1-1,36x_2=0\end{cases}\quad\begin{cases}x_1=1\\ x_2=0,54\end{cases}$$

Відповідно для $\lambda_2=-0{,}1$

$$\tilde{B}=\begin{pmatrix}1,25-\lambda_2 & 1,64\\ 0,73 & 0,78-\lambda_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1,35 & 1,64\\ 0,73 & 0,88\end{pmatrix}.$$

$$\begin{pmatrix}1,35 & 1,64\\ 0,73 & 0,88\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\end{pmatrix}=0,$$

$$\begin{cases}1,35x_1+1,64x_2=0\\ 0,73x_1+0,88x_2=0\end{cases}\quad\begin{cases}x_1=1\\ x_2=-0,83\end{cases}$$

Зрозуміло, що траєкторія системи є допустимою, оскільки єдиний доданок з позитивним показником ступеня складається з позитивних компонент.

Визначимо, виходячи з початкових умов, коефіцієнти d_1:

$$d_1K_1+d_2K_2=Y(0)\Leftrightarrow\begin{cases}d_1+d_2=25\\ 0,54d_1-0,83d_2=15\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}d_1=26,09\\ d_2=-1,09\end{cases}.$$

Остаточно траєкторія розвитку має вигляд

$$Y(t)=d_1\cdot K_1\cdot e^{\rho_1 t}+d_2\cdot K_2\cdot e^{\rho_2 t}$$

$$Y(t)=26,09*\begin{pmatrix}1\\ 0,54\end{pmatrix}e^{0,47t}-1,09*\begin{pmatrix}1\\ -0,83\end{pmatrix}e^{-9,69t}.$$

Траєкторія розвитку двохгалузевої економічної системи на період 10 років представлена в таблиці.

t	Y_1	Y_2
0	25	15
1	41,74216	23,41933
2	66,7068	36,8738
3	106,6018	58,37502
4	170,3567	92,73537
5	272,2411	147,6455
6	435,059	235,3954
7	695,2526	375,6254

8	1111,059	599,7222	
9	1775,545	957,8435	
10	2837,436	1530,145	4367,581

Сукупний дохід через 10 років складе: $Y = Y_1 + Y_2 = 2837,436 + 1530,145 = 4367,581$

Графічна зміна валового обсягу випуску (ВОП), тобто траєкторія розвитку представлена на рисунку.

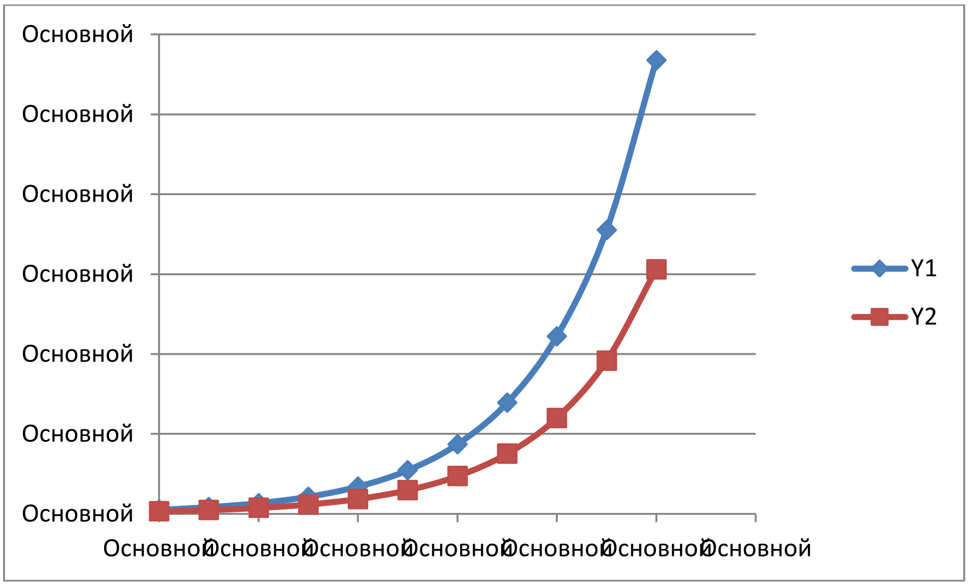

Рисунок. Траєкторія розвитку зміни ВОП

Зауваження. Зміна структурних параметрів може привести до якісно іншому розвитку системи, хоча параметри макромоделі збережуться.

Дослідження моделі Леонтьева дозволяє зробити наступний висновок: на відміну від макроекономічної моделі, яка при нульовому споживанні завжди має допустиму траєкторію, траєкторія структурної моделі навіть при нульовому споживанні може бути недопустимою унаслідок певних структурних параметрів.

Варіанти завдань для самостійного закріплення матеріалу

1. Економічна система характеризується випуском продукції в двох галузях виробництва, нагромадження капіталу пропорційне темпам приросту валового випуску по галузям. Матеріальні витрати галузей описуються коефіцієнтами прямих витрат матриці Леонтьєва.

Коефіцієнти матриці матеріальних витрат (А) та коефіцієнти матриці нагромадження капіталу (В) по галузям становлять:

$$A = \begin{pmatrix} 0,1 & 0,2 \\ 0,2 & 0,3 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 0,8 & 0,9 \\ 0,5 & 0,4 \end{pmatrix}$$

За допомогою динамічної моделі Леонтьєва визначити траєкторію розвитку двохгалузевої економічної системи на період моделювання 10 років при наступних початкових даних: кінцевий продукт (Y) на початок моделювання:

$$Y(0) = \begin{pmatrix} 25 \\ 15 \end{pmatrix}$$

2. Економічна система характеризується випуском продукції в двох галузях виробництва, нагромадження капіталу пропорційне темпам приросту валового випуску по галузям. Матеріальні витрати галузей описуються коефіцієнтами прямих витрат матриці Леонтьєва.

Коефіцієнти матриці матеріальних витрат (A) та коефіцієнти матриці нагромадження капіталу (B) по галузям становлять:

$$A = \begin{pmatrix} 0,4 & 0,2 \\ 0,6 & 0,3 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 0,1 & 0,8 \\ 0,5 & 0,4 \end{pmatrix}$$

За допомогою динамічної моделі Леонтьєва визначити траєкторію розвитку двохгалузевої економічної системи та період моделювання, за яким обсяги кінцевого продукту (Y) в галузі 2 зростуть втричі, якщо на початок моделювання Y(0)=(10; 50)