Побудова фазових портретів системи

Для динамічних систем визначають поняття інтегральних та фазових кривих (траєкторій поводження).

Нехай $x_1, x_2, \dots , x_n$ – множина змінних системи. Криву в $(n+1)$ – вимірному просторі $(t, x_1, x_2, \dots , x_n)$, який описує зміну координат цієї системи в залежності від часу t називають інтегральною кривою (рис. 1).

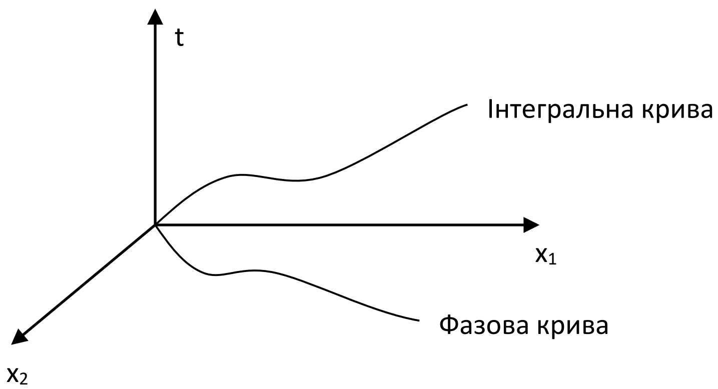

Рис. 1. Інтегральні та фазові криві

Фазова крива – це проекція інтегральної кривої на фазовий простір (простір координат).

При вивченні поведінки економічних систем з випадковими факторами, найбільший інтерес представляє не детальне вивчення поводження кожної траєкторії окремо, а якісне дослідження системи – визначення характеру поведінки траєкторій усієї системи в цілому, в залежності від загальних властивостей системи. При цьому виділяють 2 напрямки аналізу:

– Вивчення поведінки траєкторій системи при фіксованих значеннях параметрів; визначення характерів режимів, що встановлюються в системі. Для вирішення цієї задачі, увага приділяється вивченню особливих траєкторій системи (особливих точок – станів рівноваги системи; граничних циклів, атракторів тощо);

– Вивчення подій, що відбуваються при зміні параметрів системи. Увага приділяється значенням тих параметрів, при зміні яких відбувається якісна перебудова фазового портрету системи.

Під точкою рівноваги розуміється такий стан, потрапивши в який, траєкторія розвитку динамічної системи вже не зможе залишити її без додаткового зовнішнього втручання. Відповідно, якщо траєкторія системи починається з точки рівноваги, то стан системи з часом не змінюється.

Розрізняють декілька типів поведінки одновимірних систем з наступними інтегральними кривими (рис. 2).

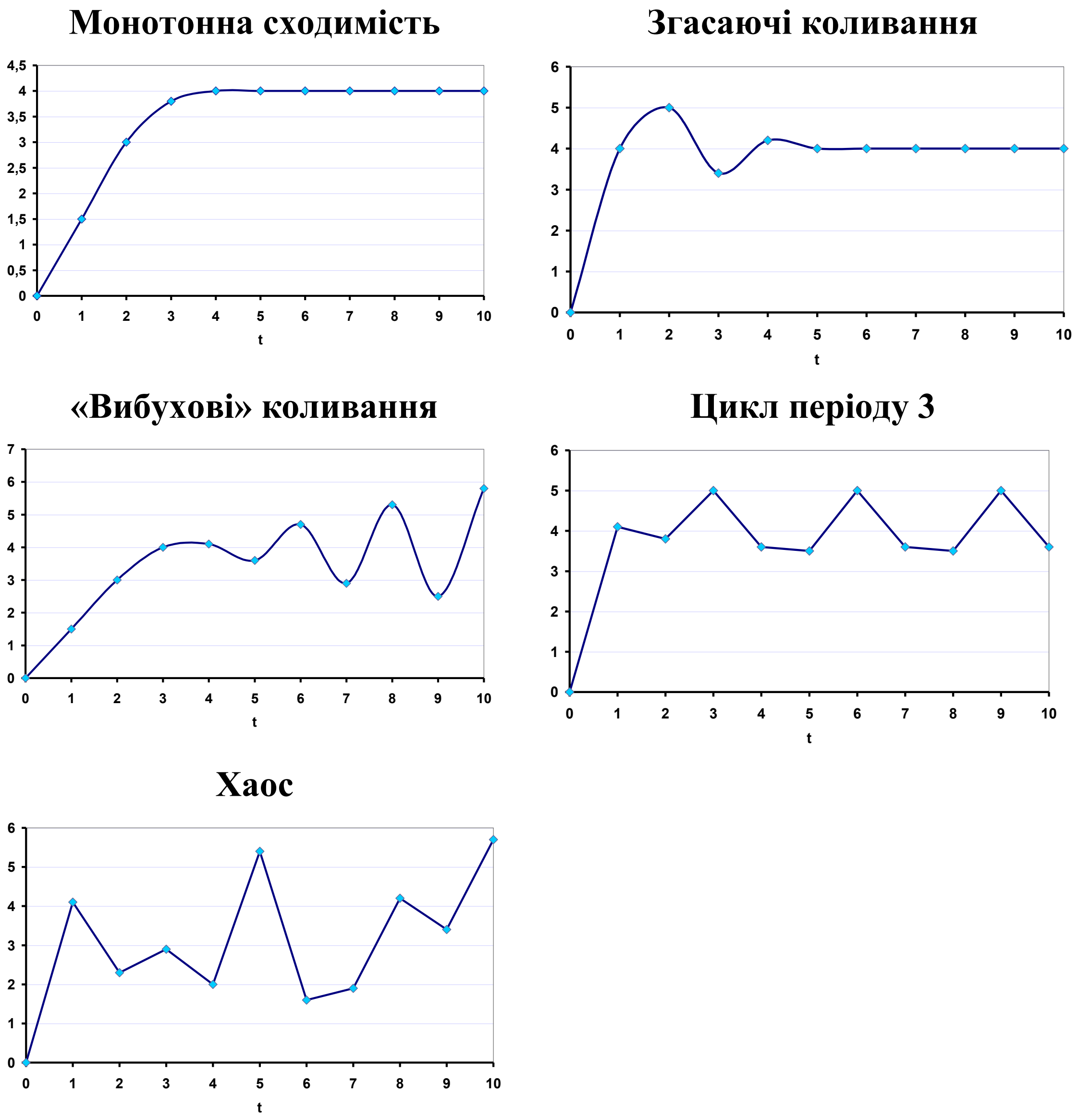

Рис. 2. Типи поведінки одновимірних систем

Дослідження стверджують, що спочатку в динамічних системах спостерігається монотонна сходимість чи згасаючі коливання до динамічної рівноваги (особливої точки системи).

Моделювання такої ситуації не викликає труднощів, навіть при використанні статистичних методів. Подальший розвиток системи, як правило, приводить до виникнення біфуркації та переходу до кінцевих циклів великих періодів.

Застосування статистичних методів, в цьому випадку, досить ускладнено, не говорячи вже про можливість виникнення хаосу. Якщо система є хаотичною, то ніякі спроби використання статистичних методів не дають задовільних результатів, у той час як економічна динаміка, дозволяє побудувати такий механізм керування, що спростить поведінку, зменшить амплітуду коливань та уможливить застосування методів прогнозування динаміки розвитку системи.

При вивченні не одновимірних (двох- та n-вимірних) економічних систем, найбільший інтерес представляє аналіз фазових кривих (фазовий портрет системи), а не інтегральних кривих.

Для двовимірних динамічних систем структура фазового портрету визначається кількістю, типами та взаємним розташуванням особливих точок і граничних циклів. Особлива точка може мати наступний тип (рис. 3).

Для побудови фазового портрету системи виконують наступну послідовність дій:

- Визначення координат особливих точок системи;
- Визначення типу особливих точок;
- Визначення граничних циклів та множин, що притягують (атракторів);
- Побудова фазового портрету системи та його аналіз.

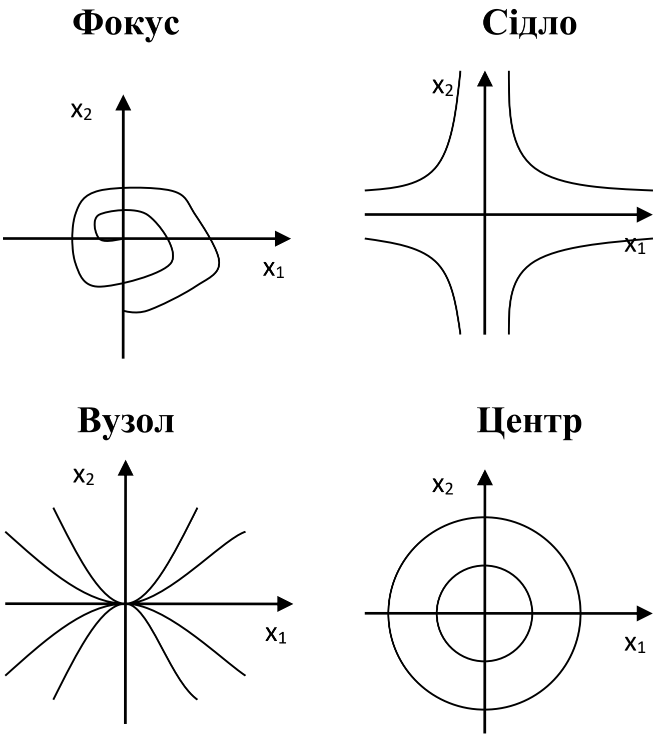

Рис. 3. Типи поведінки двовимірних систем

Розглянемо поведінку траєкторій лінійної двовимірної динамічної системи, в місцевості особливої точки, заданої у вигляді:

$$\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \\ \dfrac{dx_2}{dt} = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \end{cases} \qquad (1)$$

Припускаємо, что лінійна частина системи не вироджена, отже: ($a_{11}\ a_{22} - a_{12}\ a_{21} <> 0$).

Знайдемо координати особливих точок даної системи. З визначення особливої точки, система повинна знаходитися в стані рівноваги, тобто її стан не повинний змінюватися з часом. Отже, виконується наступна система рівнянь:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = 0 \end{cases} \qquad (2)$$

Рішенням даної системи рівнянь будуть наступні корені: $x_1=0; x_2=0$, тобто точка А(0; 0) – особлива точка системи.

Тип поведінки системи в місцевості особливої точки визначається коренями характеристичного рівняння (метод Ейлера):

$$\begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda \end{vmatrix} = 0 \tag{3}$$

$$(a_{11}-\lambda)(a_{22}-\lambda)-a_{12}a_{21}=0 \longrightarrow \lambda^2-\lambda(a_{11}+a_{22})+(a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21})=0$$

Позначивши суму діагональних елементів матриці як *tr(A)*, а визначник – як *det(A)*, одержимо наступне квадратне рівняння:

$$\lambda^2-\lambda tr(A)+\det(A)=0 \tag{4}$$

Вирішуючи дане рівняння відносно λ, можна визначити тип особливої точки системи за наступною схемою:

– Якщо корені характеристичного рівняння λ_1 і λ_2 дійсні та мають різні знаки, то особлива точка – сідло;

– Якщо корені характеристичного рівняння λ_1 і λ_2 дійсні й одного знаку, то особлива точка – вузол;

– Якщо корені характеристичного рівняння λ_1 і λ_2 комплексні та їх дійсні частини дорівнюють нулю, то особлива точка – центр;

– Якщо корені характеристичного рівняння λ_1 і λ_2 комплексні та їх дійсні частини більші за нуль, то особлива точка або нестійкий фокус, або нестійкий вузол;

– Якщо корені характеристичного рівняння λ_1 і λ_2 комплексні та їх дійсні частини менші за нуль, то особлива точка або стійкий фокус, або стійкий вузол.