Побудова фазових графіків

Коливання в двовимірних лінійних динамічних системах описуються наступною системою рівнянь:

$$\begin{cases} x_1 = R_1 \cos(\omega t + \beta) \\ x_2 = R_2 \sin(\omega t + \beta) \end{cases}, \qquad \text{причому} \qquad \left(\frac{x_1}{R_1}\right)^2 + \left(\frac{x_2}{R_2}\right)^2 = 1$$

Графічно цей процес показано на рисунку 4:

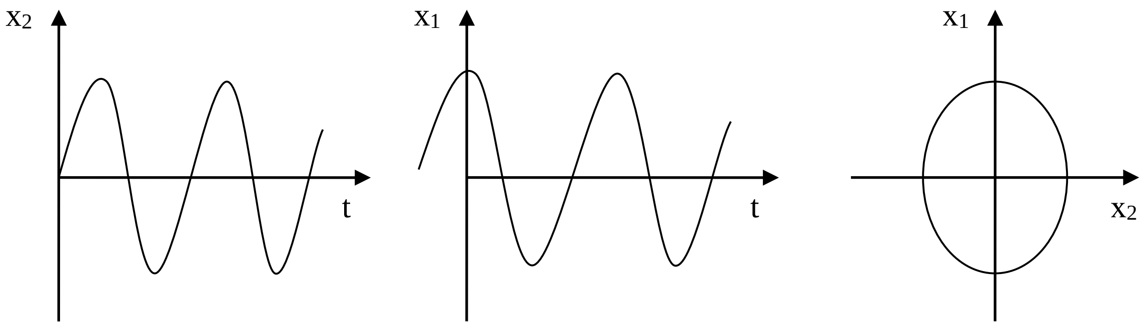

Рис. 4. Гармонійні коливання

Коливання, що відбуваються під дією зазначених законів, називаються гармонійними.

Велика кількість нелінійних моделей економічних систем характеризується тим, що динаміка розвитку фазових змінних носить коливальний характер, відмінний від гармонійного. Одним з найбільш відомих прикладів таких систем є модель «човен Вольтера», що описує співіснування двох видів – хижаків та жертв.

Нехай x_1 – кількість осіб першого виду (жертви), x_2 – кількість осіб другого виду (хижаки).

dx_1/dt – швидкість зміни кількості жертв,

dx_2/dt – швидкість зміни кількості хижаків.

Тоді:

$\frac{dx_1 / dt}{x_1}$ – швидкість росту кількості жертв у розрахунку на 1 особу,

$\frac{dx_2 / dt}{x_2}$ – швидкість росту кількості хижаків у розрахунку на 1 особу.

Нелінійна динамічна система буде мати наступний вид:

$$\begin{cases} \dfrac{dx_1 / dt}{x_1} = a - bx_2 \\ \dfrac{dx_2 / dt}{x_2} = -c + dx_1 \end{cases} \tag{15}$$

де $a, b, c, d > 0$.

a – коефіцієнт, що визначає питому швидкість розмноження жертв;

b – втрати від хижаків;

з – швидкість вимирання хижаків за відсутністю жертв;

d – вдалість полювання хижаків.

Перетворимо систему до наступного вигляду:

$$\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = x_1(a - bx_2) \\ \dfrac{dx_2}{dt} = x_2(-c + dx_1) \end{cases} \tag{16}$$

Для побудови фазового портрету системи знайдемо координати її особливих точок:

$$\begin{cases} x_1(a - bx_2) = 0 \\ x_2(-c + dx_1) = 0 \end{cases} \tag{17}$$

Одержимо наступні рішення даної системи:

1) $\begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = 0 \end{cases}$ тобто, особлива точка А(0; 0);

2) $\begin{cases} a - bx_2 = 0 \\ -c + dx_1 = 0 \end{cases}$ тобто, особлива точка B($^c/_d$; $^a/_b$);

Проаналізуємо поведінку системи в місцевостях особливих точок, для цього виконаємо лінеаризацію системи в місцевостях цих точок.

$$\begin{cases} f_1(x_1; x_2) = x_1(a - bx_2) \\ f_2(x_1; x_2) = x_2(-c + dx_1) \end{cases}$$

$$\frac{df_1}{dx_1} = a - bx_2$$

$$\frac{df_1}{dx_2} = -bx_1$$

$$\frac{df_2}{dx_1} = dx_2$$

$$\frac{df_2}{dx_2} = -c + dx_1$$

1) Для особливої точки *A(0; 0)*, одержуємо:

$$\begin{vmatrix} a - \lambda & 0 \\ 0 & -c - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

Характеристичне рівняння має вигляд: $(a - \lambda)(-c - \lambda) = 0$. Вирішуючи дане рівняння, маємо: $\lambda_1 = a > 0; \lambda_2 = -з < 0$. Отже, корені дійсні та мають різні знаки, тому особлива точка А – сідло.

2) *B($^c/_d$; $^a/_b$)*:

$$\begin{vmatrix} -\lambda & -\dfrac{bc}{d} \\ \dfrac{ad}{b} & -\lambda \end{vmatrix} = 0$$

Характеристичне рівняння має вигляд: $(-\lambda)(-\lambda) - \left(-\dfrac{bc}{d}\right)\left(\dfrac{ad}{b}\right) = 0$, спростивши яке, отримуємо – $\lambda^2 + ac = 0$. Вирішуючи дане рівняння, знаходимо наступні корені: $\lambda_{1,2} = \pm i\sqrt{ac}$. Отже, отримані корені комплексні, а їхні дійсні частини дорівнюють нулю, тому особлива крапка В – центр.

З аналізу лінійних динамічних систем відомо, що тип поведінки системи – «центр» не є структурно стійким. Це означає, що незначна зміна правих частин вихідної системи диференціальних рівнянь може призвести до того, що точка B($^c/_d$; $^a/_b$) змінить свій тип, тобто перестане бути центром. Тому, для особливої точки B($^c/_d$; $^a/_b$) необхідні додаткові дослідження. Для дослідження поведінки траєкторій системи в місцевості точки B($^c/_d$; $^a/_b$), розглянемо перший інтеграл даної системи. Перший інтеграл – це функція $u(x_1, x_2)$, для якої:

$$f_1(x_1;x_2)\frac{du}{dx_1} + f_2(x_1;x_2)\frac{du}{dx_2} = 0 \qquad (18)$$

Важливою властивістю функції $u(x_1, x_2)$ є те, що вона постійна уздовж кривих рішень системи (фазових кривих) і залежить від обраного частного рішення. Можна показати, що перший інтеграл первісної системи буде мати вигляд:

$$u(x_1;x_2) = x_1^c e^{-dx_1} x_2^a e^{-bx_2} = g(x_1)h(x_2) \qquad (19)$$

Для того, щоб визначити характер поведінки системи в місцевості особливої точки B($^c/_d$; $^a/_b$), проаналізуємо поводження функцій $g(x_1)$ та $h(x_2)$, рисунку 5:

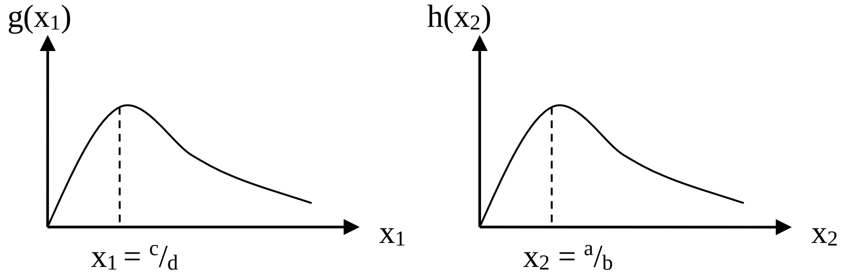

Рис. 5. Динаміка поводження функцій $g(x_1)$ та $h(x_2)$

З урахуванням графіків функцій $g(x_1)$ і $h(x_2)$ зобразимо поверхню функції $u(x_1, x_2)$ (рис. 6).

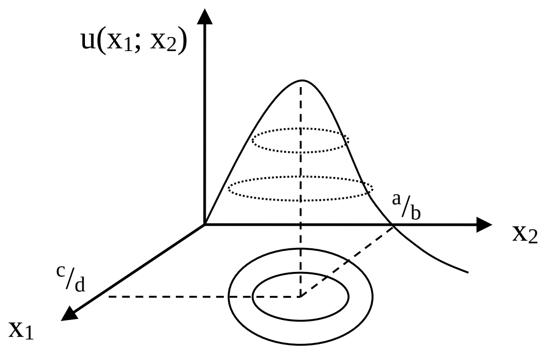

Рис. 6. Поверхня функції $u(x_1, x_2)$

Фазові траєкторії системи є лініями рівня даної поверхні, тобто замкнутими траєкторіями.

Таким чином, можна зробити висновок, що зміна правих частин первісної системи диференційних рівнянь не призведе до біфуркації в особливій точці $B(^c/_d; ^a/_b)$, а лише змінить її координати x_1 і x_2. Тому, фазовий портрет буде мати вигляд, як на рисунку 7:

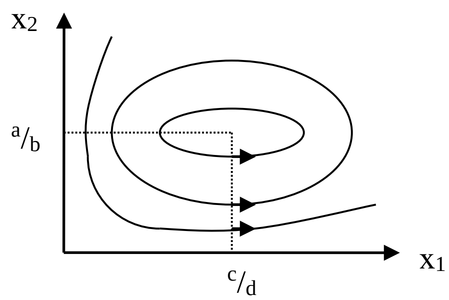

Рис. 7. Коливання у нелінійній динамічній системі

Усі траєкторії первісної системи за винятком сідла в особливій точці $A(0; 0)$ є замкнутими, тобто, мають місце коливання, відмінні від гармонійних.