ТЕОРЕТИЧНІ ВІДОМОСТІ

1. ВИЗНАЧНИКИ

Визначником другого порядку називається величина, одержана по формулі:

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21} \qquad (1.1)$$

При цьому $a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22}$ називаються *елементами визначника*.

У загальному випадку елементи визначника записуються у такому вигляді $a_{ij}\left(i, j = \overline{1, n}\right)$, де індекс i - номер рядка, а j - номер стовпця квадратної таблиці, на перетині яких знаходиться елемент. Елементи, що мають однакові індекси, утворюють *головну діагональ визначника*. Елементи, що мають індекси $i, n-i+1$ утворюють *побічну діагональ визначника*.

Визначнику третього порядку відповідає величина:

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33} + a_{21} \cdot a_{32} \cdot a_{13} + a_{12} \cdot a_{23} \cdot a_{31} - \\ - a_{13} \cdot a_{22} \cdot a_{31} - a_{12} \cdot a_{21} \cdot a_{33} - a_{11} \cdot a_{23} \cdot a_{32} \qquad (1.2)$$

Формулу (1.2) для визначників третього порядку можна отримати також за правилом Саррюса або «правилом трикутників», які схематично зображуються так:

$$\Delta_3 = \left|\begin{matrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{matrix}\right| \begin{matrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{matrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33}$$

$$- \quad - \quad - \qquad + \quad + \quad +$$

(1.3)

Щоб мати загальний алгоритм обчислення визначників n-го порядку, необхідно ввести наступні визначення:

Мінором M_{ij} елемента a_{ij} даного визначника називається визначник на порядок нижчий, одержаний із даного шляхом викреслення рядка і стовпця, на перетину яких знаходиться даний елемент.

Наприклад, для визначника Δ_3 з формули (1.2) маємо:

$$M_{11}=\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix},\ M_{23}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}.$$

Алгебраїчне доповнення A_{ij} елемента визначника a_{ij} визначається за формулою:

$$A_{ij}=(-1)^{i+j}\cdot M_{ij} \qquad (1.4)$$

Тоді формула обчислення визначника n-го порядку має вигляд:

$$\boxed{\Delta_n = a_{i1}A_{i1}+a_{i2}A_{i2}+\ldots+a_{in}A_{in}=\sum_{k=1}^{n}a_{ik}A_{ik}}$$

і є розкладом визначника по елементам i-го рядка: тобто величина визначника дорівнює сумі добутків елементів a_{in} деякого рядка на алгебраїчні доповнення цих елементів.

<u>Зауваження</u>: Якщо елементами визначника є функції, то і визначник дорівнює функції або числу. Наприклад

$$\begin{vmatrix} \cos x & \sin x \\ \sin x & \cos x \end{vmatrix} = \cos^2 x-\sin^2 x=\cos 2x$$

$$\begin{vmatrix} tgx & 5 \\ 1/5 & ctgx \end{vmatrix} = 1-1=0$$

Основні властивості визначників:

1) Величина визначника не змінюється при його транспонуванні (заміні всіх його рядків відповідними стовпцями і навпаки);
2) Якщо поміняти місцями два рядка або стовпця визначника, то він міняє знак на протилежний;
3) Визначник з двома пропорційними рядками дорівнює нулю;
4) Спільний множник деякого рядка визначника можна виносити за знак визначника при його обчисленні. Відповідно, добуток визначника на число λ означає, що всі елементи одного якогось рядку перемножаться на це число;
5) Якщо всі елементи якогось рядка визначника дорівнюють нулю, то і визначник дорівнює нулю;

6) Величина визначника не міняється, якщо до всіх елементів будь-якого рядка додати відповідні елементи другого рядка, помножені на довільне число λ.

Зауваження: За допомогою цієї властивості визначник завжди можна привести до трикутного виду (всі елементи вище або нижче головної діагоналі дорівнюють нулю). Тоді визначник обчислюється як добуток елементів головної діагоналі.

7) Визначник обчислюється шляхом розкладу по елементам будь-якого рядка або стовпця:

$$\Delta_n = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} A_{ik} = \sum_{k=1}^{n} a_{kj} A_{kj} \qquad (1.6)$$

2. МАТРИЦІ

Матриця – це прямокутна таблиця, складена із елементів a_{ij} $\left(i=\overline{1,m},\ j=\overline{1,n}\right)$ деякої множини і записується у вигляді:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \qquad (2.1)$$

Це є матриця розміром $m \times n$, що означає кількість рядків m, стовпців n. Елементами матриці a_{ij} можуть бути числа, функції, вектори і т.д. Відповідно матриця називається числовою, функціональною, векторною. Якщо у матриці $m=n$, то вона називається *квадратною*; при $m=1$ маємо *матрицю-строку*, при $n=1$ маємо *матрицю-стовпець*, при $m=1,\ n=1$. Дві матриці A і B називаються *рівними*, якщо вони однакового розміру і їх відповідні елементи рівні, тобто $a_{ij} = b_{ij}$.

Запам'ятати!

Тільки квадратній матриці ставиться у відповідність визначник, який позначається $\det A$ або $|A|$. Якщо $\det A = 0$, матриця A називається *виродженою*, якщо $\det A \neq 0$, матриця A називається

Якщо елементи квадратної матриці відносно головної діагоналі рівні, то матриця називається *симетричною*. Якщо в квадратній матриці поміняти місцями рядки та стовпці, то отримаємо *транспоновану* матрицю. Для симетричної матриці $A = A^T$, де A^T – транспонована матриця.

2.1 Операції над матрицями

2.1.1 Додавання (віднімання) матриць.

Додавати можна матриці тільки однакового розміру. *Сумою (різницею)* матриць A і B називається матриця C, елементи якої $c_{ij} = a_{ij} \pm b_{ij}$.

Наприклад, для матриць $A = \begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 2 & -4 \\ -3 & 9 \end{pmatrix}$ і $B = \begin{pmatrix} -2 & 4 \\ 3 & 7 \\ 8 & -11 \end{pmatrix}$:

$$A + B = \begin{pmatrix} 1-2 & 6+4 \\ 2+3 & -4+7 \\ -3+8 & 9-11 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 10 \\ 5 & 3 \\ 5 & -2 \end{pmatrix}; \quad A - B = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -1 & -11 \\ -11 & 20 \end{pmatrix}$$

2.1.2 Множення матриці на число.

Добутком матриці A на число λ, називається матриця $B = \lambda \cdot A$ такого ж розміру, усі елементи якої перемножені на число λ, тобто $b_{ij} = \lambda \cdot a_{ij}$.

Наприклад: $\lambda = 5$, $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 8 & -1 \end{pmatrix}$

$$\lambda \cdot A = \begin{pmatrix} 15 & 0 \\ 40 & -5 \end{pmatrix}.$$

2.1.3 Множення двох матриць.

Добутком двох матриць $A_{m\times n}$ і $B_{n\times p}$ називається матриця $C_{m\times p} = A \cdot B$.

Запам’ятати!

Перемножити можна тільки квадратні матриці однакового розміру або прямокутні такі, що кількість стовпців першого множника A дорівнює кількості рядків другого множника B, тобто по правилу «рядок на

Взагалі добуток матриць не комутативний: $A\cdot B\neq B\cdot A$. Якщо $A\cdot B=B\cdot A$, то матриці називаються *переставними*.

Наприклад для матриць $A=\begin{pmatrix}4 & -5 & 8\\ 1 & 3 & -1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}-1 & 5\\ -2 & -3\\ 3 & 4\end{pmatrix}$. Маємо

$$A_{(2,3)}\cdot B_{(3,2)}=C_{(2,2)}=\begin{pmatrix}4\cdot(-1)+(-5)\cdot(-2)+8\cdot 3 & 4\cdot 5+(-5)\cdot(-3)+8\cdot 4\\ 1\cdot(-1)+3\cdot(-2)+(-1)\cdot 3 & 1\cdot 5+3\cdot(-3)+(-1)\cdot 4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}30 & 67\\ -10 & -8\end{pmatrix},$$

$$B_{(3,2)}\cdot A_{(2,3)}=C_{(3,3)}=\begin{pmatrix}(-1)\cdot 4+5\cdot 1 & (-1)\cdot(-5)+5\cdot 3 & (-1)\cdot 8+5\cdot(-1)\\ (-2)\cdot 4+(-3)\cdot 1 & (-2)\cdot(-5)+(-3)\cdot 3 & (-2)\cdot 8+(-3)\cdot(-1)\\ 3\cdot 4+4\cdot 1 & 3\cdot(-5)+4\cdot 3 & 3\cdot 8+4\cdot(-1)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 20 & -13\\ -11 & 1 & -13\\ 16 & -3 & 20\end{pmatrix}$$

2.1.4 Обернена матриця.

Тільки для квадратної невиродженої матриці A існує A^{-1}, яка називається *оберненою*, якщо $A\cdot A^{-1}=A^{-1}\cdot A=E$, де E – одинична матриця, у якої на головній діагоналі всі елементи дорівнюють одиниці, а решта дорівнює нулю.

$$E=\begin{pmatrix}1 & 0 & \dots & 0\\ 0 & 1 & \dots & 0\\ \dots & \dots & \dots & \dots\\ 0 & 0 & \dots & 1\end{pmatrix} \qquad (2.2)$$

Якщо у матриці A замінити її рядки стовпцями з тими ж індексами, то маємо *транспоновану матрицю* A^T.

Матриця A^* називається *приєднаною*, якщо її елементами є алгебраїчні доповнення A_{ij} транспонованої матриці A^T. Тоді формула оберненої матриці має вигляд:

$$A^{-1}=\frac{A^*}{|A|}, \text{ або}$$

$$\boxed{A^{-1}=\frac{1}{|A|}\cdot\begin{pmatrix}A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1}\\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2}\\ \dots & \dots & \dots & \dots\\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn}\end{pmatrix}} \qquad (2.3)$$

Приклади:

1) $A=\begin{pmatrix}-1 & 2\\ 1 & 3\end{pmatrix}$; $\det A=|A|=\begin{vmatrix}-1 & 2\\ 1 & 3\end{vmatrix}=-3-2=-5\neq 0$

$$A^T=\begin{pmatrix}-1 & 1\\ 2 & 3\end{pmatrix},\quad A^*=\begin{pmatrix}3 & -2\\ -1 & -1\end{pmatrix}.$$

$$A^{-1}=-\frac{1}{5}\cdot\begin{pmatrix}3 & -2\\ -1 & -1\end{pmatrix}.$$

Перевірка:

$$A\cdot A^{-1}=-\frac{1}{5}\cdot\begin{pmatrix}-1 & 2\\ 1 & 3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}3 & -2\\ -1 & -1\end{pmatrix}=-\frac{1}{5}\cdot\begin{pmatrix}-3-2 & 2-2\\ 3-3 & -2-3\end{pmatrix}=$$
$$=-\frac{1}{5}\cdot\begin{pmatrix}-5 & 0\\ 0 & -5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}=E$$

2) $A=\begin{pmatrix}2 & -4 & 1\\ 1 & -5 & 3\\ 1 & -1 & 1\end{pmatrix}$.

$$|A|=2\cdot\begin{vmatrix}-5 & 3\\ -1 & 1\end{vmatrix}+4\cdot\begin{vmatrix}1 & 3\\ 1 & 1\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}1 & -5\\ 1 & -1\end{vmatrix}=2\cdot(-5+3)+4\cdot(1-3)+(-1+5)=-4-8+4=-8\neq 0$$

$$A_{11}=\begin{vmatrix}-5 & 3\\ -1 & 1\end{vmatrix}=-5+3=2\qquad A_{21}=-\begin{vmatrix}-4 & 1\\ -1 & 1\end{vmatrix}=-(-4+1)=3\qquad A_{31}=\begin{vmatrix}-4 & 1\\ -5 & 3\end{vmatrix}=-12+5=-7$$

$$A_{12}=-\begin{vmatrix}1 & 3\\ 1 & 1\end{vmatrix}=-(1-3)=2\qquad A_{22}=\begin{vmatrix}2 & 1\\ 1 & 1\end{vmatrix}=2-1=1\qquad A_{32}=-\begin{vmatrix}2 & 1\\ 1 & 3\end{vmatrix}=-(6-1)=-5$$

$$A_{13}=\begin{vmatrix}1 & -5\\ 1 & -1\end{vmatrix}=-1+5=4\qquad A_{23}=-\begin{vmatrix}2 & -4\\ 1 & -1\end{vmatrix}=-(-2+4)=-2\qquad A_{33}=\begin{vmatrix}2 & -4\\ 1 & -5\end{vmatrix}=-10+4=-6$$

$$A^{-1}=-\frac{1}{8}\begin{pmatrix}-2 & 3 & -7\\ 2 & 1 & -5\\ 4 & -2 & -6\end{pmatrix}$$

Перевірка:

$$A\cdot A^{-1}=-\frac{1}{8}\cdot\begin{pmatrix}2 & -4 & 1\\ 1 & -5 & 3\\ 1 & -1 & 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-2 & 3 & -7\\ 2 & 1 & -5\\ 4 & -2 & -6\end{pmatrix}=-\frac{1}{8}\cdot\begin{pmatrix}-8 & 0 & 0\\ 0 & -8 & 0\\ 0 & 0 & -8\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}=E$$

2.2 Ранг матриці

Рангом матриці A називається найбільший із порядків її мінорів, відмінних від нуля, і позначається як $rangA$ або $r(A)$.

Мінором $k-го$ порядку матриці $A_{m\times n}$ називається визначник, утворений виділенням довільних k рядків і k стовпчиків із матриці A. Звісно, що. $k \le \min\{m;n\}$

Базисним мінором матриці називається будь-який відмінний від нуля мінор, порядок якого дорівнює рангу даної матриці.

Кількісною характеристикою матриці будь-якого розміру є її ранг. Матриці A і B називаються *еквівалентними*, якщо $r(A)=r(B)$ і позначаються $A \sim B$.

Елементарними перетвореннями матриць, що не змінюють їх ранг є такі:

1) Два будь-яких рядка (або стовпця) можна поміняти місцями;
2) Множення всіх елементів рядка на один і той же множник $\lambda \ne 0$;
3) Додавання до елементів рядка відповідних елементів будь-якого другого рядка, помноженого на один і той же множник;

Якщо за допомогою елементарних перетворень тільки над рядками матриці, матриця приводиться до трикутного виду, або до виду трапеції, то ранг матриці дорівнює числу ненульових рядків.

Приклад: Знайти $r(A)$, якщо $A=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 3 \\ 7 & -1 & 4 & 5 \\ 4 & -2 & 0 & -6 \end{pmatrix}$.

За допомогою елементарних перетворень над рядками матриці приведемо її до виду трапеції.

$$A=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 3 \\ 7 & -1 & 4 & 5 \\ 4 & -2 & 0 & -6 \end{pmatrix} \underset{\substack{II-7\cdot I \\ III-4\cdot I}}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 3 \\ 0 & 6 & -3 & -16 \\ 0 & 2 & -4 & -18 \end{pmatrix} \underset{\frac{1}{2}\cdot III}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 3 \\ 0 & 6 & -3 & -16 \\ 0 & 1 & -2 & -9 \end{pmatrix} \underset{III\leftrightarrow II}{\sim}$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & -2 & -9 \\ 0 & 6 & -3 & -16 \end{pmatrix} \underset{III-6\cdot II}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & -2 & -9 \\ 0 & 0 & 9 & 38 \end{pmatrix} \Rightarrow r(A)=3$$

$r(A)=3$ - три рядки відмінні від нуля.

Для знаходження рангу матриці існує також метод обвідних мінорів.

3. СИСТЕМИ ЛІНІЙНИХ АЛГЕБРАЇЧНИХ РІВНЯНЬ

Нехай задана система лінійних алгебраїчних рівнянь (ЛАР):

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

Користуючись діями над матрицями, будь-яку систему лінійних алгебраїчних рівнянь можна записати у вигляді: $A \cdot X = B$, де A – матриця коефіцієнтів при невідомих, X - матриця-стовпець невідомих $x_1, x_2, \ldots, x_n$, B - матриця-стовпець правої частини системи $b_1, b_2, ..., b_n$.

Якщо число рівнянь m і число невідомих n (n – порядок системи) співпадають ($m = n$), то таку систему можна розв'язати (дослідити) за допомогою *правила Крамера*:

$$\boxed{x_k = \frac{\Delta_{x_k}}{\Delta}}, \tag{3.1}$$

де $\Delta = \det A$ – тобто головний визначник квадратної матриці коефіцієнтів A;

Δ_{x_k} – допоміжні визначники, утворені із головного заміною стовпця коефіцієнтів при відповідних невідомих стовпцем правої частини.

Якщо матриця A коефіцієнтів при невідомих невироджена, тобто $\det A \neq 0$, то таку систему ЛАР можна розв'язати за допомогою *матричного методу* з використанням оберненої матриці.

$$A \cdot X = B \Rightarrow A^{-1} \cdot A \cdot X = A^{-1} \cdot B$$

Так як $A^{-1} \cdot A = E$, то

$$\boxed{X = A^{-1} \cdot B} \tag{3.2}$$

Приклад. Розв'язати систему рівнянь по правилу Крамера і матричним способом.

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 5 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 = 6 \\ x_1 + 5x_2 = -3 \end{cases} \tag{3.3}$$

Правило Крамера:

Виписуємо чотири визначника, один головний і три допоміжні.

$$\Delta = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 5 & 0 \end{vmatrix} = 3\cdot\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 5 & 0 \end{vmatrix} - 2\cdot\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} = -15+2+11 = -2$$

$$\det A = -2$$

$$\Delta_{x_1} = \begin{vmatrix} 5 & 2 & 1 \\ 6 & -1 & 1 \\ -3 & 5 & 0 \end{vmatrix} = 5\cdot\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 5 & 0 \end{vmatrix} - 2\cdot\begin{vmatrix} 6 & 1 \\ -3 & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 6 & -1 \\ -3 & 5 \end{vmatrix} = -25-6+27 = -4$$

$$\Delta_{x_2} = \begin{vmatrix} 3 & 5 & 1 \\ 2 & 6 & 1 \\ 1 & -3 & 0 \end{vmatrix} = 3\begin{vmatrix} 6 & 1 \\ -3 & 0 \end{vmatrix} - 5\cdot\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2 & 6 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} = 9+5-12 = 2$$

$$\Delta_{x_3} = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 5 \\ 2 & -1 & 6 \\ 1 & 5 & -3 \end{vmatrix} = 3\cdot\begin{vmatrix} -1 & 6 \\ 5 & -3 \end{vmatrix} - 2\cdot\begin{vmatrix} 2 & 6 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} + 5\cdot\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} = -81+24+55 = -2$$

Згідно з (3.1) маємо:

$$x_1 = \frac{\Delta_{x_1}}{\Delta} = \frac{-4}{-2} = 2, \qquad x_2 = \frac{\Delta_{x_2}}{\Delta} = \frac{2}{-2} = -1, \qquad x_3 = \frac{\Delta_{x_3}}{\Delta} = \frac{-2}{-2} = 1.$$

Відповідь: $X = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Матричний спосіб:

$A\cdot X = B$, де $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 5 & 0 \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \\ -3 \end{pmatrix}$.

Обернену матрицю шукаємо по формулі (2.3), $\det A = |A| = -2$.

Знаходимо дев’ять алгебраїчних доповнень:

$$A_{11} = \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 5 & 0 \end{vmatrix} = -5 \qquad A_{21} = -\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 0 \end{vmatrix} = 5 \qquad A_{31} = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 3$$

$$A_{12} = -\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 1 \qquad A_{22} = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -1 \qquad A_{32} = -\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -1$$

$$A_{13} = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} = 11 \qquad A_{23} = -\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} = -13 \qquad A_{33} = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -7$$

$$A^{-1} = -\frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} -5 & 5 & 3 \\ 1 & -1 & -1 \\ 11 & -13 & -7 \end{pmatrix};$$

$$X = A^{-1} \cdot B = -\frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} -5 & 5 & 3 \\ 1 & -1 & -1 \\ 11 & -13 & -7 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \\ -3 \end{pmatrix} = -\frac{1}{2} \begin{pmatrix} -25+30-9 \\ 5-6+3 \\ 55-78+21 \end{pmatrix} = -\frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Відповідь: $X = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Якщо число рівнянь більше або менше порядку системи n, то таку систему треба дослідити і в разі сумісності розв'язувати іншим способом.

Система $A \cdot X = B$ називається *сумісною*, якщо вона має хоча б один розв'язок і *несумісною*, якщо вона не має розв'язків.

Розв'язком системи називається будь-який вектор-стовпець X, що задовольняє рівнянню $A \cdot X = B$.

Сумісна система може бути *визначеною*, якщо вона має єдиний розв'язок і *невизначеною*, якщо має безліч розв'язків.

Критерієм дослідження довільної системи є поняття рангу матриці.

<u>Теорема Кронекера-Капеллі</u>: Для того щоб система ЛАР $A \cdot X = B$ була сумісною, необхідно і достатньо, щоб $rang A = rang \overline{A}$, де $\overline{A} = (A|B)$ - розширена матриця системи, тобто до матриці коефіцієнтів A дописується стовпець B правої частини системи.

З цієї теореми випливає, що:

якщо $r(A) \neq r(\overline{A})$ - система не сумісна;

якщо $r(A) = r(\overline{A}) = r$ - система сумісна і якщо при цьому $r = n$ (число невідомих = порядку системи) – система *визначена*, тобто має єдиний розв'язок;

якщо при цьому $r < n$ - система *невизначена* – має безліч розв'язків. Тоді r довільних невідомих, коефіцієнти при яких утворюють *базисний мінор*, приймаються за базисні, а $n-r$ - вільні невідомі. Одержуємо безліч розв'язків за рахунок вільних невідомих.

Як слідство теореми Кронекера-Капеллі існує модифікований *метод Гауса* розв'язання довільної системи ЛАР з одночасним її дослідженням. Суть метода Гауса полягає у наступному:

- виписується розширена матриця системи;
- проводяться елементарні перетворення тільки над рядками розширеної матриці;

При цьому:

- якщо матриця коефіцієнтів A привелась до трикутного виду – система *визначена* і, розв'язуючи рівняння з одним невідомим, ідучи знизу, одержуємо рішення системи;
- якщо матриця коефіцієнтів A привелась до виду трапеції, то $(r < n)$ система *невизначена*; визначаємо базисні невідомі та вільні невідомі і знаходимо загальний розв'язок.

Якщо у матриці A утворився нульовий рядок, а справа у матриці B не нуль, то система *не сумісна*.

Приклади:

1) Розглянемо спочатку систему (3.3).

Виписуємо розширену матрицю

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & 1 & 5 \\ 2 & -1 & 1 & 6 \\ 1 & 5 & 0 & -3 \end{array}\right) \underset{III \leftrightarrow I}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 5 & 0 & -3 \\ 2 & -1 & 1 & 6 \\ 3 & 2 & 1 & 5 \end{array}\right) \underset{\substack{II-2\cdot I \\ III-3\cdot I}}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 5 & 0 & -3 \\ 0 & -11 & 1 & 12 \\ 0 & -13 & 1 & 14 \end{array}\right) \underset{III-II}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 5 & 0 & -3 \\ 0 & -11 & 1 & 12 \\ 0 & -2 & 0 & 2 \end{array}\right)$$

$$-2 \cdot x_2 = 2 \Rightarrow x_2 = -1$$
$$-11 \cdot x_2 + x_3 = 12 \Rightarrow x_3 = 1$$
$$x_1 + 5 \cdot x_2 = -3 \Rightarrow x_1 = 2$$

Система визначена.

2) Встановити сумісність та знайти загальний розв'язок системи:

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 - 3x_4 = 2 \\ 4x_1 \qquad + x_3 - 7x_4 = 3 \\ \qquad 2x_2 - 3x_3 + x_4 = 0 \\ 2x_1 + 3x_3 - 4x_3 - 2x_4 = 3 \end{cases}$$

$$\overline{A}=\left(\begin{array}{cccc|c}2&1&-1&-3&2\\4&0&1&-7&3\\0&2&-3&1&1\\2&3&-4&-2&3\end{array}\right)\underset{\substack{II-2\cdot I\\IV-I}}{\sim}\left(\begin{array}{cccc|c}2&1&-1&-3&2\\0&-2&3&-1&-1\\0&2&-3&1&1\\0&2&-3&1&1\end{array}\right)\sim$$

Викреслюємо пропорційні строчки:

$$\sim\left(\begin{array}{cccc|c}2&1&-1&-3&2\\0&-2&3&-1&-1\end{array}\right)\Rightarrow\quad r\left(\overline{A}\right)=2\,.$$

В якості базисного мінора приймаємо $M_2=\begin{vmatrix}2&1\\0&-2\end{vmatrix}\neq 0$, тоді невідомі x_1, x_2 – базисні, а x_3, x_4 – вільні, і маємо:

$$\begin{cases}2x_1+x_2=2+x_3+3x_4\\-2x_2=-1-3x_3+x_4\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x_2=\dfrac{1}{2}+\dfrac{3}{2}x_3-\dfrac{1}{2}x_4\\x_1=\dfrac{3}{4}-\dfrac{1}{4}x_3+\dfrac{7}{4}x_4\end{cases}$$

$$2x_1=2-x_2+x_3+3x_3=2-\frac{1}{2}-\frac{3}{2}x_3+\frac{1}{2}x_4+x_3+3x_4$$

$$x_1=\frac{3}{2}-\frac{1}{2}x_3+\frac{7}{2}x_4$$

Якщо прийняти $x_3=C_1$ а $x_4=C_2$, то загальний розв'язок системи має вигляд:

$$X\left(C_1;C_2\right)=\begin{pmatrix}\dfrac{3}{4}-\dfrac{1}{4}C_1+\dfrac{7}{4}C_2\\\dfrac{1}{2}+\dfrac{3}{2}C_1-\dfrac{1}{2}C_2\\C_1\\C_2\end{pmatrix}$$

3) Дослідити на сумісність:

$$\begin{cases}2x_1+x_2+x_3=-2\\x_1+2x_2+3x_3=-1\\x_1-3x_2-2x_3=3\end{cases}$$

$$\overline{A}=\left(\begin{array}{ccc|c}2&-1&1&-2\\1&2&3&-1\\1&-3&-2&3\end{array}\right)\underset{I\leftrightarrow III}{\sim}\left(\begin{array}{ccc|c}1&-3&-2&3\\1&2&3&-1\\2&-1&1&-2\end{array}\right)\underset{\substack{II-I\\III-2\cdot I}}{\sim}\left(\begin{array}{ccc|c}1&31&-2&3\\0&5&5&-4\\0&5&5&-8\end{array}\right)\underset{III-II}{\sim}\left(\begin{array}{ccc|c}1&-3&-2&3\\0&5&5&-4\\0&0&0&-4\end{array}\right)$$

$r(A)=2$, $r\left(\overline{A}\right)=3$ - система несумісна.

Якщо система однорідна, $A \cdot X = 0$, тобто права частина $B = 0$, то згідно теореми Кронекера-Капеллі вона *завжди сумісна*, тобто $r(A) = r(\overline{A})$, так як у правій частині нульовий стовпець і має місце тривіальний нульовий розв'язок $X = 0$.

Запам'ятати!

Однорідна система ЛАР завжди сумісна і має очевидний розв'язок $X = 0$.

Але якщо $r < n$, то система має безліч розв'язків, у тому числі й ненульові розв'язки (при $m = n \Rightarrow \det A = 0$).

Запам'ятати!

Однорідна система ЛАР має ненульовий розв'язок тоді і тільки тоді, коли визначник матриці коефіцієнтів дорівнює нулю.

Згідно визначення базисного мінору, кількість довільних невідомих дорівнює $n - r$. Тоді система вектор-стовпців $E_1, E_2, \ldots, E_{n-r}$ у канонічному базисі називається *фундаментальною системою розв'язків* (ФСР).

Загальний розв'язок однорідної системи має вигляд:

$$X = C_1 E_1 + C_2 E_2 + \ldots + C_{n-r} E_{n-r},$$

де $C_1, C_2, \ldots, C_{n-r}$ - довільні постійні.

Приклад. Знайти фундаментальну систему розв'язків і загальний розв'язок однорідної системи:

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 - 3x_3 = 0 \\ -2x_1 + 4x_2 + 6x_3 = 0 \end{cases}$$

Розв'язок.

Знайдемо ранг матриці системи

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -3 \\ -2 & 4 & 6 \end{pmatrix} \underset{II+2 \cdot I}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$r(A)=1, \quad n=3.$$

Обираємо за базину невідому x_1, тоді x_2 і x_3 вільні невідомі, $x_1=2x_2+3x_3$. При $x_2=C_1, \quad x_3=C_2$ загальний розв'язок системи має вигляд:

$$X(C_1;C_2)=\begin{pmatrix} 2C_1+3C_2 \\ C_1 \\ C_2 \end{pmatrix}.$$

Звідси знаходимо фундаментальну систему розв'язків

$$E_1=X(1; \quad 0)=\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \; E_2=X(0; \quad 1)=\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Тоді загальний розв'язок системи має вигляд: $X(C_1;C_2)=C_1E_1+C_2E_2$.