Аналіз моделі В. Леонтьєва

Розглянемо умовний приклад для динамічної моделі Леонтьева. Нехай економіка агрегована до двох галузей, відомі матриці прямих матеріальних витрат, пріростної капіталоємності і початковий стан системи:

$$A = \begin{pmatrix} 0,1 & 0,2 \\ 0,2 & 0,3 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 0,8 & 0,9 \\ 0,5 & 0,4 \end{pmatrix}$$

$$X(0) = \begin{pmatrix} 50 \\ 50 \end{pmatrix}, \qquad Y(0) = \begin{pmatrix} 25 \\ 15 \end{pmatrix}$$

Визначимо траєкторію розвитку системи. Для цього обчислимо матрицю повної пріростної капіталоємності:

$$(E-A) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1-0,1 & 0-0,2 \\ 0-0,2 & 1-0,3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,9 & -0,8 \\ -0,8 & 0,7 \end{pmatrix};$$

$$(E-A)^{-1} = \begin{pmatrix} 1,19 & 0,34 \\ 0,34 & 1,53 \end{pmatrix},$$

$$\tilde{B} = B(E-A)^{-1} = \begin{pmatrix} 1,25 & 1,64 \\ 0,73 & 0,78 \end{pmatrix}.$$

Знаходимо власні числа цієї матриці, вирішуючи характеристичне рівняння:

$$\left|\tilde{B} - \lambda E\right| = 0$$

$$\begin{pmatrix} 1,25 & 1,64 \\ 0,73 & 0,78 \end{pmatrix} - \lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1,25-\lambda & 1,64 \\ 0,73 & 0,78-\lambda \end{pmatrix} = (1,25-\lambda)(0,78-\lambda) - 0,73\cdot 1,64 = \lambda^2 - 2,03\lambda - 0,22 = 0;$$

$$\lambda_1 = 2,14; \qquad \lambda_2 = -0,10.$$

Отже, показники міри експонент в загальному рішенні дорівнюють:

$$Y(t) = \sum_l d_l K_l e^{\frac{1}{\lambda_l} t}$$

$$\rho_1 = \frac{1}{\lambda_1} = 0,47, \quad \rho_2 = \frac{1}{\lambda_2} = -9,69$$

Визначаємо відповідні власні вектори K_1 і K_2 з точністю до множника.

Для $\lambda_1 = 2{,}14$ характеристичне рівняння матриці $\tilde{B}$ прийме вигляд:

$$\tilde{B} = \begin{pmatrix} 1,25-\lambda_1 & 1,64 \\ 0,73 & 0,78-\lambda_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1,25-2,14 & 1,64 \\ 0,73 & 0,78-2,14 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0,89 & 1,64 \\ 0,73 & -1,36 \end{pmatrix}.$$

$$\begin{pmatrix} -0,89 & 1,64 \\ 0,73 & -1,36 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = 0,$$

$$\begin{cases} -0,89x_1 + 1,64x_2 = 0 \\ 0,73x_1 - 1,36x_2 = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 = 0,54 \end{cases}$$

Відповідно для $\lambda_2 = -0{,}1$

$$\tilde{B} = \begin{pmatrix} 1,25-\lambda_2 & 1,64 \\ 0,73 & 0,78-\lambda_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1,35 & 1,64 \\ 0,73 & 0,88 \end{pmatrix}.$$

$$\begin{pmatrix} 1,35 & 1,64 \\ 0,73 & 0,88 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = 0,$$

$$\begin{cases} 1,35x_1 + 1,64x_2 = 0 \\ 0,73x_1 + 0,88x_2 = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 = -0,83 \end{cases}$$

Зрозуміло, що траєкторія системи є допустимою, оскільки єдиний доданок з позитивним показником ступеня складається з позитивних компонент.

Визначимо, виходячи з початкових умов, коефіцієнти d_1:

$$d_1K_1 + d_2K_2 = Y(0) \Leftrightarrow \begin{cases} d_1 + d_2 = 25 \\ 0,54d_1 - 0,83d_2 = 15 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} d_1 = 26,09 \\ d_2 = -1,09 \end{cases}.$$

Остаточно траєкторія розвитку має вигляд

$$Y(t) = d_1 \cdot K_1 \cdot e^{\rho_1 t} + d_2 \cdot K_2 \cdot e^{\rho_2 t}$$

$$Y(t) = 26,09 * \begin{pmatrix} 1 \\ 0,54 \end{pmatrix} e^{0,47t} - 1,09 * \begin{pmatrix} 1 \\ -0,83 \end{pmatrix} e^{-9,69t}.$$

Траєкторія розвитку двохгалузевої економічної системи на період 10 років представлена в таблиці.

t	Y_1	Y_2	
0	25	15	
1	41,74216	23,41933	
2	66,7068	36,8738	
3	106,6018	58,37502	
4	170,3567	92,73537	
5	272,2411	147,6455	
6	435,059	235,3954	
7	695,2526	375,6254	
8	1111,059	599,7222	
9	1775,545	957,8435	
10	2837,436	1530,145	4367,581

Сукупний дохід через 10 років складе: $Y = Y_1 + Y_2 = 2837,436 + 1530,145 = 4367,581$

Графічна зміна валового обсягу випуску (ВОП), тобто траєкторія розвитку представлена на рисунку.

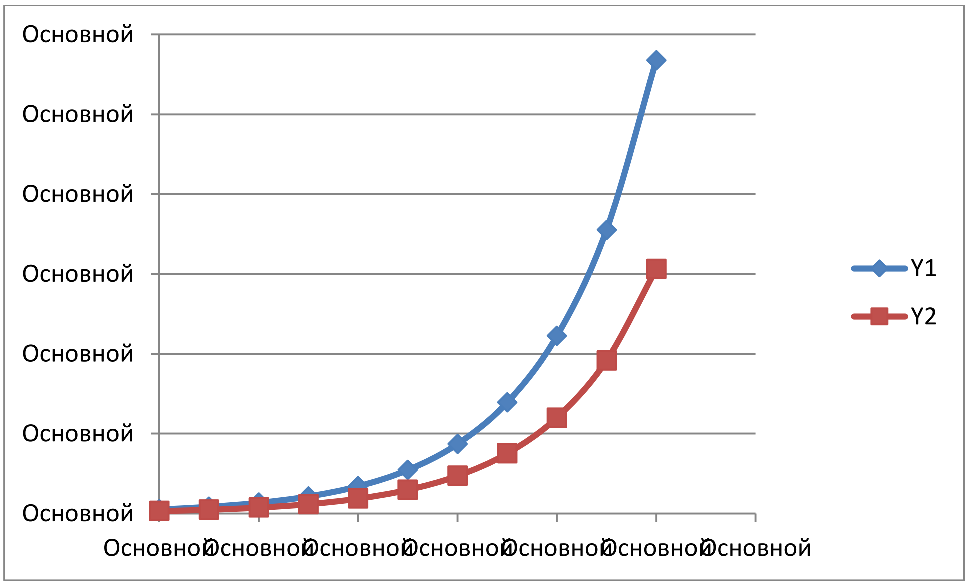

Рисунок. Траєкторія розвитку зміни ВОП

Зауваження. Зміна структурних параметрів може привести до якісно іншому розвитку системи, хоча параметри макромоделі збережуться.

Дослідження моделі Леонтьева дозволяє зробити наступний висновок: на відміну від макроекономічної моделі, яка при нульовому споживанні завжди має допустиму траєкторію, траєкторія структурної моделі навіть при нульовому споживанні може бути недопустимою унаслідок певних структурних параметрів.

Економічне зростання при різних траєкторіях споживання

Проведемо аналіз траєкторій економічного розвитку, що враховують динаміку споживання. Подамо загальний розв'язок системи $Y(t) = B(E-A)^{-1}\frac{dY(t)}{dt} + C(t)$, (де C(t)-вектор-стовпець споживання) у вигляді суми загального розв'язку однорідної системи $Y_1(t)$ і частинного розв'язку неоднорідної системи $Y_2(t)$:

$$Y(t) = Y_1(t) + Y_2(t). \tag{1}$$

Будемо розглядати траєкторію споживання у вигляді $C(t)=C(0)e^{n}$, тобто вважаючи, що компоненти вектора споживання зростають однаковим постійним темпом $r \geq 0$, причому $C(0) \geq 0$. (При r=0 маємо C(t)=C(0)=const.)

Частинний розв'язок $Y_2(t)$ визначається в такий спосіб:

$$Y_2(t) = [E - rB(E-A)^{-1}]^{-1}C(0)e^{rt}, \tag{2}$$

а невизначені постійні q_1 загального розв'язку (що входять у $Y_1(t)$)знаходяться з розв'язку системи рівнянь:

$$\sum_{i=1}^{n} d_i K_i = Y(0) - [E - rB(E-A)^{-1}]^{-1}C(0). \tag{3}$$

Таким чином, загальний розв'язок $Y(t) = B(E-A)^{-1}\frac{dY(t)}{dt} + C(t)$ набуває вигляду:

$$Y(t) = \sum_{i=1}^{n} d_i K_i e^{\lambda it} + [E - rB(E-A)^{-1}]^{-1}C(0)e^{rt}. \tag{4}$$

При відомих (однозначно визначених) значеннях K_i, λ_i конкретні розв'язки знаходяться шляхом задання темпу приросту споживання r і розрахунку відповідних заданому r значень d_i.

Визначити розв'язки щодо r у двогалузевій системі.

r не повинно перевищувати технологічний темп приросту. Якщо r>λ випливає:

а) доданок $Y_2(t)$ у (4) зростає за модулем швидше доданка, що містить $e^{\lambda t}$;

б) матриця $rB(E-A)^{-1}$ непродуктивна і в силу цього вектор $Y_2(t)$ не може бути невід'ємним.

Оскільки деякі компоненти $Y_2(t)$ від'ємні, то починаючи з деякого t і у векторі Y(t) з'являються від'ємні компоненти, що економічно неприпустимо. Таким чином, доходимо висновку, що необхідною умовою існування економічно інтерпретованої траєкторії зростання національного доходу є $r>\lambda$.

Дійсно, невід'ємність $Y_2(t)$ згідно з $Y(t) = B(E-A)^{-1}\frac{dY(t)}{dt}$ еквівалентна нерівність $[E-rB(E-A)^{-1}]^{-1}C(0)\geq 0$.

Це означало б, що рівняння $Y-rB(E-A)^{-1}Y=C(0)$ при $C(0)\geq 0$ має невід'ємний розв'язок $Y=\hat{Y}$. У цьому випадку відповідно до визначення продуктивності матриця $rB(E-A)^{-1}$, будучи нерозкладною, виявилася б продуктивною. Тому умовою продуктивності $rB(E-A)^{-1}$ є нерівність $r<\lambda$.

Можуть бути проаналізовані якісно різні ситуації в рамках виконуваної умови $0<r\lambda<1$. Тут виявляються подібні властивості результатів макроекономічної і міжгалузевої моделі. Однак повної еквівалентності результатів не існує. Відмінності поведінки розв'язку (4) при різних r від поведінки розв'язку макромоделі $y(t) = \frac{1}{1-Br}c(0)e^{rt}$ пояснюються впливом міжгалузевих зв'язків, у тому числі галузевої структури початкових умов (вектор Y(0) і C_0.

Однією з найбільш характерних властивостей макромоделі відтворення національного доходу є існування траєкторії з незмінною функціональною структурою (співвідношенням споживання і нагромадження) і постійним темпом приросту $r_0 = \frac{1-c_o}{By(0)}$, де c_0 – задане число, $c_0<y(0)$.

Для міжгалузевої моделі при заданих векторах $y(0)\geq 0$ $C_0\leq Y(0)$ можна порушити питання про існування траєкторії пропорціонального зростання (при незмінній галузевій і функціональній структурі) з темпом $r_0>0$. Шуканий темп r_0 повинен задовольняти систему з n рівнянь: $r_0B(E-A)^{-1}Y(0)=Y(0)-C_0$. У загальному випадку така система (перевизначена) не має розв'язку.

Можлива інша постановка питання про пропорційне зростання з постійним темпом.

У макромоделі можна, зафіксувавши $0<r_0<1/B$, знайти c_0, що задовольняє умову $0<c_0<y(0)$. Аналогічна задана формально реалізується і для міжгалузевої моделі. Розрахунок C_0 при заданих $Y(0)$ і $r_0<\lambda$ здійснюється за формулою

$$C_0=E-r_0B(E-A)^{-1}Y(0).$$

Може виявитися, однак, що одержувана структура вектора C_0 неприйнятна з погляду соціально-економічних критеріїв.

Приклад

Розглянемо економіку двох галузей. Нехай

$$A=\begin{bmatrix}0{,}2 & 0{,}3\\ 0{,}3 & 0{,}4\end{bmatrix} \qquad B=\begin{bmatrix}0{,}5 & 0{,}5\\ 1{,}0 & 0{,}8\end{bmatrix} \qquad X(0)=\begin{bmatrix}50\\ 50\end{bmatrix} \qquad Y(0)=\begin{bmatrix}25\\ 15\end{bmatrix}$$

Макроекономічні параметри: a=0,6; b=1,4.

$$(E-A)^{-1}=\begin{bmatrix}1{,}54 & 0{,}77\\ 0{,}77 & 2{,}05\end{bmatrix} \qquad \tilde{B}=\begin{bmatrix}1{,}16 & 1{,}41\\ 2{,}16 & 2{,}41\end{bmatrix}$$

Повна капіталоємкість валового продукту дорівнює 3,5.

Знаходимо всі елементи розв’язку:

$$Y_1(t)=40{,}4\begin{bmatrix}0{,}35\\ 0{,}61\end{bmatrix}e^{0{,}275t}+9{,}6\begin{bmatrix}1{,}15\\ -1{,}00\end{bmatrix}e^{-14{,}2t}$$

Технологічний темп приросту дорівнює 0,275. Йому відповідає власний вектор $\hat{K}=\begin{pmatrix}0{,}35\\ 0{,}61\end{pmatrix}$, що визначає структуру вектора Y(t).

Використовуючи ці вихідні данні, знайдемо розв’язки за формулою (4)

$$Y(t)=\sum_{i=1}^{n} d_i K_i e^{\lambda it}+[E-rB(E-A)^{-1}]^{-1}C(0)e^{rt},$$

при трьох значеннях темпу приросту споживання: r=0,2; r=0,056; r=0,10.

Маємо

1) $y_1=2{,}844e^{0{,}275t}+1{,}156e^{-14{,}18t}+21$;

   $y_2=5{,}003e^{0{,}275t}-1{,}003e^{-14{,}18t}+11$;

2) $y_1=1{,}195e^{-14{,}18t}+23{,}805e^{0{,}056t}$;

$y_2=-1{,}036e^{-14{,}18t}+16{,}03e^{0{,}056t}$;

3) $y_1=-3{,}509e^{0{,}275t}+1{,}275e^{-14{,}18t}+27{,}284e^{0{,}1t}$;

$y_2=-6{,}173e^{0{,}275t}-1{,}063e^{-14{,}18t}+22{,}236e^{0{,}1t}$.

Відображення цих траєкторій у просторі Y(t) показано на рисунку 2.

При постійному рівні споживання (r=0) темп приросту $y_1(t)$ і $y_2(t)$ швидко наближаються до технологічного темпу приросту $\lambda=0{,}275$; при цьому встановлюються пропорції $y_1:y_2 = 2{,}84:5{,}00$.

Траєкторія, що відповідає r=0,056, найбільше відповідає типу пропорційного зростання з постійною нормою нагромадження. У цьому випадку, починаючи з деякого моменту часу всі функціональні і галузеві компоненти валового продукту і національного доходу3 зростають темпом, практично рівним $q_0=0{,}056$, а структура виробництва і використання продукції стабілізується (зокрема, $y_1:y_2 = 23{,}8:16{,}0$).

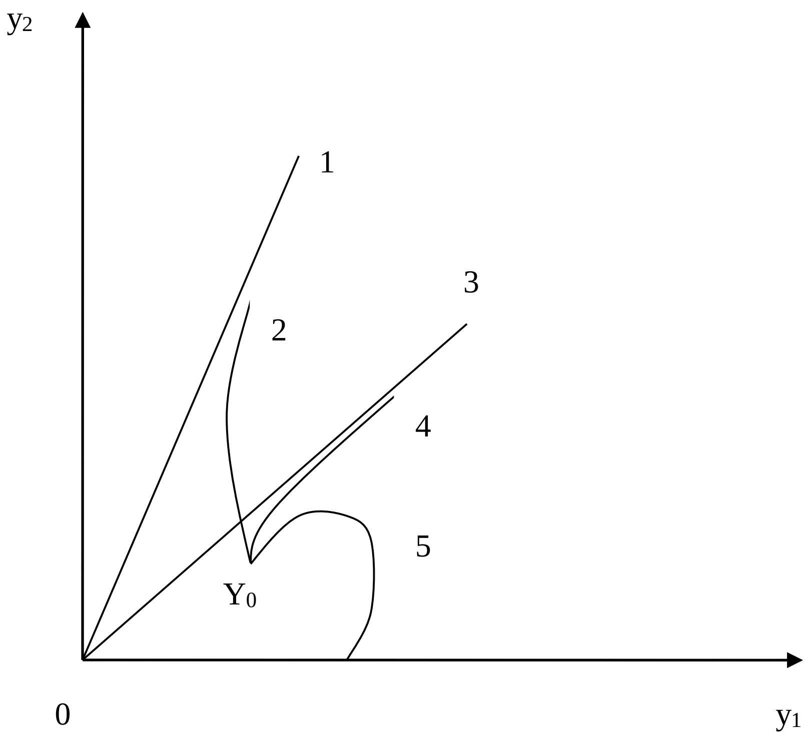

Рис. 1. Траєкторії продукції, використовуваної на споживання *і* нагромадження, при постійних темпах зростання споживання: 1 – магістраль; 2- $0\le r\le r_0$; 3 – асимптотична траєкторія зростання з постійною нормою нагромадження; 4 – $r=r_0$; 5 – $r>r_0$.

Нарешті, при r=0,10 зростання $y_1(t)$ і $y_2(t)$ відбувається тільки на початковому відрізку траєкторії, після чого починає зменшуватися обсяг y_2, а потім і y_1. Одночасне зменшення $y_1(t)$ і $y_2(t)$ означає, що нагромадження і прирости виробництва стають від'ємними, тобто розв'язок втрачає допустимість. Далі і траєкторія Y(t) досить швидко йде у від'ємну область.

Варіанти завдань для самостійного закріплення матеріалу

1. Економічна система характеризується випуском продукції в двох галузях виробництва, нагромадження капіталу пропорційне темпам приросту валового випуску по галузям. Матеріальні витрати галузей описуються коефіцієнтами прямих витрат матриці Леонтьєва.

Коефіцієнти матриці матеріальних витрат (A) та коефіцієнти матриці нагромадження капіталу (B) по галузям становлять:

$$A = \begin{pmatrix} 0{,}1 & 0{,}2 \\ 0{,}2 & 0{,}3 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 0{,}8 & 0{,}9 \\ 0{,}5 & 0{,}4 \end{pmatrix}$$

За допомогою динамічної моделі Леонтьєва визначити траєкторію розвитку двохгалузевої економічної системи на період моделювання 10 років при наступних початкових даних: кінцевий продукт (Y) на початок моделювання:

$$Y(0) = \begin{pmatrix} 25 \\ 15 \end{pmatrix}$$

2. Економічна система характеризується випуском продукції в двох галузях виробництва, нагромадження капіталу пропорційне темпам приросту валового випуску по галузям. Матеріальні витрати галузей описуються коефіцієнтами прямих витрат матриці Леонтьєва.

Коефіцієнти матриці матеріальних витрат (A) та коефіцієнти матриці нагромадження капіталу (B) по галузям становлять:

$$A = \begin{pmatrix} 0{,}4 & 0{,}2 \\ 0{,}6 & 0{,}3 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 0{,}1 & 0{,}8 \\ 0{,}5 & 0{,}4 \end{pmatrix}$$

За допомогою динамічної моделі Леонтьєва визначити траєкторію розвитку двохгалузевої економічної системи та період моделювання, за яким обсяги кінцевого продукту (Y) в галузі 2 зростуть втричі, якщо на початок моделювання Y(0)=(10; 50)

3. Економічна система характеризується випуском продукції в двох галузях виробництва, нагромадження капіталу пропорційне темпам приросту валового випуску по галузям. Матеріальні витрати галузей описуються коефіцієнтами прямих витрат матриці Леонтьєва.

Коефіцієнти матриці матеріальних витрат (А) та коефіцієнти матриці нагромадження капіталу (В) по галузям становлять:

$$A = \begin{pmatrix} 0,4 & 0,2 \\ 0,6 & 0,3 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 0,1 & 0,8 \\ 0,5 & 0,4 \end{pmatrix}$$

За допомогою динамічної моделі Леонтьєва визначити траєкторію розвитку двохгалузевої економічної системи за 10 років та встановити початкове значення кінцевого продукту у галузі 1 Y1(0), згідно якого сукупні обсяги кінцевого продукту в галузях складуть 6000 од., якщо на початок моделювання обсяг кінцевого продукту у галузі 2 складає Y2(0)=200 од.

4. Економічна система характеризується випуском продукції в двох галузях виробництва, нагромадження капіталу пропорційне темпам приросту валового випуску по галузям. Матеріальні витрати галузей описуються коефіцієнтами прямих витрат матриці Леонтьєва.

Коефіцієнти матриці матеріальних витрат (А) та коефіцієнти матриці нагромадження капіталу (В) по галузям становлять:

$$A = \begin{pmatrix} 0,1 & 0,2 \\ 0,2 & 0,3 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 0,8 & 0,9 \\ 0,5 & 0,4 \end{pmatrix}$$

За допомогою динамічної моделі Леонтьєва визначити траєкторію розвитку двохгалузевої економічної системи на період моделювання 10 років при наступних початкових даних: кінцевий продукт (Y) на початок моделювання Y(0)=(10; 50).