АНАЛІТИЧНА ГЕОМЕТРІЯ НА ПЛОЩИНІ

2.1 ТЕОРЕТИЧНІ ВІДОМОСТІ

$$\boxed{Ax + By + C = 0}$$

Загальне рівняння прямої на площині визначається формулою

$$\boxed{Ax + By + C = 0} \qquad (2.1)$$

Рівняння прямої з кутовим коефіцієнтом k має вигляд:

$$\boxed{y = kx + b} \qquad (2.2)$$

де *k*=*tg* α, α– кут нахилу прямої до позитивної півосі *Ox, b*– відрізок, що відсікає пряма на осі *Oy*.

Рівняння прямої, що проходить через точку $M_0(x_0, y_0)$, й має кутовий коефіцієнт *к* (*рівняння прямої, що проходить у заданому напрямку*):

$$\boxed{y - y_0 = k(x - x_0)}. \qquad (2.3)$$

Рівняння прямої у відрізках записується у вигляді

$$\boxed{\frac{x}{a} + \frac{y}{в} = 1}, \qquad (2.4)$$

де *a*- відрізок, що відсікає пряма на осі *Ox, b*– відрізок, що відсікає пряма на осі *Oy*.

Рівняння прямої, що проходить через дві точки $M_1(x_1, y_1), M_2(x_2, y_2)$ має вигляд

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1}. \qquad (2.5)$$

Нормальне рівняння прямої має вигляд

$$\boxed{x cos\alpha + y\sin\alpha - p = 0}. \qquad (2.6)$$

Тут *p*- довжина перпендикуляра, опущеного з початку координат на пряму, α- кут, утворений цим перпендикуляром з позитивним напрямком осі *Ox* (Рисунокунок 2.1). Нормальне рівняння характеризується тим, що сума квадратів його коефіцієнтів при *x* и *y* дорівнює 1, а вільний член від'ємний.

Загальне рівняння прямої приводиться до нормального вигляду множенням усіх членів на множник, що нормує:

$$\boxed{\mu = \pm\frac{1}{\sqrt{A^2+B^2}}}, \qquad (2.7)$$

знак якого вибирається протилежним знаку вільного члена загального рівняння.
(Якщо C=0, то можна вибирати будь-який знак).

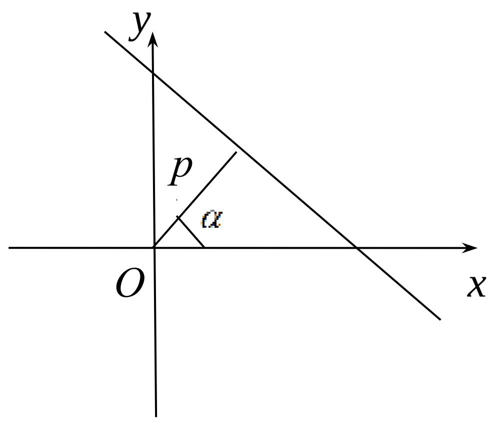


Рисунок 2.1

Умова перпендикулярності прямих $y = k_1x + b_1,\ y = k_2x + b_2$ на площині:

$$\boxed{k_2 \cdot k_1 = -1}. \qquad (2.8)$$

Умова паралельності прямих $y = k_1x + b_1,\ y = k_2x + b_2$ на площині:

$$\boxed{k_2 = k_1}. \qquad (2.9)$$

Відстань від точки $M_0(x_0, y_0)$ *до прямої*

$$Ax + By + C = 0$$

обчислюється по формулі

$$\boxed{d = \frac{|A\cdot x_0 + B\cdot y_0 + C|}{\sqrt{A^2+B^2}}}. \qquad (2.10)$$

Кут між двома прямими $y = k_1x + b_1,\ \ y = k_2x + b_2$ на площині знаходиться по формулі

$$\boxed{\operatorname{tg}\varphi = \frac{k_2 - k_1}{1 - k_1k_2}}. \qquad (2.11)$$

Полярна система координат на площині визначається точкою O (*полюс*), променем OP, що виходить із неї (*полярна вісь*), масштабним відрізком і напрямком відліку кутів.

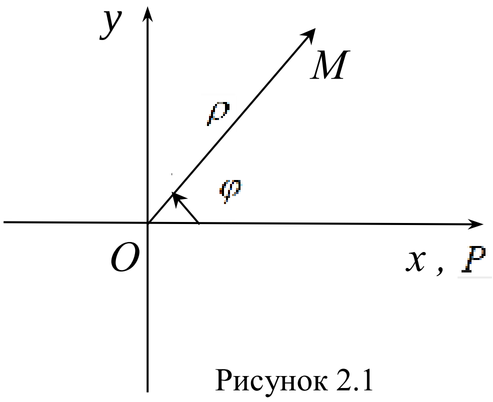


Рисунок 2.1

Полярними координатами точки M, не співпадаючої з полюсом, називають відстань $\rho > 0$ (*полярний радіус*) від точки M до полюса O і величину кута φ (*полярний кут*) між полярної віссю OP і променем OM (Рисунокунок 2.2).

Для полюса вважають $\rho = 0$ (φ не визначене). Полярний кут має нескінченну множину значень. Значення, що задовольняє умові $0 \le \varphi < 2\pi$, називають *головним*.

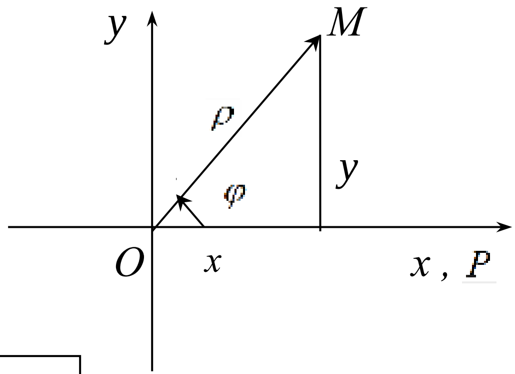


Рисунок 2.1

Зв'язок між прямокутною декартовою й полярною системами координат (Рисунок 2.3) виражається формулами:

$$\boxed{\begin{array}{l} x = \rho\cos\varphi,\ y = \rho\sin\varphi,\ \rho = \sqrt{x^2 + y^2} \\ \cos\varphi = \dfrac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \quad \sin\varphi = \dfrac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}. \end{array}} \qquad (2.12)$$

Еліпсом називають геометричне місце точок площини, для кожної з яких сума відстаней до двох даних точок (*фокусів*) тієї ж площини є постійна величина.

Для еліпса:

$$\boxed{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1}$$

a- велика, b- мала півосі;

$c=\sqrt{a^2-b^2}$,те $F_1(-c,0), F_2(c,0)$ - координати фокусів;

$\varepsilon=\dfrac{c}{a}, \varepsilon=\sqrt{1-\dfrac{b^2}{a^2}}$ - ексцентриситет ;

$x=-\dfrac{a}{\varepsilon}, x=\dfrac{a}{\varepsilon}$ - рівняння директрис.

Гіперболою називається геометричне місце точок площини, для кожної з яких модуль різниці відстаней до двох даних точок (*фокусів*) тієї ж площини є величина постійна.

Для гіперболи:

$$\boxed{\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1}$$

a- дійсна, b- уявна півосі;

$c=\sqrt{a^2+b^2}$,де $F_1(-c,0), F_2(c,0)$ - координати фокусів;

$\varepsilon=\dfrac{c}{a}$ - ексцентриситет ;

$y=\dfrac{b}{a}x,\ y=-\dfrac{b}{a}x$ - рівняння асимптот;

$x=-\dfrac{a}{\varepsilon}, x=\dfrac{a}{\varepsilon}$ - рівняння директрис.

Параболою називається геометричне місце точок площини, які віддалені на рівну відстань від даної точки (*фокуса*) і даної прямої (*директриси*), що лежать у тій же площині.

Для параболи:

$$\boxed{y^2=2px}$$

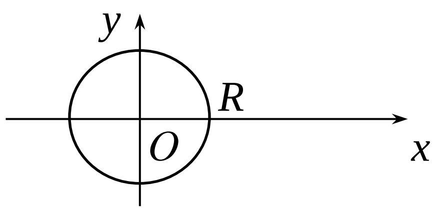
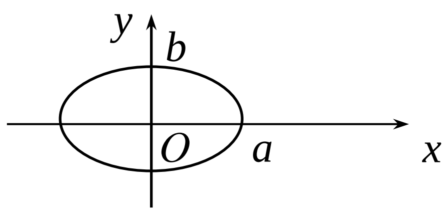
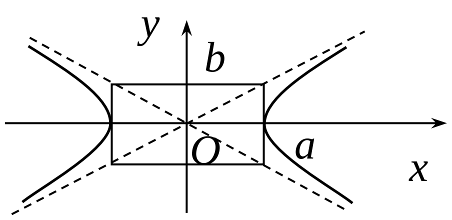
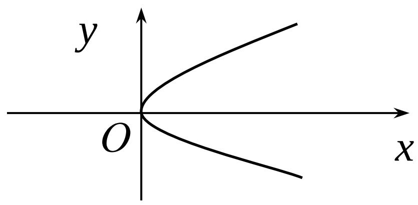
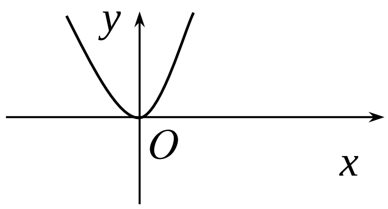
$F\left(\dfrac{p}{2},0\right)$ - координати фокуса; $x=-\dfrac{p}{2}$ - рівняння директриси.

Формули перетворення координат кривої другого порядку при *паралельному переносі* координатних осей:

$$\boxed{X=x'-x_0,\ Y=y'-y_0}, \tag{2.13}$$

де точка $O_1(x_0,y_0)$ - центр нової системи координат XO_1Y.

Перелік кривих другого порядку

№	*Канонічне рівняння*	*Схематичне зображення*	*Назва*
1	$\boxed{x^2 + y^2 = R^2}$		*коло*
2	$\boxed{\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1}$		*еліпс*
3	$\boxed{\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1}$		*гіпербола*
4	$\boxed{y^2 = 2px}$		*парабола*
5	$\boxed{x^2 = 2py}$		*парабола*
6	$\boxed{\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 0}$		*точка* $O(0,0)$

Загальне рівняння кривої другого порядку щодо прямокутних декартових координат *x* и *y* має вигляд:

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0.$$

Формули перетворення координат при *повороті осей на кут* α:

$$x = x'\cos\alpha - y'\sin\alpha \;;\; y = x'\sin\alpha + y'\cos\alpha, \qquad (2.14)$$

де

$$\operatorname{ctg} 2\alpha = \frac{A - C}{2B} \qquad (2.15)$$

$$\sin\alpha = \pm\sqrt{\frac{1 - \cos 2\alpha}{2}}, \cos\alpha = \pm\sqrt{\frac{1 + \cos 2\alpha}{2}}, \qquad (2.16)$$

$$\cos 2\alpha = \frac{\operatorname{ctg} 2\alpha}{\pm\sqrt{1 + \operatorname{ctg}^2 2\alpha}}. \qquad (2.17)$$

Запам'ятати!

Якщо співвідношення коефіцієнтів загального рівняння кривих 2-го порядку має вигляд:

$AC - B^2 > 0$- то рівняння *еліптичного типу;*

$AC - B^2 < 0$- то рівняння *гіперболічного типу;*

$AC - B^2 = 0$- то рівняння *параболічного типу*