КОРОТКІ ТЕОРЕТИЧНІ ВІДОМОСТІ

Аналітична геометрія в просторі займається вивченням рівнянь поверхонь, площин та просторових ліній.

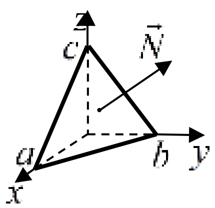
В декартових координатах кожна площина визначається рівнянням першого степеня. Розглянемо на площині фіксовану точку $M_0(x_0, y_0, z_0)$ і довільну точку $M(x, y, z)$. Окрім того, візьмемо вектор $\vec{N}(A, B, C)$ перпендикулярный до площини. Тоді $\overline{M_1M_2} \perp \vec{N}$ і їх скалярний добуток дорівнює нулю.

$\boxed{A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0}$ – рівняння площини що проходить через точку $M_0(x_0, y_0, z_0)$ перпендикулярно вектору $\vec{N}(A, B, C)$.

Розкриваючи дужки, отримаємо

$\boxed{Ax+By+Cz+D=0}$ – загальне рівняння площини.

Поділивши всі члени рівняння на D, отримаємо



$\boxed{\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}+\dfrac{z}{c}=1}$ – рівняння площини у відрізках по осям (вісям).

Три точки $M_1(x_1, y_1, z_1)$, $M_2(x_2, y_2, z_2)$, $M_3(x_3, y_3, z_3)$ однозначно задають площину, рівняння якої має вид

$$\boxed{\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix}=0}$$

Якщо точка $M_0(x_0, y_0, z_0)$ не лежить на площині $Ax+By+Cz+D=0$, то відстань між ними задається формулою

$$\boxed{d=\frac{|Ax_0+By_0+Cz_0+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}}$$

Кут між площинами обчислюється як кут між їх нормальними векторами по формулі

$$\cos\alpha = \frac{\vec{N}_1 \cdot \vec{N}_2}{\left|\vec{N}_1\right| \cdot \left|\vec{N}_2\right|} = \frac{A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2}{\sqrt{A_1^{\;2} + B_1^{\;2} + C_1^{\;2}} \cdot \sqrt{A_2^{\;2} + B_2^{\;2} + C_2^{\;2}}}$$

Якщо дві площини паралельні то виконується рівність

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2},$$

якщо перпендикулярні, то

$$A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2 = 0$$

Лінія перетину двох площин являється прямою. Це значить, що система двох рівнянь задає деяку пряму у просторі

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \end{cases}$$ – загальне рівняння прямої.

Якщо відомі координати точки $M_1(x_1, y_1, z_1)$ що належить прямій і координати напрямного вектора $\vec{\rho}(m, n, p)$ – що проходить паралельно до неї, тоді рівняння прямої можливо представити у вигляді

$$\frac{x - x_1}{m} = \frac{y - y_1}{n} = \frac{z - z_1}{p}$$ – канонічне рівняння прямої.

Прирівнюючи останній вираз до параметра t отримаємо

$$\begin{cases} x = x_1 + mt \\ y = y_1 + \grave{o}t \\ z = z_1 + pt \end{cases}$$ – параметричне рівняння прямої.

Якщо відомі координати двох точок $M_1(x_1, y_1, z_1)$ і $M_2(x_2, y_2, z_2)$, що лежать на прямій, то із канонічного рівняння отримаємо

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1}$$ – рівняння прямої, що проходить через дві точки.

Кут між прямими в просторі обчислюється як кут між їх напрямними векторами по формулі

$$\cos\alpha = \frac{\vec{\rho}_1 \cdot \vec{\rho}_2}{\left|\vec{\rho}_1\right| \cdot \left|\vec{\rho}_2\right|} = \frac{m_1m_2 + n_1n_2 + p_1p_2}{\sqrt{m_1^2 + n_1^2 + p_1^2} \cdot \sqrt{m_2^2 + n_2^2 + p_2^2}}$$

Якщо дві прямі паралельні то виконується рівність

$$\boxed{\frac{m_1}{m_2} = \frac{n_1}{n_2} = \frac{p_1}{p_2}},$$

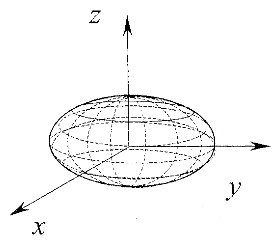
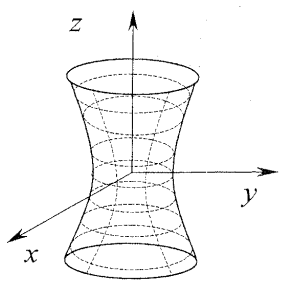
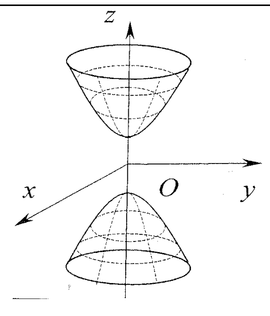
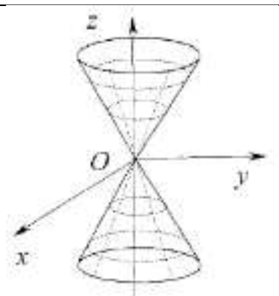
якщо перпендикулярні, то

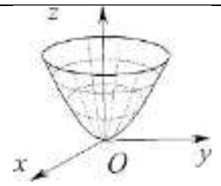
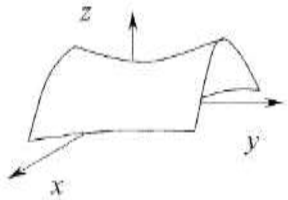
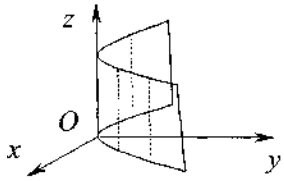
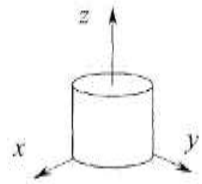
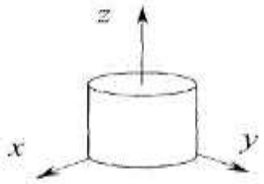
$$\boxed{m_1 m_2 + n_1 n_2 + p_1 p_2 = 0}$$

Основним предметом вивчення в аналітичній геометрії являються поверхні, які задаються в декартовій системі координат алгебраїчними рівняннями другого степеня

$$A_1 x^2 + A_2 y^2 + A_3 z^2 + 2B_{12}xy + 2B_{23}yz + 2B_{13}xz + C_1 x + C_2 y + C_3 z + D_3 = 0$$

Таке рівняння , в залежності від числових значень констант, може задавати одну з поверхонь, канонічні рівняння яких приводяться нижче.

1	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$	еліпсоїд	
2	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$	однополосний гіперболоїд	
3	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1$	двополосний гіперболоїд	
4	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0$	конус	

5	$\frac{x^2}{p}+\frac{y^2}{q}=2pz$	еліптичний параболоїд	
6	$\frac{x^2}{p}-\frac{y^2}{q}=2pz$	гіперболічний параболоїд	
7	$x^2=2pz$	параболічний циліндр	
8	$x^2+y^2=a^2$	круговий циліндр	
9	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$	еліптичний циліндр	
10	$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$	гіперболічний циліндр