## Моделі економічних циклів Гудвина

**Завдання:**

Шляхом підбору параметрів, що залежать від обсягу виробництва, споживання та основного капіталу, визначити бажаний рівень капіталовкладень, проаналізувати коливання величин К – основного капіталу та У – обсягу виробництва у часі для політики капіталовкладення.

Промоделювати циклічні коливання К и У, враховуючи такі параметри:

1) вплив капіталовкладення на ріст обсягу виробництва;

2) відсутність стрибкоподібних змін у капіталовкладеннях.

Побудувати алгоритм моделювання.

**Хід роботи:**

Моделі Гудвина описують виникнення циклічних коливань в економічному розвитку.

Будемо вважати, що в будь-який момент часу t економіка має у своєму розпорядженні основний капітал К, що включає заводи, устаткування й т.д. Його обсяг змінюється зі швидкістю, рівної відношенню чистих капіталовкладень до загального зношування за даний період часу. Джерелом економічного доходу є обсяг виробництва Y і споживання С. Ці величини зв'язані між собою відносинами

$$C = \alpha Y + \beta$$
$$Y = C + \frac{dK}{dt} \qquad (1, 2)$$

де αі β - постійні параметри, такі, що α<0 и β < С.

β - частка постійного споживання, кіт не залежить від обсягу виробництва.

З рівняння (1) видно, що між обсягом виробництва й споживанням існує лінійна залежність. Рівняння (2) означає, що вся випущена продукція, яка або споживається, або йде на розширення виробництва. Припустимо далі, що основним капіталом К управляють так, щоб підтримувати на рівні, пропорційному обсягу виробництва. Якщо R - бажаний рівень основного капіталу в момент часу t, то

$$R = \gamma Y, \tag{3}$$

де $\gamma$ - деякий параметр.

Представимо перший варіант моделі. З рівнянь (1) і (2) треба, що

$$Y - \alpha Y = \beta + \frac{dK}{dt} \tag{4}$$

звідки

$$Y = \frac{\beta + K}{1 - \alpha} \tag{5}$$

Зі співвідношень видно, що періодична поведінка величини Y може виникнути як наслідок коливань у капіталовкладенні K. У свою чергу, ці коливання виникають із прагнення зрівняти величини K и R (бажаний рівень основного капіталу). Нехай проводиться екстремальна політика капіталовкладень:

$$\frac{dK}{dt} = \begin{cases} K_1 > 0, если K < R \\ 0, если K = R \\ -K_2 < 0, если K > R \end{cases} \tag{6}$$

де $K_1$ і $K_2$ не залежать від часу t.

Розглянемо сутність формули (6). Якщо основний капітал менше бажаного рівня, то умова (6) відповідає максимальному рівню капіталовкладень (перша умова в (5.6)). Якщо ж бажаний рівень перевищений, то капіталовкладення нульові, а основний капітал амортизується зі швидкістю $K_2$ (третя умова (6)). $K_1>K_2$ означає, що при максимальному рівні капіталовкладень швидкість, з якої можуть будуватися нові підприємства більше швидкості амортизації й старіння.

З рівнянь (3) - (6) треба, що

$$R = \begin{cases} R_1 = \gamma \dfrac{\beta + k_1}{1-\alpha}, если K < R \\ R_0 = \gamma \dfrac{\beta}{1-\alpha}, если K = R \\ R_2 = \gamma \dfrac{\beta - k_2}{1-\alpha}, если K > R \end{cases} \quad (7)$$

Нехай $R_2<K<R_1$, так що при t=0 виконується $R=R_1$. Тоді рівень капіталовкладень дорівнює $k_1>0$, величина k росте, а Y залишається постійної (рис. 1) доти, поки не досягається рівність $K=R_1$. Тоді R приймає значення $R_0$, тому що K=R. Тепер $K=R_1>R=R_0$,і величина R миттєво стає рівної $R_2$. Таким чином, К миттєво міняється від величини $\kappa_1$ до $\kappa_2$, а R — від $R_1$ до $R_2$. У той же самий момент, відповідно до формули (5), різко падає обсяг виробництва. Тепер К убуває до величини $R_2$. Аналогічне міркування показує, що R при цьому стає рівної $R_1$, так що $K=R_2<R=R_1$, і величина K знову стає рівної $\kappa_1$. Основний капітал К знову зростає до $R_1$, і цикл замикається.

**Вихідні данні:**

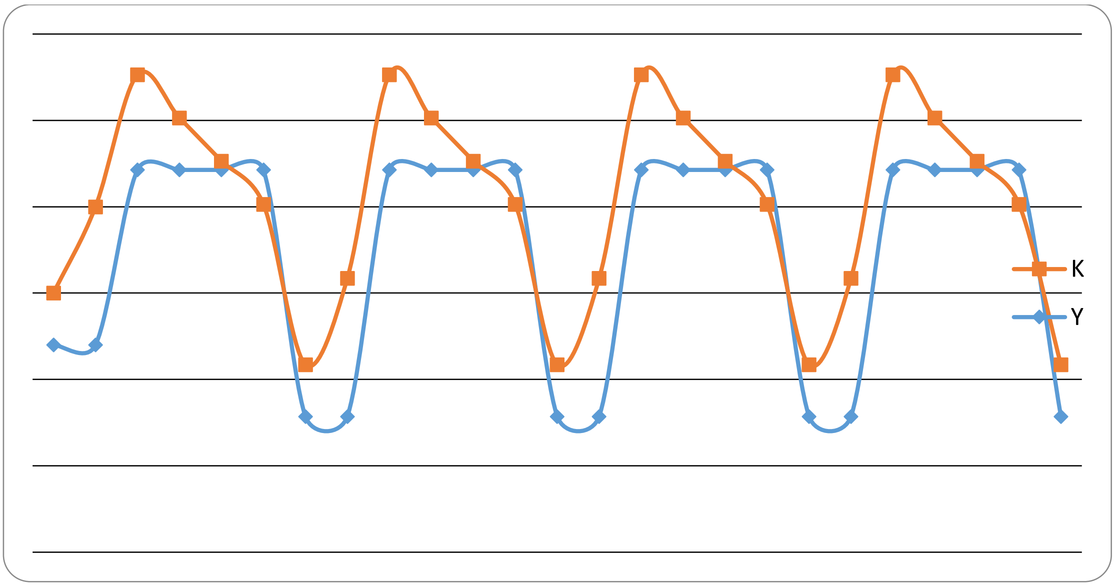
| | |
|---|---|
| **α** | 0,3 |
| **β** | 15 |
| **γ** | 0,7 |
| **K1** | 50 |
| **K2** | 25 |

**Розрахунок показників:**

| t | Y | K | R1 | R2 |
|---|---|---|---|---|
| 0 | 25 | 20 | 0 | 0 |
| 1 | 25 | 70 | 65 | -10 |
| 2 | 121,4286 | 45 | 65 | -10 |
| 3 | 121,4286 | 20 | 65 | -10 |
| 4 | 121,4286 | -5 | 65 | -10 |
| 5 | 121,4286 | -30 | 65 | -10 |
| 6 | -21,4286 | 20 | 65 | -10 |
| 7 | -21,4286 | 70 | 65 | -10 |
| 8 | 121,4286 | 45 | 65 | -10 |
| 9 | 121,4286 | 20 | 65 | -10 |
| 10 | 121,4286 | -5 | 65 | -10 |
| 11 | 121,4286 | -30 | 65 | -10 |

| t | Y | K | R1 | R2 |
|---|---|---|---|---|
| 12 | -21,4286 | 20 | 65 | -10 |
| 13 | -21,4286 | 70 | 65 | -10 |
| 14 | 121,4286 | 45 | 65 | -10 |
| 15 | 121,4286 | 20 | 65 | -10 |
| 16 | 121,4286 | -5 | 65 | -10 |
| 17 | 121,4286 | -30 | 65 | -10 |
| 18 | -21,4286 | 20 | 65 | -10 |
| 19 | -21,4286 | 70 | 65 | -10 |
| 20 | 121,4286 | 45 | 65 | -10 |
| 21 | 121,4286 | 20 | 65 | -10 |
| 22 | 121,4286 | -5 | 65 | -10 |
| 23 | 121,4286 | -30 | 65 | -10 |
| 24 | -21,4286 | 20 | 65 | -10 |

Графік коливань величин основного капіталу та обсягу виробництва виглядає наступним чином:




***Приведемо другий варіант моделі.***

Модифікуємо модель, з огляду на такі фактори:

1) вплив капіталовкладень на ріст обсягу виробництва;

2) відсутність стрибкоподібних змін у капіталовкладенні.

Для обліку першого фактора змінимо рівняння (5) так, щоб у функції Y не було стрибків навіть у тому випадку, коли величина K їх має. Це можна зробити, замінивши рівняння (5) на

$$Y = \frac{1}{1-\alpha}(\beta + \frac{dK}{dt} - \varepsilon \frac{dY}{dt}) \tag{9}$$

де ε— деяка позитивна константа.

Зрозуміло, що новий доданок в (9) породжує затримку в реакції функції Y на зміну K. З рівняння (9) знаходимо:

$$\begin{aligned} &\varepsilon \frac{dY}{dt} + (1-\alpha)Y = \beta + k_1, еслиK > R \\ &\varepsilon \frac{dY}{dt} + (1-\alpha)Y = \beta - k_{21}, еслиK < R \end{aligned} \tag{10, 11}$$

Припустимо, що в момент часу $t=t_1$депресія закінчується й відбувається миттєвий перехід від (11) до рівняння (10), тоді залежність величини Y від часу t для фази підйому буде мати вигляд

$$Y(t) = \frac{\beta + k_1}{1-\alpha}(1 - e^{\frac{\alpha-1}{\varepsilon}(t-t_1)}) + Y(t_1)e^{\frac{\alpha-1}{\varepsilon}(t-t_1)} \tag{12}$$

З рішення (12) видно, що величина Y не зростає миттєво до значення $\frac{\beta + k_1}{1-\alpha}$, а прагне до нього при t→∞. Помітимо, що час, що потрібно для того, щоб функція Y(t) із заданою точністю став рівній цій величині, цілком залежить від параметра ε. Аналогічним образом, рівняння (11) згладжує стрибкоподібне падіння Y(t) (рис.1) наприкінці періоду підйому.

Ліквідуємо тепер розриви в капіталовкладенні, тобто «зм'якшимо» раптовий перехід від $K=\kappa_1$ до $K=-\kappa_2$ (і навпаки), що виникає, коли K стає рівним R.

Розглянемо ту частину капіталовкладень, що виникає зі зміною обсягу виробництва. Зміни в капіталовкладенні відбувається тому, що ми хочемо підтримувати основний капітал на рівні бажаного капіталу. Зміна величини Y викликає зміна R,що, у свою чергу, тягне зміну K. Ясно, що якби нам удалося підтримувати K=γY, те виконувалося б і співвідношення K=R. Але такого бути не може, оскільки рівність не може виконуватися при всіх значеннях t, тому що величина K має верхню границю $k_1$і нижню границю ($-\kappa_2$). Тому припустимо, що $K = \psi(Y)$. Вид функції ψ(Y) зображений на рис. 2.

Як видно з рисунка, змушені капіталовкладення ψ(Y) близькі до ідеального рівня γY для малих величин Y, а при більших |Y| вони обмежені величинами $\kappa_1$ до ($-\kappa_2$). Помітимо, що функція ψ(Y)—εY немонотонна (тобто має «горби») і схожа на кубічну параболу. Коли капіталовкладення досягають свого максимального значення, основний капітал перестає задовольняти вимозі K=γY.

Це означає, що K треба вибрати у вигляді

$$\frac{dK}{dt} = L + \psi\left(\frac{dY}{dt}\right) \tag{13}$$

де ψ(Y) - індуковані капіталовкладення, викликані зміною обсягу виробництва, L — вплив інших капіталовкладень.

**Вихідні данні:**

| | |
|---|---|
| **α** | 9 |
| **β** | 11 |
| **γ** | 12 |
| **ε** | 2 |
| **K1** | 11 |
| **K2** | 5 |
| **L** | 0,8 |

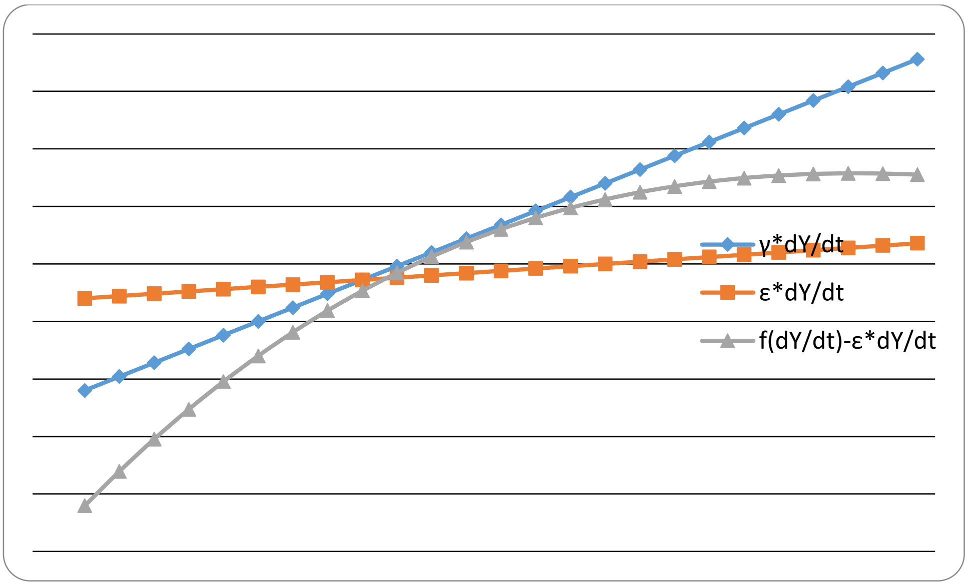
Підібрані параметри кубічної параболи індукованих капіталовкладень:

| | |
|---|---|
| **a** | 3 |
| **b** | -12 |
| **c** | 20 |
| **d** | -10 |

Отримуємо наступний алгоритм моделювання:

| t | Y | K | dK/dt | dY/dt | γ*dY/dt | ε*dY/dt | f(dY/dt) | f(dY/dt)-ε*dY/dt |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 10 | | | | | | | |
| 1 | 32,83333 | 0 | 0,8 | -0,5 | -11 | -3 | -24,025 | -21,025 |
| 2 | 46,26667 | 0,8 | -23,225 | -0,4 | -9,8 | -2,8 | -20,832 | -18,032 |
| 3 | -47,2167 | -22,425 | -20,032 | -0,3 | -8,6 | -2,6 | -17,839 | -15,239 |
| 4 | -36,5467 | -42,457 | -17,039 | -0,2 | -7,4 | -2,4 | -15,04 | -12,64 |
| 5 | -26,5567 | -59,496 | -14,24 | -0,1 | -6,2 | -2,2 | -12,429 | -10,229 |
| 6 | -17,2267 | -73,736 | -11,629 | 0 | -5 | -2 | -10 | -8 |
| 7 | -8,53667 | -85,365 | -9,2 | 0,1 | -3,8 | -1,8 | -7,747 | -5,947 |
| 8 | -0,46667 | -94,565 | -6,947 | 0,2 | -2,6 | -1,6 | -5,664 | -4,064 |
| 9 | 7,003333 | -101,512 | -4,864 | 0,3 | -1,4 | -1,4 | -3,745 | -2,345 |
| 10 | 13,89333 | -106,376 | -2,945 | 0,4 | -0,2 | -1,2 | -1,984 | -0,784 |
| 11 | 20,22333 | -109,321 | -1,184 | 0,5 | 1 | -1 | -0,375 | 0,625 |
| 12 | 26,01333 | -110,505 | 0,425 | 0,6 | 2,2 | -0,8 | 1,088 | 1,888 |
| 13 | 31,28333 | -110,08 | 1,888 | 0,7 | 3,4 | -0,6 | 2,411 | 3,011 |
| 14 | 36,05333 | -108,192 | 3,211 | 0,8 | 4,6 | -0,4 | 3,6 | 4 |
| 15 | 40,34333 | -104,981 | 4,4 | 0,9 | 5,8 | -0,2 | 4,661 | 4,861 |
| 16 | 44,17333 | -100,581 | 5,461 | 1 | 7 | 0 | 5,6 | 5,6 |
| 17 | 47,56333 | -95,12 | 6,4 | 1,1 | 8,2 | 0,2 | 6,423 | 6,223 |
| 18 | 50,53333 | -88,72 | 7,223 | 1,2 | 9,4 | 0,4 | 7,136 | 6,736 |
| 19 | 53,10333 | -81,497 | 7,936 | 1,3 | 10,6 | 0,6 | 7,745 | 7,145 |
| 20 | 55,29333 | -73,561 | 8,545 | 1,4 | 11,8 | 0,8 | 8,256 | 7,456 |
| 21 | 57,12333 | -65,016 | 9,056 | 1,5 | 13 | 1 | 8,675 | 7,675 |
| 22 | 58,61333 | -55,96 | 9,475 | 1,6 | 14,2 | 1,2 | 9,008 | 7,808 |
| 23 | 59,78333 | -46,485 | 9,808 | 1,7 | 15,4 | 1,4 | 9,261 | 7,861 |
| 24 | 60,65333 | -36,677 | 10,061 | 1,8 | 16,6 | 1,6 | 9,44 | 7,84 |
| 25 | 61,24333 | -26,616 | 10,24 | 1,9 | 17,8 | 1,8 | 9,551 | 7,751 |

В цьому разі виникає згладжування стрибків капіталовкладень, що і бачимо на графіку:



Таким чином, друга модель більш адекватно відображає реальне положення в економіці, так як враховуються такі фактори, як запізнення змін обсягів виробництва та самих капіталовкладень.

***Блок-схема нелінійної моделі економічних циклів Гудвина***