Аналіз рівноваги та нерівноваги, стійкості та нестійкості для динамічних систем

Більшість моделей реальних економічних систем нелінійні. Вони мають, як правило, декілька особливих траєкторій, кожна з яких повинна бути досліджена для одержання глобального фазового портрету.

Розглянемо модель співіснування двох конкуруючих видів. Нехай x_1 – кількість осіб першого виду, x_2 – кількість осіб другого виду.

Припущення про наявність конкуренції означає, що популяції співіснують на обмеженій території з обмеженими ресурсами.

dx_1/dt – швидкість зміни кількості осіб першого виду,

dx_2/dt – швидкість зміни кількості осіб другого виду.

Тоді:

$\frac{dx_1/dt}{x_1}$ – швидкість росту першої популяції в розрахунку на 1 особу,

$\frac{dx_2/dt}{x_2}$ – швидкість росту другої популяції в розрахунку на 1 особу.

Нелінійна динамічна система буде мати наступний вигляд:

$$\begin{cases} \dfrac{dx_1/dt}{x_1} = a - bx_1 - \sigma x_2 \\ \dfrac{dx_2/dt}{x_2} = c - dx_2 - \mu x_1 \end{cases} \tag{38}$$

де $a, b, c, d, \sigma, \mu > 0$.

b, d – коефіцієнти, що визначають внутрішньовидову конкуренцію;

σ, μ - коефіцієнти, що визначають міжвидову конкуренцію.

Перетворимо систему до наступного виду:

$$\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = x_1(a - bx_1 - \sigma x_2) \\ \dfrac{dx_2}{dt} = x_2(c - dx_2 - \mu x_1) \end{cases} \tag{39}$$

Для побудови фазового портрету системи, знайдемо координати її особливих точок:

$$\begin{cases} x_1(a - bx_1 - \sigma x_2) = 0 \\ x_2(c - dx_2 - \mu x_1) = 0 \end{cases} \tag{40}$$

Одержимо наступні рішення даної системи:

1) $x_1 = 0;\ x_2 = 0$, тобто особлива точка A(0; 0);

2) $x_1 = 0;\ x_2 = {}^{c}/_{d}$, тобто особлива точка B(0; ${}^{c}/_{d}$);

3) $x_1 = {}^{a}/_{b};\ x_2 = 0$, тобто особлива точка C(${}^{a}/_{b}$; 0);

4) $\begin{cases} a - bx_1 - \sigma x_2 = 0 \\ c - dx_2 - \mu x_1 = 0 \end{cases}$

Вирішуючи цю систему, знаходимо координати четвертої особливої точки:

$x_1 = \dfrac{ad - \sigma c}{bd - \sigma\mu}$; $x_2 = \dfrac{bc - \mu a}{bd - \sigma\mu}$ тобто особлива точка D $\left(\dfrac{ad - \sigma c}{bd - \sigma\mu};\ \dfrac{cb - \mu a}{bd - \sigma\mu}\right)$

Оскільки $x_1 \geq 0;\ x_2 \geq 0$ (за умовою задачі), то рішення системи має сенс у наступних випадках:

$$\begin{cases} ad < \sigma c \\ bd < \sigma\mu \\ bc < \mu a \end{cases} \quad \textit{або} \quad \begin{cases} ad > \sigma c \\ bd > \sigma\mu \\ bc > \mu a \end{cases}$$

Надалі, при визначенні типу особливої точки D, будемо розглядати перший випадок.

Проаналізуємо поведінку системи в місцевостях особливих точок, для цього виконаємо лінеаризацію системи для кожної визначеної точки.

$$\begin{cases} f_1(x_1; x_2) = x_1(a - bx_1 - \sigma x_2) \\ f_2(x_1; x_2) = x_2(c - dx_2 - \mu x_1) \end{cases}$$

$$\frac{df_1}{dx_1} = a - 2bx_1 - \sigma x_2$$
$$\frac{df_1}{dx_2} = -\sigma x_1$$
$$\frac{df_2}{dx_1} = -\mu x_2$$
$$\frac{df_2}{dx_2} = c - 2dx_2 - \mu x_1$$

Тип поведінки в місцевості особливої точки визначається коренями наступного характеристичного рівняння:

$$\begin{vmatrix} \frac{df_1}{dx_1} - \lambda & \frac{df_1}{dx_2} \\ \frac{df_2}{dx_1} & \frac{df_2}{dx_2} - \lambda \end{vmatrix} = 0 \tag{41}$$

1) Для особливої точки *A(0; 0)*, одержуємо:

$$\begin{vmatrix} a - \lambda & 0 \\ 0 & c - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

Характеристичне рівняння має вигляд: $(a - \lambda)(c - \lambda) = 0$. Вирішуючи дане рівняння, отримуємо наступне рішення: $\lambda_1 = a > 0$; $\lambda_2 = з > 0$. Отже, корені дійсні та більші за нуль, тому особлива точка А – нестійкий вузол.

2) *B(0; c/d)*:

$$\begin{vmatrix} a - \sigma \frac{c}{d} - \lambda & 0 \\ -\mu \frac{c}{d} & -c - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

Характеристичне рівняння має вигляд: $\left[\left(a - \sigma \frac{c}{d}\right) - \lambda\right](-c - \lambda) = 0$. Вирішуючи дане рівняння, отримуємо рішення: $\lambda_1 = a - \sigma\, c/d < 0$; $\lambda_2 = -з < 0$. Отже, корені дійсні та менші за нуль, тому особлива крапка В – стійкий вузол.

3) *C(a/b; 0)*:

$$\begin{vmatrix} -a-\lambda & -\sigma\dfrac{a}{b} \\ 0 & c-\mu\dfrac{a}{b}-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

Характеристичне рівняння має вигляд: $(-a-\lambda)\left[\left(c-\mu\dfrac{a}{b}\right)-\lambda\right]=0$.

Вирішуючи дане рівняння, отримуємо рішення: $\lambda_1 = -a < 0;\ \lambda_2 = c - \mu\, {}^{a}/{}_{b} < 0.$ Отже, корені дійсні та менші за нуль, тому особлива крапка С – стійкий вузол.

4) $D\left(\dfrac{ad-\sigma c}{bd-\sigma\mu};\ \ \dfrac{cb-\mu a}{bd-\sigma\mu}\right)$:

$$\begin{vmatrix} a-2b\dfrac{ad-\sigma c}{bd-\sigma\mu}-\sigma\dfrac{bc-\mu a}{bd-\sigma\mu}-\lambda & -\sigma\dfrac{ad-\sigma c}{bd-\sigma\mu} \\ -\mu\dfrac{bc-\mu a}{bd-\sigma\mu} & c-2d\dfrac{bc-\mu a}{bd-\sigma\mu}-\mu\dfrac{ad-\sigma c}{bd-\sigma\mu}-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

Вирішуючи дане характеристичне рівняння, отримуємо наступну інформацію про його корені: λ_1 і λ_2 дійсні та мають різні знаки, отже особлива крапка D – сідло.

Знаючи координати особливих точок системи, та визначивши їх тип, виконуємо побудову фазового портрету системи (рис. 8)

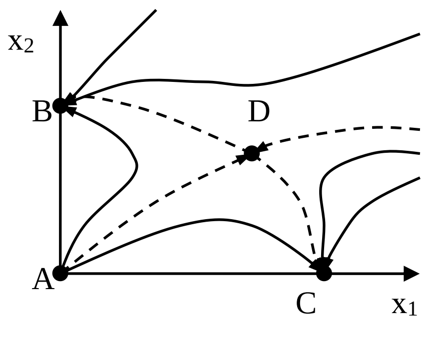

Рис. 8. Фазовий портрет нелінійної динамічної системи

Майже завжди система приходить або до стану рівноваги В, або С – принцип конкурентного виснаження, і лише початковим умовам, що відповідають сепаратрисам (показані на малюнку пунктирними лініями), що входить у стан рівноваги D, буде відповідати співіснування двох видів.