1. ВЕКТОРНА АЛГЕБРА

1.1 ТЕОРЕТИЧНІ ВІДОМОСТІ

Вектором називається напрямлений прямолінійний відрізок і позначається як: $\overline{AB}$, де A - початок, а B - кінець вектора, або однією буквою $\overline{a}$ (Рисунок.1.1)

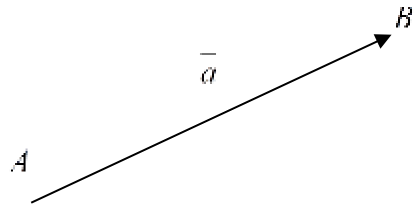


Рисунок 1.1

При цьому довжина відрізка називається *модулем* вектора і позначається символом $\left|\overline{AB}\right|$ або $\left|\overline{a}\right|$.

Якщо початок відрізка співпадає з його кінцем, то вектор називається *нульовим* $\overline{0}$.

Вектори називаються *колінеарними*, якщо вони лежать на одній прямій, або на паралельних прямих.

На відміну від фізичних векторів у математиці розглядаються вільні вектори, тобто вони визначені з точністю до точки прикладення.

Два вектори $\overline{a}$ і $\overline{b}$ називаються *рівними* $\overline{a} = \overline{b}$, якщо:

– вони колінеарні $\overline{a} \,||\, \overline{b}$;

– мають однакову довжину $\left|\overline{a}\right| = \left|\overline{b}\right|$ і напрямлені в одну сторону.

Лінійні операції над векторами це – додавання векторів по правилу трикутника або паралелограма та добуток вектора на дійсне число.

Проекція вектора $\overline{a}$ на вісь l дорівнює:

$$Пр_l\,\overline{a} = \left|\overline{a}\right| \cdot \cos\varphi,$$

де φ - кут між вектором та віссю l. Тоді , користуючись лінійними операціями над векторами, у прямокутній системі координат маємо:

$$\boxed{\overline{a} = a_x \cdot \overline{i} + a_y \cdot \overline{j} + a_z \cdot \overline{k}}$$

де $\overline{i}, \overline{j}, \overline{k}$ - одиничні вектори $\left|\overline{i}\right| = \left|\overline{j}\right| = \left|\overline{k}\right| = 1$ направлені по осям Ox, Oy, Oz. a_x, a_y, a_z - проекції вектора $\overline{a}$ на відповідні осі координат.

Легко показати, що модуль вектора $\left|\overline{a}\right| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}$, направляючі косинуси:

$$\boxed{\cos\alpha = \frac{a_x}{\left|\overline{a}\right|}; \quad \cos\beta = \frac{a_y}{\left|\overline{a}\right|}; \quad \cos\gamma = \frac{a_z}{\left|\overline{a}\right|},}$$

де α, β, γ - кути між вектором і відповідними осями координат.

Якщо $\overline{a} = a_x \cdot \overline{i} + a_y \cdot \overline{j} + a_z \cdot \overline{k}$ і $\overline{b} = b_x \cdot \overline{i} + b_y \cdot \overline{j} + b_z \cdot \overline{k}$, то

$$\overline{a} \pm \overline{b} = \left(a_x \pm b_x\right) \cdot \overline{i} + \left(a_y \pm b_y\right) \cdot \overline{j} + \left(a_z \pm b_z\right) \cdot \overline{k},$$

$$\lambda \cdot \overline{a} = \lambda a_x \cdot \overline{i} + \lambda a_y \cdot \overline{j} + \lambda a_z \cdot \overline{k}.$$

Умова колінеарності двох векторів $\overline{a}$ і $\overline{b}$ це $\lambda \cdot \overline{a} = \overline{b} \Rightarrow \overline{a} \parallel \overline{b}$.

Координатами n-мірного вектора $\overline{a_1}$ є n дійсних чисел $a_{11}, a_{12}, \ldots, a_{1n}$. Сукупність n векторів $\overline{a_1}, \overline{a_2}, \ldots, \overline{a_n}$ називається *лінійно незалежною,* якщо рівняння:

$$\boxed{\lambda_1 \overline{a_1} + \lambda_2 \overline{a_2} + \ldots + \lambda_n \overline{a_n} = 0}$$

виконується тільки при умові, що всі $\lambda_k = 0$. Система n лінійно незалежних векторів утворює базис у n-мірному просторі по якому можна розкласти будь-який $n+1$ вектор.

Дії над векторами можна зобразити у вигляді таблиці.

Означення та формули	Приклади

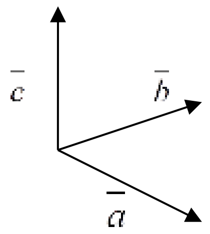
1. Якщо $A(x_1;y_1;z_1)$ і $B(x_2;y_2;z_2)$, то вектор $\overline{AB}=(x_2-x_1)\cdot\bar{i}+(y_2-y_1)\cdot\bar{j}+(z_2-z_1)\cdot\bar{k}$ або $\overline{AB}=[(x_2-x_1),(y_2-y_1),(z_2-z_1)]$ $$\left\|\overline{AB}\right\|=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}$$ $$cos\,\alpha=\frac{x_2-x_1}{\left\|\overline{AB}\right\|},\ cos\,\beta=\frac{y_2-y_1}{\left\|\overline{AB}\right\|},$$ $$cos\,\gamma=\frac{z_2-z_1}{\left\|\overline{AB}\right\|}$$	1) $A(10;6;3)$, $B(-2;4;5)$ Вектор $$\overline{AB}=(-2-10)\cdot\bar{i}+(4-6)\cdot\bar{j}+(5-3)\cdot\bar{k}$$ або $\overline{AB}=(-12;-2;2)$. $$\left\|\overline{AB}\right\|=\sqrt{(-12)^2+(-2)^2+2^2}=\sqrt{152}=2\sqrt{38}$$ $$cos\,\alpha=\frac{-12}{2\sqrt{38}}=\frac{-6}{\sqrt{38}},\quad cos\,\beta=\frac{-1}{\sqrt{38}},$$ $$cos\,\gamma=\frac{1}{\sqrt{38}}$$ Вектор $$\overline{BA}=(10+2)\cdot\bar{i}+(6-4)\cdot\bar{j}+(3-5)\cdot\bar{k};$$ $\overline{BA}=(12;2;-2)$; тобто $\overline{AB}=-\overline{BA}$
2. *Сумою або різницею* двох векторів $\bar{a}=(a_1,a_1,\ldots,a_n)$ і $\bar{b}=(b_1,b_1,\ldots,b_n)$ називається третій вектор $$\bar{c}=\bar{a}+\bar{b}=\bar{b}+\bar{a}=[(a_1+b_1),\ldots,(a_n+b_n)]$$ $$\bar{d}=\bar{a}-\bar{b}=[(a_1-b_1),(a_2-b_2),\ldots,(a_n-b_n)].$$ Добутком вектора $\bar{a}=(a_1,a_1,\ldots,a_n)$ на дійсне число λ називається вектор $$\bar{b}=\lambda\cdot\bar{a}=\bar{a}\cdot\lambda=(\lambda a_1,\lambda a_2,\ldots,\lambda a_n).$$	1) $A(10;6;3)$, $B(-2;4;5)$, $C(3;-4;-6)$. Знайти $\bar{a}=5\cdot\overline{AC}-2\cdot\overline{CB}$. **Розв'язок:** $$\overline{AC}=(3-10;-4-6;-6-3)=(-7;-10;-9)$$ $$\overline{CB}=(-2-3;4+4;5+6)=(-5;8;11).$$ $$\bar{a}=5\cdot(-7;-10;-9)-2\cdot(-5;8;11)=$$ $$=(-35;-50;-45)+(10;-16;-22)=$$ $$=(-25;-66;-67)$$ **Відповідь:** $\bar{a}=(-25;-66;-67)$
3. *Скалярним добутком* двох векторів $\bar{a}$ і $\bar{b}$ називається число $\bar{a}\cdot\bar{b}=\|\bar{a}\|\cdot\|\bar{b}\|\cdot cos(\varphi)$, де φ - кут між векторами $\bar{a}$ і $\bar{b}$, $cos(\varphi)=\frac{\bar{a}\cdot\bar{b}}{\|\bar{a}\|\cdot\|\bar{b}\|}$. Якщо $\bar{a}\cdot\bar{b}=0$ і $\|\bar{a}\|\neq0$, $\|\bar{b}\|\neq0$ $\Rightarrow$ $\bar{a}\perp\bar{b}$ *умова ортогональності двох векторів*. В координатній формі:	1) Обчислити роботу виконаною силою $\bar{F}=(4;7;-1)$ по прямолінійному переміщенню матеріальної точки з положення в $A(3;5;9)$ до $B(4;8;11)$. $\overline{AB}=(1;3;2)$. Робота A знаходиться по формулі: $A=\bar{F}\cdot\overline{AB}=4\cdot1+7\cdot3+(-1)\cdot2=23$. 2) Знайти, при якому λ вектори $\bar{a}=\bar{i}+2\cdot\bar{j}+\lambda\cdot\bar{k}$ і $\bar{a}=\lambda\cdot\bar{i}-3\cdot\bar{j}+2\cdot\bar{k}$

$\bar{a}=(a_1,a_1,\ldots,a_n)$ і $\bar{b}=(b_1,b_1,\ldots,b_n)$ $\bar{a}\cdot\bar{b}=a_1b_1+a_2b_2+\ldots+a_nb_n$.	будуть перпендикулярними. $\bar{a}\cdot\bar{b}=\lambda-6+2\lambda=0\Rightarrow 3\lambda=6$ $\lambda=2$. 3) Знайти вектор $\bar{x}$, направлений по бісектрисі кута між векторами $\bar{a}=(7;-4;-4)$ і $\bar{b}=(-2;-1;2)$, якщо $\lvert\bar{x}\rvert=5\sqrt{6}$. **Розв'язок:** $\bar{e}_1=\frac{\bar{a}}{\lvert\bar{a}\rvert}=\frac{(7;-4;-4)}{\sqrt{7^2+(-4)^2+(-4)^2}}=\frac{1}{9}\cdot(7;-4;-4)$ $\bar{e}_2=\frac{\bar{b}}{\lvert\bar{b}\rvert}=\frac{(-2;-1;2)}{\sqrt{(-2)^2+(-1)^2+2^2}}=\frac{1}{3}\cdot(-2;-1;2)$ $\bar{x}=\lambda\cdot(\bar{e}_1+\bar{e}_2)=\frac{\lambda}{9}\cdot[(7;-4;-4)+(-6;-3;6)]=$ $=\frac{\lambda}{9}\cdot(1;-7;2)$. $\lvert\bar{x}\rvert=\frac{\lambda}{9}\cdot\sqrt{1^2+(-7)^2+2^2}=\frac{\lambda}{9}\sqrt{54}-\frac{\lambda}{3}\sqrt{6}$ $\frac{\lambda}{3}\sqrt{6}=5\sqrt{6}\Rightarrow\lambda=15$ $\bar{x}=\frac{15}{9}(1;-7;2)$ **Відповідь:** $\bar{x}=\frac{5}{3}(1;-7;2)$
4. *Векторним добутком* двох векторів $\bar{a}$ і $\bar{b}$ називається вектор $\bar{c}=\bar{a}\times\bar{b}$ такий, що: а) $\lvert\bar{c}\rvert=\lvert\bar{a}\rvert\cdot\lvert\bar{b}\rvert\cdot sin(\varphi)$, де φ - кут між векторами $\bar{a}$ і $\bar{b}$, довжина	1) Визначити, при яких значеннях α і β вектор $\bar{c}=\alpha\cdot\bar{i}+3\cdot\bar{j}+\beta\cdot\bar{k}$ буде колінеарний вектору $\bar{d}=\bar{a}\times\bar{b}$, якщо $\bar{a}=(3;-1;1)$, $\bar{b}=(1;2;0)$.

вектора $\bar{c}$ чисельно дорівнює площі паралелограма побудованого на векторах $\bar{a}$ і $\bar{b}$.

b) $\bar{c} \perp \bar{a}$ і $\bar{c} \perp \bar{b}$.

c) Якщо $\bar{c} \neq 0$, то вектори $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$ утворюють праву трійку. (Рисунок.1.2).



Якщо вектори $\bar{a}$ і $\bar{b}$ задані в координатній формі, тобто $\bar{a} = (a_x, a_y, a_z)$ і $\bar{b} = (b_x, b_y, b_z)$ в прямокутній системі координат з ортами $\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}$, тоді векторний добуток можна знайти за формулою:

$$\bar{c} = \bar{a} \times \bar{b} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}.$$

згідно властивості a), площу трикутника з вершинами $A(x_1, y_1, z_1)$, $B(x_2, y_2, z_2)$, $C(x_3, y_3, z_3)$ можна обчислити за формулою:

$$S = \frac{1}{2} \cdot \left| \overline{AB} \times \overline{AC} \right|.$$

Якщо $\bar{a} \times \bar{b} = 0$ і $|\bar{a}| \neq 0$, $|\bar{b}| \neq 0$ $\Rightarrow$ $\bar{a} \parallel \bar{b}$ *умова колінеарності*, тоді:

$$\bar{d} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 3 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{vmatrix} = -2 \cdot \bar{i} + \bar{j} + 7 \cdot \bar{k}$$

$$\bar{c} \parallel \bar{d} \Rightarrow \frac{\alpha}{-2} = \frac{3}{1} = \frac{\beta}{7} \Rightarrow \alpha = -6,\ \beta = 21$$

Відповідь: $\bar{c} = -6 \cdot \bar{i} + 3 \cdot \bar{j} + 21 \cdot \bar{k}$.

2) Знайти координати вектора $\bar{x}$, якщо він перпендикулярний векторам $\bar{a}_1 = (2; -3; 1)$ і $\overline{a_2} = (1; -2; 3)$, а також задовольняє умові:

$$\bar{x} \cdot \left(\bar{i} + 2 \cdot \bar{j} - 7 \cdot \bar{k}\right) = 10.$$

Розв'язок:

$$\bar{x} = \alpha \cdot [a_1 \times a_2] = \alpha \cdot \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 2 & -3 & 1 \\ 1 & -2 & 3 \end{vmatrix} =$$

$$= \alpha \cdot \left(-7 \cdot \bar{i} - 5\bar{j} - \bar{k}\right)$$

$$\bar{x} \cdot \left(\bar{i} + 2 \cdot \bar{j} - 7 \cdot \bar{k}\right) = -7\alpha - 10\alpha + 7\alpha = 10$$

$$\alpha = -1.$$

Тоді $\bar{x} = 7 \cdot \bar{i} + 5 \cdot \bar{j} + \bar{k}$

3) Обчислити площу трикутника з вершинами $A(1; 1; 1)$, $B(2; 3; 4)$ і $C(4; 3; 2)$.

Розв'язок:

Знайдемо координати векторів $\overline{AB}$ і $\overline{AC}$.

$$\overline{AB} = (2-1; 3-1; 4-1) = (1; 2; 3),$$

$$\overline{AC} = (3; 2; 1).$$

$$S = \frac{1}{2} \cdot \left| \overline{AB} \times \overline{AC} \right| = \frac{1}{2} \cdot \left| \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix} \right| =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \left| -4 \cdot \bar{i} + 8 \cdot \bar{j} - 4 \cdot \bar{k} \right| = \left| -2 \cdot \bar{i} + 4 \cdot \bar{j} - 2 \cdot \bar{k} \right| =$$

$$= \sqrt{(-2)^2 + 4^2 + (-2)^2} = 2\sqrt{6}$$

$$\frac{a_x}{b_x}=\frac{a_y}{b_y}=\frac{a_z}{b_z}$$	**Відповідь:** $S=2\sqrt{6}$ $(кв.од.)$
5. *Змішаний добуток* трьох векторів. Послідовний добуток трьох векторів $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$ можна здійснити різними способами. Наприклад, можна вектори $\bar{a}$ і $\bar{b}$ перемножити векторно і отриманий вектор $\bar{d}=\bar{a}\times\bar{b}$ перемножити скалярно на вектор $\bar{c}$: $$(\bar{a}\times\bar{b})\cdot\bar{c}$$ В результаті отримаємо число, що відповідає змішаному добутку трьох векторів. Враховуючи геометричний зміст скалярного і векторного добутків, це число означає об'єм призми, побудованої на векторах $\bar{a}$, $\bar{b}$ і $\bar{c}$. Тоді об'єм трикутної піраміди з вершинами у точках $A(x_0,y_0,z_0)$, $B(x_1,y_1,z_1)$, $C(x_2,y_2,z_2)$ і $D(x_3,y_3,z_3)$ обчислюється за формулою: $$V=\frac{1}{6}\left\|\bar{a}\cdot\bar{b}\cdot\bar{c}\right\|=\frac{1}{6}\left\|\begin{vmatrix}x_1-x_0 & y_1-y_0 & z_1-z_0\\ x_2-x_0 & y_2-y_0 & z_2-z_0\\ x_3-x_0 & y_3-y_0 & z_3-z_0\end{vmatrix}\right\|$$ Якщо змішаний добуток трьох не нульових векторів дорівнює нулю, то вони лежать в одній площині, або в паралельних і називаються	1) Обчислити об'єм піраміди $ABCD$, якщо відомі координати її вершин: $A(-4;-3;-2)$, $B(6;2;0)$, $C(5;-1;-1)$ і $D(2;1;-6)$. Знайдемо координати векторів $\overline{AB}=(10;5;2)$, $\overline{AC}=(9;2;1)$, $\overline{AD}=(6;4;-4)$. Тоді об'єм піраміди $ABCD$ дорівнює: $$V=\frac{1}{6}\cdot\left\|(\overline{AB}\times\overline{AC})\cdot\overline{AD}\right\|=\frac{1}{6}\cdot\left\|\begin{vmatrix}10 & 5 & 2\\ 9 & 2 & 1\\ 6 & 4 & -4\end{vmatrix}\right\|=$$ $$=\frac{1}{6}\left\|10\cdot(-8-4)-5\cdot(-36-6)+2\cdot(36-12)\right\|=$$ $$=23.$$ **Відповідь:** $V=23$ $(куб.,од.)$. 2) При якому λ вектори $\bar{a}=(1;2\lambda;1)$, $\bar{b}=(1;\lambda;0)$, $\bar{c}=(0;\lambda;1)$ будуть компланарні? Умова компланарності $$\bar{a}\cdot\bar{b}\cdot\bar{c}=0\Rightarrow\begin{vmatrix}1 & 2\lambda & 1\\ 1 & \lambda & 0\\ 0 & \lambda & 1\end{vmatrix}=0$$ $$\lambda-2\cdot\lambda+\lambda=0\Rightarrow\lambda\in(-\infty;\infty).$$ 3) Довести, що чотири точки $A(1;2;-1)$, $B(0;1;5)$, $C(-1;2;1)$ і $D(2;1;3)$ лежать в одній площині. Знаходимо вектори $\overline{AB}=(-1;-1;6)$, $\overline{AC}=(-2;0;2)$, $\overline{AD}=(1;-1;4)$. Перевіримо умову компланарності:

компланарними, тобто $\bar{a}\cdot\bar{b}\cdot\bar{c}=0$ - умова компланарності.	$\overline{AB}\cdot\overline{AC}\cdot\overline{AD}=\begin{vmatrix}-1&-1&3\\-2&0&2\\1&-1&4\end{vmatrix}=$ $=-1\cdot\begin{vmatrix}0&2\\-1&4\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}-2&2\\1&4\end{vmatrix}+6\cdot\begin{vmatrix}-2&0\\1&-1\end{vmatrix}=$ $=-2-10+6\cdot 2=0$ **Відповідь:** точки $A,B,C\,i\,D$ лежать в одній площині.
6. *Умова лінійної незалежності системи векторів***.** Якщо визначник із координат векторів не дорівнює нулю, то такі вектори лінійно незалежні і утворюють базис для даного простору. Будь які два не колінеарні вектори утворюють базис в R_2 $(\bar{a}\times\bar{b}\neq 0)$. Будь які три не колінеарні вектори утворюють базис в R_3 $(\bar{a}\cdot\bar{b}\cdot\bar{c}\neq 0)$, тоді утворений вектор $\bar{d}$ можна розкласти по цьому базису, тобто знайти проекції вектора $\bar{d}$ на вектори $\bar{a}$, $\bar{b}$ і $\bar{c}$.	1) Довести, що вектори $\bar{a}$, $\bar{b}$ і $\bar{c}$ утворюють базисі знайти координати вектора $\bar{d}$ в цьому базисі, якщо $\bar{a}=(0;2;-3)$, $\bar{b}=(4;-3;-2)$, $\bar{c}=(-5;-4;0)$, $\bar{d}=(-19;-5;-4)$. Перевіряємо умову компланарності: $\bar{a}\cdot\bar{b}\cdot\bar{c}=\begin{vmatrix}0&4&-5\\2&-3&-4\\-3&-2&0\end{vmatrix}=$ $=0\cdot\begin{vmatrix}-3&-4\\-2&0\end{vmatrix}-4\cdot\begin{vmatrix}2&-4\\-3&0\end{vmatrix}-5\cdot\begin{vmatrix}2&-3\\-3&-2\end{vmatrix}=$ $=0+48+65=113\neq 0\ \Rightarrow$ Утворюють базис в R_3, тоді: $\lambda_1\bar{a}+\lambda_2\bar{b}+\lambda\bar{c}=\bar{d}\ \Rightarrow$ $\lambda_1\cdot\begin{pmatrix}0\\2\\-3\end{pmatrix}+\lambda_2\cdot\begin{pmatrix}4\\-3\\-2\end{pmatrix}+\lambda_3\cdot\begin{pmatrix}-5\\-4\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-19\\-5\\-4\end{pmatrix}.$ В координатній формі маємо $\begin{cases}4\lambda_2-5\lambda_3=-19\\2\lambda_1-3\lambda_2-4\lambda_3=-5\\-3\lambda_1-2\lambda_2=-4\end{cases}$ Для знаходження $\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3$ скористаємося правилом Крамера. Отже, $\Delta=113$. Знайдемо $\Delta_1,\Delta_2,\Delta_3$.

	$\Delta_1 = \begin{vmatrix} -19 & 4 & -5 \\ -5 & -3 & -4 \\ -4 & -2 & 0 \end{vmatrix} = 226;$ $\Delta_2 = \begin{vmatrix} 0 & -19 & -5 \\ 2 & -5 & -5 \\ -3 & -4 & 0 \end{vmatrix} = -113;$ $\Delta_3 = \begin{vmatrix} 0 & 4 & -19 \\ 2 & -3 & -5 \\ -3 & -2 & -4 \end{vmatrix} = 339.$ Тоді $\lambda_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{226}{113} = 2;$ $\lambda_2 = \frac{-113}{113} = -1;$ $\lambda_3 = \frac{339}{113} = 3.$ Отже, $2 \cdot \overline{a} - \overline{b} + 3 \cdot \overline{c} = \overline{d}$, тобто координати вектора $\overline{d}$ в новому базисі $\overline{d} = (2; -1; 3)$. **Відповідь:** $\overline{d} = (2; -1; 3)$.