1 СТИСЛІ ТЕОРЕТИЧНІ ВІДОМОСТІ

1.1 Основні означення

Рівняння, що зв'язує незалежну змінну, шукану функцію та її похідну називають ***диференціальним рівнянням***

$$F\left(x, y, y', \ldots, y^{(n)}\right) = 0 \tag{1.1}$$

Якщо шукана функція (як в рівнянні (1.1)) залежить від однієї змінної, то таке рівняння називається ***звичайним***.

Порядком диференціального рівняння називається порядок найвищої похідної, яка входить до рівняння.

Розв'язком або ***інтегралом*** диференціального рівняння називається будь-яка функція $y = f(x)$, яка при підстановці в задане рівняння перетворює його в тотожність.

Звичайне диференціальне рівняння 1-го порядку має вигляд:

$$f\left(x, y, y'\right) = 0 \tag{1.2}$$

або, якщо його можливо розв'язати відносно 1-ої похідної

$$y' = f(x, y) \tag{1.3}$$

Загальним розв'язком диференціального рівняння (1.2) або (1.3) називається функція,

$$y = \varphi(x, C) \tag{1.4}$$

яка залежить від однієї довільної постійної C.

Рівняння,

$$\Phi(x, y, C) = 0 \qquad (1.5)$$

яке неявно задає загальний розв'язок, називається ***загальним інтегралом*** диференціального рівняння.

Частковим розв'язком називається будь-яка функція $y = \varphi(x, C_0)$, що одержана із загального розв'язку $y = \varphi(x, C)$, при заданих значеннях довільної постійної $C = C_0$, яку можна отримати із початкових умов $y(x_0) = y_0$.

З геометричної точки зору загальний інтеграл представляє собою сімейство інтегральних кривих на площині, що залежать від довільної постійної C. Ці криві називають ***інтегральними кривими*** диференціального рівняння.

Частковому розв'язку на площині відповідає одна інтегральна крива, що проходить через задану точку площини.

Задача знаходження розв'язку рівняння (1.2) або (1.3), що задовольняє початковим умовам $y = y_0$ при $x = x_0$ називається ***задачею Коші***.

Розв'язок диференціального рівняння, що не може бути одержаним із загального розв'язку ні при одному із часткових значень довільної постійної, включаючи $\pm\infty$, називають його ***особливим розв'язком***.

1.2 Методи розв'язання деяких диференціальних рівнянь 1-го порядку

№ п/п	***Назва та вигляд диференціального рівняння 1-го порядку***	***Метод розв'язання***
1.	Диференціальні рівняння з відокремленими змінними	Для розв'язання необхідно проінтегрувати обидві частини рівняння

	$P(x)dx+Q(y)dy=0$.	$\int P(x)dx+\int Q(y)dy=\int 0$.
	Приклад: 1) Розв'язати рівняння: $xdx+y^2dy=0$. $$\int xdx+\int y^2dy=\int 0dx$$ $\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{y^3}{3}=C$ - загальний інтеграл диференціального рівняння. 2) Розв'язати рівняння: $\sin x+\dfrac{1}{y}y'=0$. Враховуючи, що $y'=\dfrac{dy}{dx}$, запишемо $$\sin x+\frac{1}{y}\cdot\frac{dy}{dx}=0,$$ або $$\sin xdx+\frac{1}{y}dy=0.$$ $\int \sin xdx+\int\dfrac{1}{y}dy=\int 0$; $-\cos x+\ln\lvert y\rvert=C$ - загальний інтеграл диференціального рівняння; $\ln\lvert y\rvert=C+\cos x$; $y=e^{C+\cos x}$ - загальний розв'язок диференціального рівняння.	
2.	Диференціальні рівняння з відокремлюваними змінними $P(x)Q(y)dx+M(x)N(y)dy=0$.	Дане рівняння зводиться до рівняння з відокремленими змінними шляхом ділення обох його частин на добуток $Q(y)M(x)$, тобто $$\frac{P(x)Q(y)dx}{Q(y)M(x)}+\frac{M(x)N(y)dy}{Q(y)M(x)}=0,$$ або $$\frac{P(x)}{M(x)}dx+\frac{N(y)}{Q(y)}dy=0.$$

<table>
<tr><td></td><td></td><td>Далі – інтегруємо обидві частини.</td></tr>
<tr><td></td><td colspan="2">Приклад: Розв’язати рівняння: $x\cos y dx + \left(x^2+1\right)\sin y dy = 0$.

Для відокремлювання змінних поділимо все рівняння на добуток $\cos y \cdot \left(x^2+1\right)$, отримаємо:

$$\frac{x\cos y dx}{\cos y \cdot \left(x^2+1\right)} + \frac{\left(x^2+1\right)\sin y dy}{\cos y \cdot \left(x^2+1\right)} = 0$$
або

$$\frac{x}{x^2+1}dx + \frac{\sin y}{\cos y}dy = 0 .$$
Останнє рівняння – рівняння з відокремленими змінними – проінтегруємо його:

$$\int \frac{x}{x^2+1}dx + \int \frac{\sin y}{\cos y}dy = \int 0dx$$
$\frac{1}{2}\ln\left|x^2+1\right| - \ln\left|\cos y\right| = C$ - загальний інтеграл диференціального рівняння.</td></tr>
<tr><td>3.</td><td>Рівняння, що зводяться до диференціальних рівнянь з відокремлюваними змінними

$$y' = f\left(ax+by+c\right).$$</td><td>Потрібно ввести заміну:

$$z = ax + by + c ,$$
тоді $y' = f\left(z\right)$.

Диференціюючи введену заміну по x, отримаємо:

$$z'' = a + by' ,$$
або

$$z' = a + bf\left(z\right), dz = \left(a + bf\left(z\right)\right)dx$$
$$\frac{dz}{a + bf\left(z\right)} = dx$$
- рівняння з відокремленими змінними.</td></tr>
<tr><td></td><td colspan="2">Приклад: Знайти загальний розв’язок рівняння: $y' = \cos\left(x - y - 1\right)$.</td></tr>
</table>

<table>
<tr>
<td></td>
<td colspan="2">

$$z = x - y - 1;\ \frac{dz}{dx} = 1 - y';\ y' = \cos z$$

$$dz = (1 - \cos z)dx;\ \frac{dz}{1 - \cos z} = dx;\ \int \frac{dz}{1 - \cos z} = \int dx$$

$$\int \frac{dz}{2\sin^2 \frac{z}{2}} = x + C;\ -ctg\frac{z}{2} = x + C$$

$-ctg\dfrac{x - y - 1}{2} = x + C$ - загальний інтеграл диференціального рівняння.

</td>
</tr>
<tr>
<td>4.</td>
<td>

Однорідні диференціальні рівняння 1-го порядку.

Диференціальне рівняння $y' = f(x, y)$- однорідне, якщо $f(\lambda x, \lambda y) = f(x, y)$.

</td>
<td>

Враховуючи, що $f(\lambda x, \lambda y) = f(x, y)$, покладемо $\lambda = \dfrac{1}{x}$.Отримаємо $y' = f\left(1, \dfrac{y}{x}\right)$.

Для розв'язання однорідного диференціального рівняння потрібно ввести заміну $\dfrac{y}{x} = z$ (або $y = z \cdot x$).

З одного боку $y' = f(1, z)$, а з другого $y' = z' \cdot x + z$.

Отже, $z' \cdot x + z = f(1, z)$;

$z' \cdot x = f(1, z) - z$;

$xdz = (f(1, z) - z)dx$

$\dfrac{dz}{f(1, z) - z} = \dfrac{dx}{x}$ - рівняння з відокремленими змінними.

</td>
</tr>
<tr>
<td></td>
<td colspan="2">

Приклад: Розв'язати рівняння: $y' = \dfrac{x + y}{x - y}$.

$$f(x, y) = \frac{x + y}{x - y};\ f(\lambda x, \lambda y) = \frac{\lambda x + \lambda y}{\lambda x - \lambda y} = \frac{\lambda(x + y)}{\lambda(x - y)} = \frac{x + y}{x - y} = f(x, y).$$

Отже, дане рівняння є однорідним диференціальним рівнянням 1-го

</td>
</tr>
</table>

<table>
<tr>
<td></td>
<td colspan="2">порядку.
Покладемо $\frac{y}{x}=z$, тоді $y'=z'\cdot x+z$; $y'=\frac{x+zx}{x-zx}$
тобто
$$z'\cdot x+z=\frac{x+zx}{x-zx};\ z'\cdot x=\frac{1+z}{1-z}-z$$
$$z'\cdot x=\frac{1+z-z+z^2}{1-z};\ z'\cdot x=\frac{1+z^2}{1-z}$$
$$xdz=\frac{1+z^2}{1-z}dx;\ \frac{1-z}{1+z^2}dz=\frac{dx}{x}$$
$$\int\frac{1-z}{1+z^2}dz=\int\frac{dx}{x};arctgz-\frac{1}{2}\ln\left|1+z^2\right|=\ln|x|+C.$$
Підставляючи замість z, $\frac{y}{x}$ отримаємо
$$arctg\frac{y}{x}-\frac{1}{2}\ln\left|1+\frac{y^2}{x^2}\right|=\ln|x|+C$$ - загальний
інтеграл диференціального рівняння.</td>
</tr>
<tr>
<td>5.</td>
<td>Диференціальні рівняння, що зводяться до однорідних
$$y'=\frac{ax+by+c}{a_1x+b_1y+c_1}.$$</td>
<td>Покладемо:
$x=x_1+h, y=y_1+k\ (h=k=const)$.
Тоді
$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy_1}{dx_1}$$
$$y_1'=\frac{a(x_1+h)+b(y_1+k)+c}{a_1(x_1+h)+b_1(y_1+k)+c_1}$$
$$y_1'=\frac{ax_1+by_1+ah+bk+c}{a_1x_1+b_1y_1+a_1h+b_1k+c_1}.$$
Потребуємо, щоб:
$$\begin{cases}ah+bk+c=0\\a_1h+b_1k+c_1=0\end{cases}\qquad(1.6)$$</td>
</tr>
</table>

		З даної системи знаходимо h и k. А останнє диференціальне рівняння перепишемо у вигляді $$y_1{}' = \frac{ax_1 + by_1}{a_1x_1 + b_1y_1}$$ - це однорідне диференціальне 1-го порядку. **Зауваження.** Система (1.6) може мати: **1)** єдиний розв'язок; тоді метод розв'язання залишається незмінним; **2)** нескінченну множину розв'язків, коли $$\frac{a}{a_1} = \frac{b}{b_1} = \frac{c}{c_1} = m,$$ тоді $$y' = \frac{a_1mx + b_1my + c_1m}{a_1x + b_1y + c_1},\ y' = m.$$ **3)** не мати жодного розв'язку, коли $$\frac{a}{a_1} = \frac{b}{b_1} = m;\ a = a_1m, b = b_1m,$$ $$\frac{dy}{dx} = \frac{m(a_1x + b_1y) + c}{a_1x + b_1y + c_1}.$$ Підстановка $z = a_1x + b_1y$ зводить останнє рівняння до рівняння з відокремлюваними змінними $$z' = a_1 + b_1\frac{mz + c}{z + c_1}.$$
6.	Лінійні диференціальні рівняння 1-го порядку $$y' + P(x)y = Q(x).$$	Розв'язок лінійного диференціального рівняння 1-го порядку будемо шукати у вигляді

<table>
<tr>
<td></td>
<td></td>
<td>

$$y = u(x)\cdot v(x),$$

тоді $y' = u'\cdot v + u\cdot v'$, підставляючи в задане рівняння, отримаємо

$$u'\cdot v + uv' + P(x)uv = Q(x),$$
$$v(u' + P(x)u) + uv' = Q(x).$$

Потребуємо, щоб $u' + P(x)u = 0$, тоді $uv' = Q(x)$.

Тобто лінійне диференціальне рівняння звелось до розв’язання двох рівнянь з відокремлюваними змінними

$$u' + P(x)u = 0,$$
$$uv' = Q(x).$$

</td>
</tr>
<tr>
<td></td>
<td colspan="2">

Приклад: Знайти частковий розв’язок диференціального рівняння:

$$y' + y = e^x, y(0) = 1.$$

$$y = u(x)v(x);\ y' = u'v + uv'$$

$$u'v + uv' + uv = e^x;\ v(u' + u) + uv' = e^x$$

$$u' + u = 0,$$
$$uv' = e^x.$$

1) $u' + u = 0$

$\frac{du}{u} = -dx, \int\frac{du}{u} = -\int dx$

$u = C_1 \cdot e^x$ (нехай $C_1 = 1$)

$u = e^{-x}$.

2) $uv' = e^x$

$e^{-x}\cdot v' = e^x$

$dv = e^{2x}dx$

$\int dv = \int e^{2x}dx, v = \frac{1}{2}e^{2x} + C$.

Отже, $y = e^{-x}\left(\frac{1}{2}e^{2x} + C\right) = \frac{1}{2}e^x + Ce^{-x}$ - загальний розв’язок. Враховуючи, що $y(0) = 1$, одержимо

$$1 = \frac{1}{2}e^0 + Ce^0$$

</td>
</tr>
</table>

<table>
<tr><td></td><td colspan="2">$$1=\frac{1}{2}+C, C=\frac{1}{2}$$
$y=\frac{1}{2}e^{x}+\frac{1}{2}e^{-x}$ - частковий розв’язок.</td></tr>
<tr><td>7.</td><td>Рівняння Бернуллі
$$y'+P(x)y=Q(x)y^{n}.$$</td><td>Рівняння Бернуллі можна привести до лінійного диференціального рівняння шляхом деяких алгебраїчних перетворень:
1) помножимо все рівняння на y^{-n}, отримаємо
$$y'\cdot y^{-n}+P(x)y^{1-n}=Q(x);$$
2) домножимо на $(1-n)$
$$(1-n)y'\cdot y^{-n}+(1-n)P(x)y^{1-n}=(1-n)Q(x).$$
3) введемо заміну:
$y^{1-n}=z$, тоді $z'=(1-n)y^{-n}\cdot y'$.
Після підстановки в останнє рівняння маємо:
$$z'+(1-n)P(x)z=(1-n)Q(x)$$
- лінійне, відносно z, диференціальне рівняння.</td></tr>
<tr><td></td><td colspan="2">Приклад: Розв’язати рівняння: $y'-\frac{1}{x}y=-y^{2}$
1) $y'\cdot y^{-2}-\frac{1}{x}y^{-1}=-1;$
2) $-y'\cdot y^{-2}+\frac{1}{x}y^{-1}=1;$
3) $z=y^{-1}$; $z'=-y^{-2}\cdot y'$,
тобто $z'+\frac{1}{x}z=1$ - це лінійне диференціальне рівняння.
$$z=u(x)v(x)$$</td></tr>
</table>

	Тоді $z' = u' \cdot v + uv'$, $u'v + uv' + \frac{1}{x}uv = 1$ $u' + \frac{1}{x}u = 0$, $uv' = 1$ 1) $u' + \frac{1}{x}u = 0$ 2) $uv' = 1$ $\frac{du}{u} = -\frac{1}{x}dx$ $\frac{1}{x}\frac{dv}{dx} = 1$ $\int\frac{du}{u} = -\int\frac{dx}{x}$ $dv = xdx$ $\ln\lvert u\rvert = -\ln\lvert x\rvert + \ln C_1$ $\int dv = \int xdx$ $u = \frac{C_1}{x}, (C_1 = 1)$ $v = \frac{x^2}{2} + C$. $u = \frac{1}{x}$. Отже, $z = \frac{1}{x}\left(\frac{x^2}{2} + C\right) = \frac{x^2 + 2C}{2x}$. Враховуючи, що $z = y^{-1}$, отримаємо остаточно $\frac{1}{y} = \frac{x^2 + 2C}{2x}$; $y = \frac{2x}{x^2 + 2}$ - загальний розв’язок.

1.3 Диференціальні рівняння, що допускають зниження порядку

№ п/п	***Вид диференціального рівняння***	***Метод розв’язання***
1.	$y^{(n)} = f(x)$	Порядок рівняння можливо понизити шляхом послідовного інтегрування обох частин рівняння:

		$$y^{(n-1)} = \int f(x)dx + C_1.$$
2.	Диференціальне рівняння, яке явно не містить шуканої функції та її похідних до порядку $k-1$ $$F\left(x, y^{(k)}, y^{(k+1)}, \ldots, y^{(n)}\right) = 0$$.	Порядок диференціального рівняння можливо понизити, якщо ввести заміну $$y^{(k)} = P(x),$$ тоді $$y^{(k+1)} = P'(x)$$ і т.д.
3.	Диференціальне рівняння, яке явно не містить незалежної змінної $$F\left(y, y', \ldots, y^{(n)}\right) = 0.$$	Порядок диференціального рівняння можливо понизити, якщо ввести заміну $$y' = P(y),$$ тоді $$y'' = P' \cdot P$$ і т.д.
4.	Диференціальне рівняння, $F\left(x, y, y', \ldots, y^{(n)}\right) = 0$, у якому ліва частина є похідною деякого диференціального виразу $(n-1)$- го порядку $$\Phi\left(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)}\right).$$	Порядок диференціального рівняння можливо понизити на одиницю $$\frac{d}{dx}\Phi\left(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)}\right) = 0$$ $$\Phi\left(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)}\right) = C_1.$$
5.	Диференціальне рівняння, однорідне відносно $y, y', \ldots, y^{(n)}$.	Порядок диференціального рівняння можливо понизити на одиницю шляхом введення заміни $$y = e^{\int z dx}, \text{ де } z = z(x).$$ Тоді $y' = ze^{\int z dx}, y'' = \left(z' + z^2\right)e^{\int z dx}$ і т.д.

2 ПРАКТИЧНІ ЗАНЯТТЯ

Практичне заняття №1

Тема: Диференціальні рівняння I-порядку з відокремленими та відокремлюваними змінними.

План.

1. Диференціальні рівняння I-го порядку з відокремленими змінними.
2. Диференціальні рівняння I-го порядку з відокремлюваними змінними.
3. Диференціальні рівняння I-го порядку, що зводяться до рівняння з відокремлювальними змінними.

Мета: Навчитися знаходити загальний та частинний розв'язки диференціальних рівнянь I-го порядку з відокремленими та відокремлюваними змінними, та рівнянь, що до них зводяться.

1. Диференціальні рівняння I-го порядку з відокремленими змінними

Завдання №1. Знайти загальний інтеграл рівняння $x^2dx - ydy = 0$.

Розв'язок: $x^2dx - ydy = 0$- рівняння з відокремленими змінними, тому для розв'язку потрібно проінтегрувати обидві частини

$$\int x^2dx - \int ydy = C,$$

отримаємо відповідь:

$$\frac{x^3}{3} - \frac{y^2}{2} = C \text{ - загальний інтеграл.}$$

Відповідь: $\frac{x^3}{3} - \frac{y^2}{2} = C$.

Завдання №2. Проінтегрувати диференціальне рівняння $(x+1)dx + (y-1)dy = 0$.

Розв'язок: Загальний інтеграл даного рівняння має вигляд:

$$\int (x+1)dx - \int (y-1)dy = C.$$

Після інтегрування отримаємо:

$$\frac{x^2}{2}+x+\frac{y^2}{2}-y=C.$$

Відповідь: $\frac{x^2}{2}+x+\frac{y^2}{2}-y=C$.

Завдання №3. Знайти загальний розв'язок рівняння $yy'=x^2$.

Розв'язок: Так як $y'=\frac{dy}{dx}$, маємо рівняння $y\frac{dy}{dx}=x^2 \Rightarrow ydy=x^2dx$ - рівняння з відокремленими змінними, інтегруючи яке, отримаємо

$$\int ydy=\int x^2dx \Rightarrow \frac{y^2}{2}=\frac{x^3}{3}+C \text{ - загальний інтеграл.}$$

Щоб отримати загальний розв'язок вихідного рівняння потрібно із загального інтегралу виразити y:

$$\frac{y^2}{2}=\frac{x^3}{3}+C \Rightarrow y^2=2\left(\frac{x^3}{3}+C\right) \Rightarrow y=\sqrt{2\left(\frac{x^3}{3}+C\right)}.$$

Відповідь: $y=\sqrt{2\left(\frac{x^3}{3}+C\right)}$.

Завдання №4. Проінтегрувати диференціальне рівняння $y'=2x$. Знайти розв'язок, що задовольняє умові: $y=5$, якщо $x=2$.

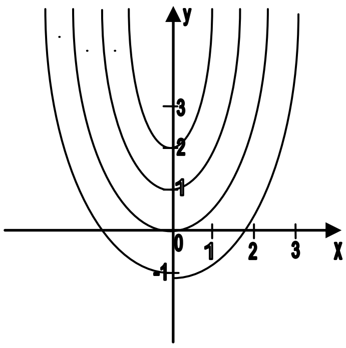
Розв'язок: Дане рівняння, враховуючи що $y'=\frac{dy}{dx}$, можна переписати наступним чином:

$$\frac{dy}{dx}=2x \Rightarrow dy=2xdx.$$

Інтегруючи обидві частини, отримаємо загальний розв'язок:

$$y=x^2+C,$$

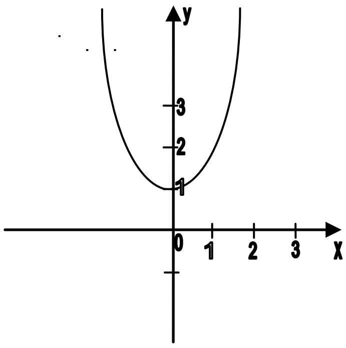
який визначає сімейство парабол, вершини яких належать осі Oy



Знайдемо вказаний частинний розв'язок, для чого визначимо значення параметра С. Підставивши у вираз $y = x^2 + C$ дані початкові умови $x = 2, y = 5$, отримаємо

$$5 = 2^2 + C \Rightarrow C = 1.$$

Отже, шуканий частинний розв'язок визначається формулою $y = x^2 + 1$.



Таким чином, знайдено інтегральну криву, що проходить через т. $M_0(2{,}5)$.

Завдання №5. Знайти частинний розв'язок рівняння $\sin x dx + \dfrac{dy}{\sqrt{y}} = 0$, якщо $y_0 = 3$, при $x_0 = \dfrac{\pi}{2}$.

Розв'язок: Загальний інтеграл даного рівняння є

$$\int \sin x dx + \int \frac{dy}{\sqrt{y}} = C.$$

Після інтегрування отримаємо

$$-\cos x + 2\sqrt{y} = C$$ - загальний інтеграл.

Підставляємо $x = \dfrac{\pi}{2}$, $y = 3$ у загальний інтеграл для знаходження довільної постійної С:

$$-\cos\tfrac{\pi}{2}+2\sqrt{3}=C \Rightarrow C=2\sqrt{3},$$

отже шуканий частинний розв'язок є

$$y=\frac{\left(2\sqrt{3}+\cos x\right)^2}{4}.$$

Відповідь: $y=\dfrac{\left(2\sqrt{3}+\cos x\right)^2}{4}$.

2. Диференціальні рівняння І-го порядку з відокремлюваними змінними

Завдання №6. Знайти загальний розв'язок рівняння $ydx-xdy=0$.

Розв'язок: Для відокремлення змінних розділимо рівняння на xy, отримаємо

$$\frac{ydx}{xy}-\frac{xdy}{xy}=0 \Rightarrow \frac{dx}{x}-\frac{dy}{y}=0$$ - рівняння з розділеними змінними.

Інтегруючи, знаходимо:

$$\int\frac{dx}{x}-\int\frac{dy}{y}=C \Rightarrow \ln|x|-\ln|y|=C \Rightarrow \ln\left|\frac{x}{y}\right|=C.$$

Для спрощення вигляду загального розв'язку довільну зручніше записати в логарифмічному вигляді, тобто $C=\ln|C_1|$, тоді

$$\ln\left|\frac{x}{y}\right|=\ln C_1 \Rightarrow \frac{x}{y}=C_1,$$

$$y=\frac{x}{C_1}$$ - загальний розв'язок.

Відповідь: $y=\dfrac{x}{C_1}$.

Завдання №7. Проінтегрувати диференціальне рівняння і знайти інтегральну криву, що задовольняє умові $y(1)=2$, $\left(1+x^2\right)dy-2xydx=0$.

Розв'язок: Для того, щоб звести дане рівняння до рівняння з відокремленими змінними, розділимо обидві частини на $y\left(1+x^2\right)$:

$$\frac{dy}{y}-\frac{2xdx}{1+x^2}=0.$$

Інтегруємо отримане рівняння:

$$\int\frac{dy}{y}-\int\frac{2xdx}{1+x^2}=C\Rightarrow \ln|y|-\ln\left|1+x^2\right|=C.$$

Для спрощення вигляду загального розв'язку довільну зручніше записати в логарифмічному вигляді $C=\ln|C_1|$.

Тоді загальний інтеграл рівняння матиме вигляд

$$\ln\left|\frac{y}{1+x^2}\right|=\ln|C_1|.$$

Виражаємо y із останньої рівності і отримаємо загальний розв'язок вихідного рівняння

$$y=C_1\left(1+x^2\right).$$

Знайдемо інтегральну криву, що проходить через точку $(1{,}2)$. Для цього підставляємо значення $x=1,\ y=2$ до загального розв'язку і знаходимо відповідне значення C_1:

$$2=C_1(1+1)\Rightarrow C_1=1.$$

Отже, $y=1+x^2$ - шукана інтегральна крива.

Відповідь: $y=1+x^2$.

Завдання №8. Знайти загальний розв'язок рівняння $y'+2xy=0$.

Розв'язок: Враховуючи, що $y'=\dfrac{dy}{dx}$, вихідне рівняння матиме вигляд

$$\frac{dy}{dx}+2xy=0 \text{ або } dy+2xydx=0.$$

Отримано рівняння з відокремлюваними змінними.

Для того, щоб звести його до рівняння з розділеними змінними поділимо обидві частини на y, отримаємо:

$$\frac{dy}{y} + 2xdx = 0.$$

Проінтегруємо отримане рівняння

$$\int \frac{dy}{y} + \int 2xydx = C \Rightarrow \ln|y| + x^2 = C \Rightarrow \ln|y| = C - x^2 \Rightarrow y = e^{C-x^2}.$$

Якщо замінити $e^C = C_1$, отримаємо

$$y = \frac{C_1}{e^{x^2}}.$$

Відповідь: $y = \dfrac{C_1}{e^{x^2}}$.

3. Диференціальні рівняння I-го порядку, що зводяться до рівнянь з відокремлюваними змінними

Завдання №9. Знайти загальний інтеграл рівняння $y' = \cos(y - x)$.

Розв'язок: Маємо рівняння типу $y' = f(ax + by + c)$. Для того, щоб звести дане рівняння до рівняння з відокремлюваними змінними, необхідно зробити заміну

$$z = ax + by + c$$

В нашому випадку

$$z = y - x.$$

Знайдемо $\dfrac{dz}{dx}$

$$\frac{dz}{dx} = \frac{dy}{dx} - 1.$$

Так як $\dfrac{dy}{dx} = \cos(y - x) = \cos z$, то останнє рівняння матиме вигляд

$$\frac{dz}{dx} = \cos z - 1$$ - рівняння з відокремлюваними змінними.

Знайдемо його розв'язок

$$\frac{dz}{dx} = \cos z - 1 \Rightarrow \frac{dz}{\cos z - 1} = dx \Rightarrow \int \frac{dz}{\cos z - 1} = \int dx \Rightarrow ctg\frac{z}{2} = x + C$$

Отже, підставивши в останнє рівняння $z = y - x$, отримаємо загальний інтеграл вихідного рівняння

$$ctg\frac{y - x}{2} = x + C.$$

Відповідь: $ctg\frac{y - x}{2} = x + C$.

Завдання №10. Знайти частинний розв'язок рівняння $y' = (8x + 2y + 1)^2$, що задовольняє умові $y(0) = \frac{1}{2}$.

Розв'язок: Дане рівняння є рівнянням типу $y' = f(ax + by + c)$. Введемо заміну $z = 8x + 2y + 1$, тоді $\frac{dz}{dx} = 8 + 2\frac{dy}{dx}$. Так як $\frac{dy}{dx} = z^2$, останнє рівняння матиме вигляд

$$\frac{dz}{dx} = 8 + 2z^2.$$

Інтегруючи, отримаємо

$$dz = 2(4 + z^2)dx \Rightarrow \frac{dz}{4 + z^2} = 2dx \Rightarrow \int \frac{dz}{4 + z^2} = \int 2dx \Rightarrow \frac{1}{2}arctg\frac{z}{2} = 2x + C.$$

Підставивши $z = 8x + 2y + 1$, маємо

$$\frac{1}{2}arctg\frac{8x + 2y + 1}{2} = 2x + C.$$

Для знаходження частинного розв'язку, в останнє рівняння підставляємо $y = \frac{1}{2}, x = 0$ і знаходимо С

$$\frac{1}{2}arctg1 = C \Rightarrow C = \frac{\pi}{8}.$$

Отже, частинний розв'язок матиме вигляд:

$$8x + 2y + 1 = 2tg\left(2x + \frac{\pi}{8}\right).$$

Відповідь: $y = tg\left(2x + \dfrac{\pi}{8}\right) - 4x - \dfrac{1}{2}$.

Завдання для самостійної роботи

Знайти розв'язок диференціального рівняння:

1. $8(x-1)dx + (y+1)dy = 0$
2. $y = 4xy + y'$
3. $(y+4)dx + (x-5)dy = 0$
4. $y'\sin x = y\ln y$
5. $6dx - \sqrt{3+2x-x^2}\,dy = 0$
6. $\left(1+e^x\right)yy' = e^x$
7. $tgx\sin^2 y\,dx + \cos^2 x\,ctgy\,dy = 0$
8. $xy' - y = y^3$.

Знайти частинний розв'язок диференціального рівняння, що задовольняє початковій умові:

1. $xdx - 2dy = 0, y(3) = 1$
2. $xyy' = 1 - x^2, y(0) = 0$
3. $ydx + (x-3)dy = 0, y(2) = -6$
4. $y'\sin x = y\ln y, y\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = 1$
5. $y'ctgx + y = 2, y(0) = 1$
6. $y' = e^{x^2}x\left(1+y^2\right), y(0) = 0$
7. $\left(1+e^x\right)yy' = e^y, y(0) = 0$
8. $y' = \dfrac{e^{2x}}{\ln y}, y(1) = 1$.

Типові завдання з коментарем

Завдання №1. Знайти загальний інтеграл диференціального рівняння

$$(xy+y)dx + (xy+x)dy = 0.$$

Розв'язок: Дане рівняння є рівнянням з відокремлюваними змінними. Для того, щоб отримати рівняння з відокремленими змінними, розділимо обидві частини вихідного рівняння на xy:

$$\frac{xy+y}{xy}dx + \frac{xy+x}{xy}dy = 0 \Rightarrow \left(1+\frac{1}{x}\right)dx + \left(1+\frac{1}{y}\right)dy = 0.$$

Інтегруючи останнє рівняння, знаходимо загальний інтеграл:

$$\int\left(1+\frac{1}{x}\right)dx+\int\left(1+\frac{1}{y}\right)dy=C_1,$$

$$x+\ln|x|+y+\ln|y|=\ln|C|,$$

$$\ln|xy|+\ln e^{x+y}=\ln|C|\Rightarrow\ln\left|xye^{x+y}\right|=\ln|C|\Rightarrow xye^{x+y}=C.$$

Отже, загальний інтеграл вихідного рівняння матиме вигляд

$$xye^{x+y}=C..$$

Відповідь: $xye^{x+y}=C$.

Завдання №2. Знайти частинний розв'язок рівняння $\left(1+e^{2x}\right)y^2y'=e^x$, що задовольняє початковій умові $y(0)=1$.

Розв'язок: Враховуючи, що $y'=\dfrac{dy}{dx}$, отримаємо

$$\left(1+e^{2x}\right)y^2\frac{dy}{dx}-e^x=0\Rightarrow\left(1+e^{2x}\right)y^2dy-e^xdx=0.$$

Розділимо змінні:

$$y^2dy-\frac{e^x}{1+e^{2x}}dx=0.$$

Інтегруючи останнє рівняння, знаходимо загальний інтеграл

$$\int y^2dy-\int\frac{e^x}{1+e^{2x}}dx=C_1\Rightarrow\frac{y^3}{3}-arctge^x=C_1.$$

Використовуючи початкову умову, визначимо значення довільної постійної:

$$1=\sqrt[3]{C+\frac{3\pi}{4}}\Rightarrow C=1-\frac{3\pi}{4}.$$

Отже, частинний розв'язок вихідного рівняння має вигляд

$$y=\sqrt[3]{1-\frac{3\pi}{4}+3arctge^x}.$$

Відповідь: $y=\sqrt[3]{1-\dfrac{3\pi}{4}+3arctge^x}$.

Завдання №3. Проінтегрувати диференціальне рівняння $\left(x^2-1\right)y'+2xy^2=0$, та знайти інтегральну криву, що проходить через точку $M_0(0,1)$.

Розв’язок:

Враховуючи, що $y' = \dfrac{dy}{dx}$, отримаємо

$$\left(x^2 - 1\right)\frac{dy}{dx} + 2xy^2 = 0 \Rightarrow \left(x^2 - 1\right)dy + 2xy^2 dx = 0 .$$

Розділимо змінні

$$\frac{dy}{y^2} + \frac{2xdx}{x^2 - 1} = 0 .$$

Інтегруючи обидві частини отриманого рівняння,

$$\int \frac{dy}{y^2} + \int \frac{2xdx}{x^2 - 1} = C$$

знаходимо загальний інтеграл

$$-\frac{1}{y} + \ln\left|x^2 - 1\right| = C$$

Для знаходження інтегральної кривої, що проходить через т. $M_0(0,1)$ потрібно знайти С. Для цього у загальний інтеграл підставляємо $x = 0, y = 0$, отримаємо

$$-1 + \ln 1 = C \Rightarrow C = -1 .$$

Отже, шукана інтегральна крива матиме вигляд

$$-\frac{1}{y} + \ln\left|x^2 - 1\right| = -1 \Rightarrow y = \frac{1}{1 + \ln\left|x^2 - 1\right|}$$

Відповідь: $y = \dfrac{1}{1 + \ln\left|x^2 - 1\right|}$.

Завдання №4. Знайти загальний розв’язок диференціального рівняння $y' - y = 2x - 3$.

Розв’язок: Запишемо рівняння у вигляді

$$\frac{dy}{dx} = y + 2x - 3.$$

Для того, щоб звести дане рівняння до рівняння з відокремлюваними змінними, зробимо заміну $z = y + 2x - 3$. Знайдемо $\dfrac{dz}{dx}$

$$\frac{dz}{dx} = \frac{dy}{dx} + 2.$$

Так як $\frac{dy}{dx} = y + 2x - 3 = z$, отримаємо

$$\frac{dz}{dx} = z + 2 \Rightarrow dz = (z+2)dx \Rightarrow \frac{dz}{z+2} = dx.$$

Інтегруємо останнє рівняння

$$\int \frac{dz}{z+2} = \int dx \Rightarrow \ln|z+2| = x + C_1 \Rightarrow z + 2 = Ce^x.$$

Робимо зворотну заміну $z = y + 2x - 3$, одержимо

$$y + 2x - 3 + 2 = Ce^x \Rightarrow y = 1 - 2x + Ce^x.$$

Відповідь: $y = 1 - 2x + Ce^x$.

Практичне заняття №2

Тема: Однорідні диференціальні рівняння 1-го порядку.

План.

1. Однорідні диференціальні рівняння I-го порядку.

2. Диференціальні рівняння типу $y' = f\left(\dfrac{a_1x + b_1y + c_1}{a_2x + b_2y + c_2}\right)$, що зводяться до однорідних.

Мета: Навчитися знаходити розв'язки однорідних рівнянь та рівнянь, що до них зводяться.

1. Однорідні диференціальні рівняння I-го порядку

Завдання №1. Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння $y' = \dfrac{\sqrt{x^2 + y^2}}{x} + \dfrac{y}{x}$.

Розв'язок: Перевіримо функцію $f(x, y) = \dfrac{\sqrt{x^2 + y^2}}{x} + \dfrac{y}{x}$, що стоїть у правій частині рівняння, на однорідність

$$f(\lambda x, \lambda y) = \frac{\sqrt{(\lambda x)^2 + (\lambda y)^2}}{(\lambda x)^2} + \frac{\lambda y}{\lambda x} = \frac{\lambda\sqrt{x^2 + y^2}}{\lambda x} + \frac{y}{x} = f(x, y),$$

тобто виконується умова $f(\lambda x, \lambda y) = f(x, y)$, отже, функція $f(x, y)$ є однорідною нульового виміру, а вихідне диференціальне рівняння є однорідним.

Розв'язок даного рівняння знаходимо за допомогою підстановки

$$\boxed{t = \frac{y}{x}}.$$

Оскільки $t = \dfrac{y}{x} \Rightarrow y = tx$, то $y' = t'x + t$. Підставимо заміну у вихідне рівняння, отримаємо

$$t'x + t = \frac{\sqrt{x^2 + t^2x^2}}{x} + t \Rightarrow t'x = \sqrt{1 + t^2} \Rightarrow x\frac{dt}{dx} = \sqrt{1 + t^2}.$$

Отримали рівняння з відокремлюваними змінними. Знаходимо його розв'язок

$$x\frac{dt}{dx}=\sqrt{1+t^2}\Rightarrow\frac{dt}{\sqrt{1+t^2}}=\frac{dx}{x}\Rightarrow\int\frac{dt}{\sqrt{1+t^2}}=\int\frac{dx}{x}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow arctgt=\ln|x|+\ln|C|\Rightarrow arctgt=\ln|xC|\Rightarrow t=tg(\ln|xC|).$$

В останнє отримане рівняння підставимо заміну

$$\frac{y}{x}=tg(\ln|xC|)\Rightarrow y=xtg(\ln|xC|).$$

Відповідь: $y=xtg(\ln|xC|)$.

Завдання №2. Проінтегрувати диференціальне рівняння $y'=\dfrac{y-x}{x+y}$.

Розв'язок: Дане рівняння є однорідним, так як $f(\lambda x,\lambda y)=\dfrac{\lambda y-\lambda x}{\lambda x+\lambda y}=\dfrac{\lambda(y-x)}{\lambda(x+y)}=f(x,y)$, яке після введення заміни $y=tx, y'=t'x+t$ можна звести до диференціального рівняння з відокремлюваними змінними.

Підставляємо заміну у вихідне рівняння

$$t'x+t=\frac{tx-x}{x+tx}\Rightarrow t'x+t=\frac{t-1}{1+t}\Rightarrow t'x=\frac{t-1}{1+t}-t\Rightarrow x\frac{dt}{dx}=\frac{-u^2-1}{u+1}.$$

Отримали рівняння з відокремлюваними змінними, розв'язок якого має вигляд

$$\frac{u+1}{u^2+1}du=-\frac{dx}{x}\Rightarrow\int\frac{u+1}{u^2+1}du=-\int\frac{dx}{x}\Rightarrow\frac{1}{2}\int\frac{2udu}{u^2+1}+\int\frac{du}{u^2+1}=-\ln|x|+\ln|C|\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\frac{1}{2}\ln(u^2+1)+arctgu=\ln\left|\frac{C}{x}\right|\Rightarrow arctgu=\ln\left|\frac{C}{x\sqrt{u^2+1}}\right|.$$

Робимо зворотну заміну і знаходимо загальний інтеграл вихідного рівняння

$$arctg\frac{y}{x}=\ln\frac{|C|}{\sqrt{x^2+y^2}}.$$

Відповідь: $arctg\dfrac{y}{x}=\ln\dfrac{|C|}{\sqrt{x^2+y^2}}$.

Завдання №3. Знайти частинний розв'язок диференціального рівняння $2x^2 y' = x^2 + y^2$, що задовольняє початковій умові $y(1) = 0$.

Розв'язок: Маємо рівняння виду $y' = \dfrac{x^2 + y^2}{2x^2}$, яке є однорідним нульового виміру, так як $f(\lambda x, \lambda y) = \dfrac{(\lambda x)^2 + (\lambda y)^2}{2(\lambda x)^2} = \dfrac{\lambda^2 (x^2 + y^2)}{2\lambda^2 x^2} = f(x, y)$. Зробимо заміну $y = tx, y' = t'x + t$ і підставимо її у рівняння $y' = \dfrac{x^2 + y^2}{2x^2}$

$$t'x + t = \frac{x^2 + (tx)^2}{2x^2} \Rightarrow 2t'x + 2t = 1 + t^2 \Rightarrow \frac{dt}{dx} + 2t = 1 + t^2 \Rightarrow 2xdt = (1 + t^2 - 2t)dx.$$

Розділяючи змінні, знаходимо

$$\frac{dt}{(t^2 - 2t + 1)} = \frac{dx}{2x} \Rightarrow$$

$$\int \frac{dt}{(t^2 - 2t + 1)} = \int \frac{dx}{2x} \Rightarrow \int \frac{dt}{(t-1)^2} = \frac{1}{2} \ln x \Rightarrow -\frac{1}{-1} = \frac{1}{2} \ln|x| + \ln C \Rightarrow 1 = (1 - y) \ln\left(C\sqrt{|x|}\right).$$

В останній вираз замість t підставляємо $\dfrac{y}{x}$, отримаємо

$$1 = \left(1 - \frac{y}{x}\right) \ln\left(C\sqrt{|x|}\right) \Rightarrow x = (x - y) \ln\left(C\sqrt{|x|}\right) \Rightarrow y = x - \frac{x}{\ln\left(C\sqrt{|x|}\right)}.$$

Отже, загальний розв'язок вихідного рівняння має вигляд

$$y = x - \frac{x}{\ln\left(C\sqrt{|x|}\right)}.$$

Підставляємо у загальний розв'язок дану початкову умову $y(1) = 0$ і знаходимо значення сталої C

$$0 = 1 - \frac{1}{\ln C} \Rightarrow \ln C = 1 \Rightarrow C = e.$$

Тоді частинний розв'язок вихідного рівняння має вигляд

$$y = x - \frac{x}{1 + \ln\sqrt{|x|}}.$$

Відповідь: $y = x - \dfrac{x}{1 + \ln\sqrt{|x|}}$.

2. Диференціальні рівняння типу $y' = f\left(\dfrac{a_1x + b_1y + c_1}{a_2x + b_2y + c_2}\right)$, що зводяться до однорідних.

Завдання №4. Проінтегрувати диференціальне рівняння $(x + y - 4)y' = 2x + y + 3$.

Розв'язок: Перетворимо рівняння до вигляду

$$y' = \frac{2x + y + 3}{x + y - 4}.$$

Знайдемо визначник $\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1$.

Так як $\Delta \neq 0$, то рівняння можна звести до однорідного за допомогою перетворення

$$\boxed{x = x_1 + m, y = y_1 + k}.$$

Оскільки $dx = dx_1, dy = dy_1$, то $y' = \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{dy_1}{dx_1}$ і вихідне рівняння матиме вигляд

$$\frac{dy_1}{dx_1} = \frac{2x_1 + y_1 + (2m + k + 3)}{x_1 + y_1 + (m + k - 4)}.$$

Сталі m і k вибираємо так, щоб виконувалися рівності

$$\begin{cases} 2m + k + 3 = 0 \\ m + k - 4 = 0 \end{cases}.$$

Розв'язуючи дану систему, знаходимо значення $m = -7, k = 11$. Таким чином, заміною змінних $x = x_1 - 7$, $y = y_1 + 11$ вихідне рівняння зводимо до однорідного

$$\frac{dy_1}{dx_1} = \frac{2x_1 + y_1}{x_1 + y_1}.$$

Для розв’язку отриманого рівняння використовуємо підстановку $y_1 = tx_1$, $y_1' = t'x_1 + t$, одержимо

$$t'x_1 + t = \frac{2x_1 + tx_1}{x_1 + tx_1} \Rightarrow t'x_1 = \frac{2x_1 + tx_1}{x_1 + tx_1} - t \Rightarrow t'x_1 = \frac{2x_1 - t^2 x_1}{x_1 + tx_1} \Rightarrow t'x_1 = \frac{2 - t^2}{1+t} \Rightarrow x_1 \frac{dt}{dx_1} = \frac{2 - t^2}{1+t}$$

В отриманому рівнянні розділяємо змінні та інтегруємо

$$\frac{dx_1}{x_1} = \frac{1+t}{2-t^2}dt \Rightarrow \int \frac{dx_1}{x_1} = \int \frac{1+t}{2-t^2}dt \Rightarrow \int \frac{dx_1}{x_1} = \int \frac{dt}{2-t^2} - \frac{1}{2}\int \frac{-2tdt}{2-t^2}$$

$$\Rightarrow \ln|x_1| = \frac{1}{2\sqrt{2}}\ln\left|\frac{t+\sqrt{2}}{t-\sqrt{2}}\right| - \frac{1}{2}\ln\left|2-t^2\right| + \ln|C|,$$

звідки $x_1\sqrt{2-t^2} = C\left(\frac{t+\sqrt{2}}{t-\sqrt{2}}\right)^{\frac{1}{2\sqrt{2}}}$.

Підставляємо в отриманий загальний інтеграл вираз $t = \frac{y_1}{x_1} = \frac{y-11}{x+7}$ і знаходимо загальний інтеграл вихідного рівняння

$$(x+7)\sqrt{2-\left(\frac{y-11}{x+7}\right)^2} = C\left(\frac{\frac{y-11}{x+7}+\sqrt{2}}{\frac{y-11}{x+7}-\sqrt{2}}\right)^{\frac{1}{2\sqrt{2}}}.$$

Після піднесення до квадрату обох частин останньої рівності, отримаємо простіший вигляд загального інтеграла

$$(x+7)^2\left(2-\left(\frac{y-11}{x+7}\right)^2\right) = C^2\left(\frac{y+\sqrt{2}x+7\sqrt{2}-11}{y-\sqrt{2}x-7\sqrt{2}-11}\right)^{\frac{1}{\sqrt{2}}};$$

$$\left(2(x+7)^2-(y-11)^2\right)\left(y-\sqrt{2}x-7\sqrt{2}-11\right)^{\frac{1}{\sqrt{2}}} = C^2\left(y+\sqrt{2}x+7\sqrt{2}-11\right)^{\frac{1}{\sqrt{2}}}.$$

Відповідь: $\left(2(x+7)^2-(y-11)^2\right)\left(y-\sqrt{2}x-7\sqrt{2}-11\right)^{\frac{1}{\sqrt{2}}} = C^2\left(y+\sqrt{2}x+7\sqrt{2}-11\right)^{\frac{1}{\sqrt{2}}}$.

Завдання для самостійної роботи

Знайти загальний розв’язок диференціального рівняння:

1. $y' = \frac{y^2}{x^2} - 2$

2. $xy' = y \ln \frac{y}{x}$

3. $y' = \frac{x+y}{x-y}$

4. $yy' = 2y - x$

5. $y' = \frac{2xy}{x^2 - y^2}$

6. $\frac{xy' - y}{x} = tg \frac{y}{x}$

7. $y' = \frac{y}{x} + \frac{x}{y}$

8. $y' = \frac{x^2 + xy + y^2}{x^2}$

Проінтегрувати диференціальне рівняння:

1. $y' = \frac{2x + y - 1}{4x + 2y + 3}$

2. $y' = \left(\frac{x - y + 1}{x - y - 1} \right)^2$

3. $y' = \frac{x + y + 3}{3x + 3y + 1}$

4. $y' = \frac{x + y + 1}{x - y - 5}$.

Знайти частинний розв'язок диференціального рівняння:

1. $(xy' - y) arctg\left(\frac{y}{x}\right) = x, y(1) = 0$

2. $(y^2 - 3x^2)dy + 2xydx = 0, y(0) = 1$

3. $\frac{y - xy'}{x + yy'} = 2, y(1) = 1$.

Типові завдання з коментарем

Завдання №1. Знайти загальний інтеграл диференціального рівняння $(y^4 - 2x^3 y)dx + (x^4 - 2xy^3)dy = 0$.

Розв'язок: Перетворимо рівняння до вигляду $y' = f(x, y)$, в нашому випадку

$$y' = \frac{2x^3 y - y^4}{x^4 - 2xy^3}.$$

Перевіримо $f(x, y)$ на однорідність

$$f(\lambda x,\lambda y)=\frac{2\lambda^3x^3\lambda y+\lambda^4y^4}{\lambda^4x^4-2\lambda x\lambda^3y^3}=\frac{2x^3y-y^4}{x^4-2xy^3}=f(x,y),$$

отже, маємо однорідне рівняння, розв'язок якого знаходимо за допомогою підстановки $y=tx, y'=t'x+t$, отримаємо

$$t'x+t=\frac{2x^3tx-t^4x^4}{x^4-2xt^3x^3}=\frac{2t-t^4}{1-2t^3};$$

$$x\frac{dt}{dx}=\frac{2t-t^4}{1-2t^3}-t=\frac{2t-t^4-t+2t^4}{1-2t^3}=\frac{t^4+t}{1-2t^3}.$$

Отримане рівняння з відокремлюваними змінними, зводимо до рівняння з відокремлюваними змінними і інтегруємо

$$x\frac{dt}{dx}=\frac{t^4+t}{1-2t^3}\Rightarrow\frac{dx}{x}=\frac{1-2t^3}{t^4+t}dt\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\int\frac{dx}{x}=\int\left(\frac{1}{t}-\frac{3t^2}{t^3+1}\right)dt\Rightarrow\ln|x|=\ln|t|-\ln|t^3+1|+\ln|C|\Rightarrow x(t^3+1)=Ct.$$

Підставляючи в останню рівність заміну $t=\dfrac{y}{x}$, знайдемо загальний інтеграл

вихідного рівняння

$$x\left(\frac{y^3}{x^3}+1\right)=C\frac{y}{x}\Rightarrow x^3+y^3=Cxy.$$

Відповідь: $x^3+y^3=Cxy$.

Завдання №2. Проінтегрувати диференціальне рівняння $y'=2\left(\dfrac{y+2}{x+y-1}\right)^2$.

Розв'язок: Маємо диференціальне рівняння виду $y'=f\left(\dfrac{a_1x+b_1y+c_1}{a_2x+b_2y+c_2}\right)$.

Знаходимо визначник $\Delta=\begin{vmatrix}a_1 & b_1\\ a_2 & b_2\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}0 & 1\\ 1 & 1\end{vmatrix}=-1\neq 0$, отже, вихідне рівняння

зводиться до однорідного за допомогою заміни $x=x_1+m, y=y_1+k$.

Оскільки $dx=dx_1, dy=dy_1$, то $y'=\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{dy_1}{dx_1}$ і вихідне рівняння і запишеться

у вигляді

$$\frac{dy_1}{dx_1}=2\left(\frac{y_1+(k+2)}{x_1+y_1+(m+k-1)}\right).$$

Сталі m і k вибираємо так, щоб виконувалися рівності

$$\begin{cases} k+2=0 \\ m+k-1=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} k=-2 \\ m=3 \end{cases}.$$

Отже, заміною змінних $x=x_1+3, y=y_1-2$ дане рівняння зводимо до однорідного

$$y_1{}'=\frac{dy_1}{dx_1}=2\left(\frac{y_1-2+2}{x_1+3+y_1-2-1}\right)^2=2\frac{y_1^{\ 2}}{(x_1+y_1)^2}.$$

За допомогою заміни $y_1=tx_1$, отримаємо рівняння з відокремлюваними змінними

$$t'x_1+t=2\frac{t^2x_1^{\ 2}}{(x_1+tx_1)^2}\Rightarrow x_1\frac{dt}{dx_1}=\frac{2t^2}{(1+t)^2}-t\Rightarrow x_1\frac{dt}{dx}=-\frac{t(1+t^2)}{(1+t)^2}.$$

Інтегруючи, отримаємо

$$\int\frac{dx_1}{x_1}=-\int\frac{(1+t)^2\,dt}{t(1+t^2)}\Rightarrow\int\frac{dx_1}{x_1}=-\int\left(\frac{t}{1+t^2}+\frac{2}{1+t^2}+\frac{1}{t(1+t^2)}\right)dt\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ln|x_1|=-\left(\frac{1}{2}\ln\left|1+t^2\right|+2arctgt+\frac{1}{2}\ln\left|\frac{t^2}{1+t^2}\right|\right)+C\Rightarrow\ln|x_1t|=-2arctgt+C.$$

Підставляємо вираз $t=\dfrac{y_1}{x_1}=\dfrac{y+2}{x-3}$ і отримуємо

$$\ln\left|x_1\frac{y_1}{x_1}\right|=-2arctg\frac{y_1}{x}+C\Rightarrow y+2=Ce^{-2arctg\frac{y+2}{x-3}}.$$

Відповідь: $y=Ce^{-2arctg\frac{y+2}{x-3}}-2$.

Практичне заняття №3.

Тема: Лінійні диференціальні рівняння 1-порядку. Рівняння Бернуллі.

План.

1. Лінійні диференціальні рівняння І-го порядку.

2. Рівняння Бернуллі.

Мета: Навчитися розв'язувати лінійні диференціальні рівняння 1-го порядку та рівняння Бернуллі.

1. Лінійні диференціальні рівняння І-го порядку

Завдання №1. Розв'язати рівняння $y' - y = \sin x$.

Розв'язок: Нагадаємо, що лінійне диференціальне рівняння має вигляд $y' + p(x)y = f(x)$. У даному рівнянні $p(x) = -1, f(x) = \sin x$. Будемо шукати розв'язок у вигляді добутку двох функцій $y(x) = u(x) \cdot v(x)$, тоді $y' = u'v + uv'$. Підставляємо y і y' у вихідне рівняння, отримуємо

$$u'v + uv' - uv = \sin x,$$
$$u'v + u(v' + v) = \sin x.$$

Оскільки підстановка $y(x) = u(x) \cdot v(x)$ приводить до двох невідомих функцій $u(x)$ і $v(x)$, то одну з них можна вибрати довільно. Виберемо функцію $v(x)$ таким чином, щоб мала місце наступна система:

$$\begin{cases} v' - v = 0 \\ u'v = \sin x \end{cases}.$$

Знайдемо розв'язок рівняння $v' - v = 0$, яке є рівнянням з відокремлюваними змінними

$$\frac{dv}{dx} - v = 0 \Rightarrow \frac{dv}{v} = dx \Rightarrow \int \frac{dv}{v} = \int dx \Rightarrow \ln v = x + C_2 \Rightarrow v = e^x \cdot c_1.$$

Візьмемо $C_1 = 1$, тоді $v = e^x$.

Підставляємо v у друге рівняння системи, одержуємо

$$u'\cdot e^{x}=\sin x\Rightarrow \frac{du}{dx}=e^{-x}\cdot\sin x\Rightarrow du=e^{-x}\cdot\sin xdx\Rightarrow u=\int e^{-x}\cdot\sin xdx+C.$$

Знайдемо інтеграл, інтегруючи двічі частинами

$$\int e^{-x}\cdot\sin xdx=\begin{vmatrix} e^{-x}=u \\ \sin xdx=dv \\ du=-e^{-x}dx \\ v=-\cos x\end{vmatrix}=-e^{-x}\cdot\cos x-\int e^{-x}\cdot\cos xdx=\begin{vmatrix} u=e^{-x} \\ du=-e^{-x}dx \\ dv=\cos xdx \\ v=\sin x\end{vmatrix}=$$

$$=-e^{-x}\cdot\cos x-\left(e^{-x}\cdot\sin x+\int e^{-x}\cdot\sin xdx\right)=-e^{-x}\cdot\cos x-e^{-x}\cdot\sin x-\int e^{-x}\cdot\sin xdx.$$

Розв’яжемо рівняння відносно інтегралу:

$$2\int e^{-x}\cdot\sin xdx=-e^{-x}(\cos x+\sin x),$$

$$\int e^{x}\cdot\sin xdx=-\frac{1}{2}e^{-x}(\cos x+\sin x).$$

Підставляємо знайдений інтеграл і отримуємо

$$u=-\frac{1}{2}e^{-x}(\cos x+\sin x)+C.$$

Так як $y=u\cdot v$, то

$$y=\left(-\frac{1}{2}e^{-x}(\cos x+\sin x)+C\right)\cdot e^{x}\Rightarrow y=Ce^{x}-\frac{1}{2}(\cos x+\sin x).$$

Відповідь: $y=Ce^{x}-\frac{1}{2}(\cos x+\sin x).$

Завдання №2. Знайти загальний розв’язок рівняння і інтегральну криву, що задовольняє початковій умові

$$xy'-y=x^{3},\quad y(1)=1{,}5.$$

Розв’язок: Вихідне рівняння є лінійним, тому розв’язок $y(x)$ будемо шукати у вигляді добутку двох функцій $u(x)$ і $v(x)$. Візьмемо $y=u\cdot v$, тоді $y'=u'v+uv'$. Підставляємо функцію $y=u\cdot v$ та її похідну в дане рівняння, отримуємо

$$x(u'v+uv')-uv=x^{3}\Rightarrow xu'v+xuv'-uv=x^{3}\Rightarrow xu'v+u(xv'-v)=x^{3}.$$

Оскільки підстановка $y(x)=u(x)\cdot v(x)$ приводить до двох невідомих функцій $u(x)$ і $v(x)$, то одну з них можна вибрати довільно. Виберемо функцію $v(x)$ таким чином, щоб мала місце наступна система:

$$\begin{cases} xv' - v = 0 \\ xu'v = x^3 \end{cases}.$$

Знайдемо розв’язок першого рівняння системи

$$xv' - v = 0 \Rightarrow x\frac{dv}{dx} - v = 0 \Rightarrow \frac{dv}{v} = \frac{dx}{x} \Rightarrow \ln|v| = \ln|x| + \ln|C_1| \Rightarrow v = C_1 x.$$

Виберемо одну з таких функцій, вважаючи, наприклад $C_1 = 1$. Тоді $v(x) = x$.

Після підстановки функції $v(x) = x$ в друге рівняння одержимо $x^2 u' = x^3$ або $u' = x$, звідки $u = \frac{x^2}{2} + C$. Отже загальний розв’язок рівняння має вигляд:

$$y = uv = \left(\frac{x^2}{2} + C\right)x = \frac{x^3}{2} + Cx.$$

Знайдемо інтегральну криву. Для цього у загальний розв’язок підставляємо значення $x = 1,\ \ y = 1{,}5 = \frac{3}{2}$ і знаходимо відповідне значення C:

$$\frac{3}{2} = \frac{1}{2} + C \cdot 1 \Rightarrow C = \frac{3}{2} - \frac{1}{2} = 1.$$

Отже, $y = \frac{x^3}{2} + x$ - шукана інтегральна крива.

Відповідь: $y = \frac{x^3}{2} + x$.

2. Рівняння Бернуллі

Завдання №3. Знайти загальний розв’язок рівняння $y' - \frac{y}{x} = x^4 y^2$.

Розв’язок: Рівняння $y' - \frac{1}{x}y = x^4 y^2$ - рівняння Бернуллі. Розв’язок даного рівняння будемо шукати у вигляді $y(x) = u(x) \cdot v(x)$, тоді $y' = u'v + uv'$. Підставляємо y і y' у вихідне рівняння, отримаємо:

$$u'v - uv' - \frac{uv}{x} = x^4 u^2 v^2,$$

$$u'v + u\left(v' - \frac{v}{x}\right) = x^4 u^2 v^2.$$

Одержимо систему двох рівнянь з відокремлюваними змінними

$$\begin{cases} v' - \dfrac{v}{x} = 0 \\ u'v = x^4u^2v^2 \end{cases}.$$

Знайдемо розв'язок першого рівняння системи

$$v' - \frac{v}{x} = 0 \Rightarrow \frac{dv}{dx} = \frac{v}{x} \Rightarrow \frac{dv}{v} = \frac{dx}{x} \Rightarrow \ln|v| = \ln|x| + \ln|C_1| \Rightarrow v = C_1x.$$

Виберемо одну з таких функцій, вважаючи, наприклад $C_1 = 1$. Тоді $v(x) = x$. Знаходимо розв'язок другого рівняння, підставивши знайдену функцію $v(x) = x$

$$u'x = x^4u^2x^2 \Rightarrow u' = x^5u^2 \Rightarrow \frac{du}{dx} = x^5u^2 \Rightarrow \frac{du}{u^2} = x^5dx$$

$$\Rightarrow \int\frac{du}{u^2} = \int x^5dx \Rightarrow -\frac{1}{u} = \frac{x^6}{6} + \frac{C}{6} \Rightarrow u = -\frac{6}{x^6 + C}.$$

Загальний розв'язок вихідного рівняння має вигляд

$$y = u(x)v(x) = -\frac{6x}{x^6 + C}.$$

Відповідь: $y = -\dfrac{6x}{x^6 + C}$.

Завдання №4. Знайти частинний розв'язок рівняння $xy' + y = xy^2\ln x$, що задовольняє умові $y(1) = 1$.

Розв'язок: Розділивши вихідне рівняння на x, одержимо рівняння Бернуллі: $y' + \dfrac{y}{x} = y^2\ln x$. Розв'яжемо дане рівняння за допомогою підстановки $y = u \cdot v$, $y' = u'v + uv'$, отримаємо

$$u'v + uv' + \frac{uv}{x} = u^2v^2\ln x \Rightarrow u'v + u\left(v' + \frac{v}{x}\right) = u^2v^2\ln x.$$

Виберемо v таким чином, щоб мала місце наступна система

$$\begin{cases} v' + \dfrac{v}{x} = 0 \\ u'v = u^2v^2\ln x \end{cases}$$

Розв'язок першого рівняння системи має вигляд:

$$v'+\frac{v}{x}=0\Rightarrow\frac{dv}{dx}=-\frac{v}{x}\Rightarrow\frac{dv}{v}=-\frac{dx}{x}\Rightarrow\ln|v|=-\ln|x|+\ln|C_1|\Rightarrow v=\frac{C_1}{x}.$$

Візьмемо $v=\frac{1}{x}$, вважаючи, що $C_1=1$. Підставляємо $v=\frac{1}{x}$ у друге рівняння системи, одержимо

$$u'\frac{1}{x}=u^2\frac{1}{x^2}\ln x\Rightarrow u'=\frac{\ln x}{x}u^2\Rightarrow\frac{du}{dx}=\frac{\ln x}{x}u^2\Rightarrow\frac{du}{u^2}=\frac{\ln x}{x}dx\Rightarrow\int\frac{du}{u^2}=\int\frac{\ln x}{x}dx\Rightarrow$$

$$\Rightarrow-\frac{1}{u}=\frac{\ln^2 x}{2}+\frac{C}{2}\Rightarrow u=-\frac{2}{C+\ln^2 x}.$$

Отже, загальний розв’язок рівняння має вигляд

$$y=uv=-\frac{2}{x\left(C+\ln^2 x\right)}.$$

Для знаходження частинного розв’язку вихідного рівняння, підставляємо у загальний розв’язок $x=1, y=1$ і знаходимо відповідне значення С

$$1=\frac{2}{1(C+0)}\Rightarrow C=2.$$

Отже, частинний розв’язок матиме вигляд

$$y=-\frac{2}{x\left(2+\ln^2 x\right)}.$$

Відповідь: $y=-\dfrac{2}{x\left(2+\ln^2 x\right)}$.

Завдання для самостійної роботи

Знайти загальний розв’язок диференціального рівняння:

1. $y'=e^{2x}-e^x y$
2. $y'-xy=x^3y^2$
3. $y'+\dfrac{y}{x}=-xy^2$
4. $2y'+y=\dfrac{x}{y}$
5. $2xyy'-y^2+x=0$
6. $xy'+y=y^2\ln x$
7. $y'+\dfrac{2y}{x}=x^3$
8. $xy'-2y=2\sin x-x\cos x$.

Знайти частинний розв'язок диференціального рівняння, що задовольняє початковій умові:

1. $xy' - 2y = x, y(1) = 1$
2. $y' - \dfrac{y}{1-x^2} - 1 - x = 0, y(0) = 0$
3. $y' + 3y = e^{2x}y^2, y(0) = 1$
4. $y' - \dfrac{y}{x-3} = \dfrac{y^2}{x-3}, y(1) = -2$.

Типові завдання з коментарем

Завдання №1. Знайти загальний розв'язок рівняння $y' = tgx \cdot y + \cos x$.

Розв'язок: Дане рівняння є лінійним диференціальним рівнянням І-го порядку, яке після підстановки $y(x) = u(x) \cdot v(x)$ можна звести до диференціального рівняння з відокремлюваними змінними:

$$y(x) = u(x) \cdot v(x) \Rightarrow y' = u'v + uv'.$$

Підставимо заміну в початкове рівняння

$$u'v + uv' - uvtgx = \cos x,$$
$$u'v + u(v' - vtgx) = \cos x.$$

Виберемо функцію $v(x)$ таким чином, щоб мала місце наступна система

$$\begin{cases} v' - vtgx = 0 \\ u'v = \cos x \end{cases}.$$

Розв'яжемо перше рівняння системи

$$v' - vtgx = 0 \Rightarrow \frac{dv}{dx} = vtgx \Rightarrow \frac{dv}{v} = tgxdx \Rightarrow$$
$$\int \frac{dv}{v} = \int tgxdx \Rightarrow \ln|v| = -\ln|\cos x| + \ln|C_1| \Rightarrow v = \frac{C_1}{\cos x}.$$

Виберемо одну з таких функцій, вважаючи $C_1 = 1$. Тоді $v(x) = \frac{1}{\cos x}$.

Знаходимо розв'язок другого рівняння системи, враховуючи, що $v(x) = \frac{1}{\cos x}$

$$u' \frac{1}{\cos x} = \cos x \Rightarrow u' = \cos^2 x \Rightarrow du = \cos^2 xdx \Rightarrow$$
$$\int du = \int \cos^2 xdx \Rightarrow u = \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}\sin 2x + C.$$

Отже, загальний розв'язок матиме вигляд

$$y = u(x)v(x) = \left(\frac{1}{2}x + \frac{1}{4}\sin 2x + C\right)\frac{1}{\cos x}.$$

Відповідь: $y = \left(\frac{1}{2}x + \frac{1}{4}\sin 2x + C\right)\frac{1}{\cos x}$.

Завдання №2. Знайти загальний розв'язок рівняння $y' + 2e^x y = 2e^x \sqrt{y}$.

Розв'язок: Дане рівняння є рівнянням Бернуллі, тому розв'язок $y(x)$ будемо шукати у вигляді добутку двох функцій $u(x)$ і $v(x)$. Візьмемо $y = u \cdot v$, тоді $y' = u'v + uv'$. Підставляємо заміну в початкове рівняння, отримуємо

$$u'v + uv' + 2e^x uv = 2e^x \sqrt{uv},$$
$$u'v + u\left(v' + 2e^x v\right) = 2e^x \sqrt{uv}.$$

Виберемо функцію $v(x)$ таким чином, щоб мала місце система

$$\begin{cases} v' + 2e^x v = 0 \\ u'v = 2e^x \sqrt{uv} \end{cases}.$$

Розв'яжемо перше рівняння

$$v' + 2e^x v = 0 \Rightarrow \frac{dv}{dx} = -2e^x v \Rightarrow \frac{dv}{v} = -2e^x dx \Rightarrow v = e^{-2e^x} \cdot C_1.$$

Візьмемо одну з таких функцій, вважаючи, наприклад, $C_1 = 1$, тоді $v(x) = e^{-2e^x}$.

Розв’яжемо друге рівняння системи, враховуючи, що $v = e^{-2e^x}$

$$u'e^{-2e^x} = 2e^x\sqrt{ue^{-2e^x}} \Rightarrow 2e^x\sqrt{u}e^{-e^x} \Rightarrow u'e^{-e^x} = 2e^x\sqrt{u} \Rightarrow \frac{du}{dx}e^{-e^x} = 2e^x\sqrt{u} \Rightarrow \frac{du}{\sqrt{u}} = 2e^x e^{-e^x}dx$$

$$\Rightarrow \int\frac{du}{\sqrt{u}} = \int 2e^x e^{-e^x}dx \Rightarrow 2\sqrt{u} = 2\left(e^{e^x} + C\right) \Rightarrow u = \left(e^{e^x} + C\right)^2.$$

Отже, загальний розв’язок матиме вигляд

$$y = u(x)v(x) = \left(e^{e^x} + C\right)^2 \cdot e^{-2e^x} = \left(1 + Ce^{-e^x}\right)^2.$$

Відповідь: $y = \left(1 + Ce^{-e^x}\right)^2$.

Завдання №3. Проінтегрувати рівняння $y' + ytgx = \dfrac{1}{\cos x}$ і знайти частинний розв’язок, що задовольняє початковій умові $y(\pi) = 1$.

Розв’язок: Зробивши підстановку $y = u \cdot v$, $y' = u'v + uv'$, отримаємо

$$u'v + uv' + uvtgx = \frac{1}{\cos x} \Rightarrow u'v + u(v' + vtgx) = \frac{1}{\cos x}.$$

Маємо систему $\begin{cases} v' + vtgx = 0 \\ u'v = \dfrac{1}{\cos x} \end{cases}$.

Знайдемо розв’язок $v' + vtgx = 0$

$$\frac{dv}{dx} = -vtgx \Rightarrow \frac{dv}{v} = -tgxdx \Rightarrow \int\frac{dv}{v} = \int -tgxdx \Rightarrow \ln|v| = \ln|\cos x| + \ln|C_1| \Rightarrow v = C_1 \cdot \cos x$$
.

Вважаючи $C_1 = 1$, виберемо частинний розв’язок $v = \cos x$. Далі шукаємо розв’язок рівняння $u'v = \dfrac{1}{\cos x}$, де $v = \cos x$

$$u'\cos x = \frac{1}{\cos x} \Rightarrow \frac{du}{dx} = \frac{1}{\cos^2 x} \Rightarrow du = \frac{dx}{\cos^2 x} \Rightarrow \int du = \int\frac{dx}{\cos^2 x} \Rightarrow u = tgx + C.$$

Загальний розв’язок вихідного рівняння

$$y = u(x)v(x) = (tgx + C)\cos x.$$

Для знаходження частинного розв’язку, що задовольняє умові $y(\pi)=1$, потрібно в загальний розв’язок підставити $x=\pi, y=1$ і знайти сталу С:

$$(tg\pi + C)\cos\pi = 1 \Rightarrow (0+C)(-1) \Rightarrow C=-1.$$

Підставивши значення $C=-1$ в загальний розв’язок, отримаємо частинний розв’язок вихідного рівняння:

$$y=(tgx-1)\cos x = \sin x - \cos x.$$

Відповідь: $y=\sin x-\cos x$.

Практичне заняття №4

Тема: Диференціальні рівняння вищих порядків, що допускають зниження порядку.

План.

1. Рівняння типу $y^{(n)} = f(x)$.

2. Рівняння типу $F(x, y', y'') = 0$.

3. Рівняння типу $F(y, y', y'') = 0$.

Мета: Навчитися знаходити загальний і частинний розв'язки рівнянь, що допускають зниження порядку.

1. Рівняння типу $y^{(n)} = f(x)$

Завдання №1. Проінтегрувати диференціальне рівняння $y''' = x + \cos 3x$.

Розв'язок: Дане рівняння має вигляд $y''' = f(x)$. Його загальний розв'язок можна знайти шляхом трикратного послідовного інтегрування. Після першого інтегрування отримаємо:

$$y'' = \int y''' dx = \int (x + \cos 3x) dx = \frac{x^2}{2} + \frac{1}{3}\sin 3x + C_1.$$

Знаходимо y', інтегруючи отриманий вираз:

$$y' = \int y'' dx = \int \left(\frac{x^2}{2} + \frac{1}{3}\sin 3x + C_1 \right) dx = \frac{x^3}{6} - \frac{1}{9}\cos 3x + C_1 x + C_2.$$

Знаходимо загальний розв'язок вихідного рівняння:

$$y = \int y' dx = \int \left(\frac{x^3}{6} - \frac{1}{9}\cos 3x + C_1 x + C_2 \right) dx = \frac{x^4}{24} - \frac{1}{27}\sin 3x + C_1 \frac{x^2}{2} + C_2 x + C_3.$$

Відповідь: $y = \frac{x^4}{24} - \frac{1}{27}\sin 3x + C_1 \frac{x^2}{2} + C_2 x + C_3$.

Завдання №2. Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння $y'' = \frac{1}{x}$.

Розв'язок: Загальний розв'язок даного рівняння знайдемо шляхом послідовного інтегрування

$$y' = \int y'' dx = \int \frac{1}{x} dx = \ln x + C_1$$

$$y = \int y' dx = \int \ln x dx + \int C_1 dx = \left| \begin{matrix} u = \ln x \\ du = \dfrac{dx}{x} \\ dv = dx \\ v = x \end{matrix} \right| = x \ln x - \int x \cdot \frac{dx}{x} + C_1 x = x \ln x - x + C_1 x + C_2$$

Відповідь: $y = x \ln x - x + C_1 x + C_2$.

2. Рівняння типу $F(x, y', y'') = 0$

Завдання №3. Знайти загальний розв'язок рівняння $(1 + x)y'' + y' = 0$.

Розв'язок: Маємо рівняння 2-го типу, що допускає зниження порядку $F(x, y', y'') = 0$, що зводиться до розв'язку двох диференціальних рівнянь першого порядку за допомогою підстановки $y' = p(x), y'' = p'(x) = \dfrac{dp}{dx}$. Отже, вихідне рівняння з використанням підстановки матиме вигляд

$$(1 + x)\frac{dp}{dx} + p = 0.$$

Це рівняння першого порядку (з невідомою функцією p). Помноживши його на dx, отримаємо рівняння з відокремлюваними змінними:

$$(1 + x)dp + pdx = 0 \Rightarrow \frac{dp}{p} + \frac{dx}{1 + x} = 0 \Rightarrow \int \frac{dp}{p} + \int \frac{dx}{1 + x} = C \Rightarrow \ln|p| + \ln|1 + x| = \ln|C_1| \Rightarrow \ln|p(1 + x)|$$

Потенціюємо і отримуємо

$$p(1 + x) = C_1.$$

Тепер знайдемо y, для цього в останнє рівняння підставляємо $p = \dfrac{dy}{dx}$

$$\frac{dy}{dx}(1 + x) = C_1$$

$$dy = \frac{C_1 dx}{1 + x} \Rightarrow \int dy = \int \frac{C_1 dx}{1 + x} \Rightarrow y = C_1 \ln|1 + x| + C_2$$

Отже, загальний розв’язок має вигляд

$$y = C_1 \ln|1 + x| + C_2$$

Відповідь: $y = C_1 \ln|1 + x| + C_2$.

Завдання №4. Знайти частинний розв’язок рівняння $xy'' + y' + x = 0$, що задовольняє умовам $y(0) = 0, y'(0) = 0$.

Розв’язок: Оскільки дане рівняння є рівнянням 2-го типу, що допускає зниження порядку, то за допомогою підстановки $y' = p, y'' = p'$, одержимо

$$xp' + p + x = 0$$

- лінійне рівняння відносно p.

Розв’язок отриманого лінійного рівняння шукаємо у вигляді добутку $p = uv, p' = u'v + uv'$

$$x(u'v + uv') + uv = -x,$$
$$xu'v + xuv' + uv = -x,$$
$$xu'v + u(xv' + v) = -x.$$

Отримаємо систему: $\begin{cases} xv' + v = 0 \\ xu'v = -x \end{cases}$.

1) $xv' + v = 0 \Rightarrow x\dfrac{dv}{dx} = -v \Rightarrow xdv = -vdx \Rightarrow \dfrac{dv}{v} = -\dfrac{dx}{x} \Rightarrow \int \dfrac{dv}{v} = -\int \dfrac{dx}{x}$
$\Rightarrow \ln|v| = -\ln|x| + \ln|C|$

$v = -\dfrac{C}{x}$, при $C = 1$ $v = -\dfrac{1}{x}$.

2) $xu'v = -x$. Підставляємо $v = -\dfrac{1}{x}$, отримаємо

$$xu'\frac{1}{x} = -x \Rightarrow u' = -x \Rightarrow u = \int -xdx + C_1 = -\frac{x^2}{2} + C_1.$$

З огляду на те, що $p = uv$, маємо $p = \dfrac{C_1}{x} - \dfrac{x}{2}$. Знайдемо C_1, вважаючи, що $y' = p = 0$, якщо $x = 0$ (з умови): $0 = C_1 - 0$, тобто $C_1 = 0$. Отже, $p = -\dfrac{x}{2}$.

Так як $p = y' = \dfrac{dy}{dx}$, отримаємо рівняння відносно y:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{2} \Rightarrow y = -\frac{x^2}{4} + C_2 .$$

Згідно умови $y = 0$, якщо $x = 0$, тому $0 = -\dfrac{0}{4} + C_2 \Rightarrow C_2 = 0$. Отже, шуканий частинний розв'язок

$$y = -\frac{1}{4}x^2 .$$

Відповідь: $y = -\dfrac{1}{4}x^2$.

3. Рівняння типу $F(y, y', y'') = 0$

Завдання №5. Розв'язати рівняння $2(y')^2 = (y-1)y''$.

Розв'язок: Дане рівняння не містить x, тобто є рівнянням 3-го типу, що допускає зниження порядку $F(y, y', y'') = 0$, тому введемо нову функцію $p = p(y)$ за формулою $p = y'$, тоді $y'' = p\dfrac{dp}{dy}$ і вихідне рівняння матиме вигляд:

$$2p^2 = (y-1)p\frac{dp}{dy} .$$

Розділимо змінні, отримаємо

$$\frac{dp}{2p} = \frac{dy}{y-1} \Rightarrow \frac{1}{2}\ln|p| = \ln|y-1| + \ln|C_1| \Rightarrow \ln|p| = 2\ln|C_1(y-1)| \Rightarrow \ln|p| = \ln|C_1(y-1)|^2$$
$$\Rightarrow p = C_1^2(y-1)^2$$

Повертаючись до функції y, отримуємо наступне рівняння

$$\frac{dy}{dx} = C_1^2(y-1)^2 .$$

Після розділення змінних, маємо

$$\frac{dy}{(y-1)^2} = C_1^2 dx$$

$$\int (y-1)^{-2}dy = \int C_1^{\;2}dx \Rightarrow -\frac{1}{y-1} = C_1^{\;2}x + C_2 .$$

У підсумку отримуємо загальний розв'язок вихідного рівняння

$$y = 1 - \frac{1}{C_1^{\;2}x + C_2} .$$

Відповідь: $y = 1 - \dfrac{1}{C_1^{\;2}x + C_2}$.

Завдання №6. Знайти розв'язок задачі Коші $y^3 y' y'' + 1 = 0,\ y(1) = 1,\ y'(1) = \sqrt[3]{\dfrac{3}{2}}$.

Розв'язок: Маємо рівняння 2-го порядку, що не містить явно x, тому шляхом заміни $p(y) = y'$ це рівняння можна знизити на одиницю і отримати рівняння 1-го порядку з відокремлюваними змінними. Отже, якщо $p(y) = y',\ y'' = p'(y) = p\dfrac{dp}{dy}$, то вихідне рівняння матиме вигляд:

$$y^3 p^2 \frac{dp}{dy} + 1 = 0 \Rightarrow p^2 dp = -\frac{dy}{y^3} .$$

Інтегруючи, отримаємо

$$\int p^2 dp = -\int y^{-3}dy \Rightarrow \frac{p^3}{3} = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{y} + C_1 \Rightarrow p = \sqrt[3]{\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{y^2} + 3C_1} .$$

З урахуванням того, що $p = y' = \dfrac{dy}{dx}$, останнє рівняння перепишемо у вигляді

$$y' = \sqrt[3]{\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{y^2} + 3C_1} .$$

Перш ніж розв'язати його, знайдемо значення довільної сталої C_1, використовуючи початкові умови $\left(y'(1) = \sqrt[3]{\dfrac{3}{2}}\right)$. Підставивши їх в останнє рівняння, отримаємо

$$\sqrt[3]{\frac{3}{2}} = \sqrt[3]{\frac{3}{2} + 3C_1} \Rightarrow \frac{3}{2} = \frac{3}{2} + 3C_1 \Rightarrow C_1 = 0 .$$

Отже, маємо рівняння $y' = \sqrt[3]{\frac{3}{2} \cdot \frac{1}{y^2}}$, яке розв'язується шляхом відокремлення змінних:

$$y' = \sqrt[3]{\frac{3}{2} \cdot \frac{1}{y^2}} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \sqrt[3]{\frac{3}{2} y^{-2}} \Rightarrow \frac{dy}{\sqrt[3]{\frac{3}{2} y^{-2}}} = dx .$$

Інтегруючи останнє рівняння, одержимо

$$\int \frac{dy}{\sqrt[3]{\frac{3}{2} y^{-2}}} = \int dx \Rightarrow \sqrt[3]{\frac{2}{3}} 3y^{\frac{1}{3}} = x + C_2 \Rightarrow y = \frac{(x + C_2)^3}{18} .$$

З початкової умови $y(1) = 1$ знаходимо C_2

$$1 = \frac{(1 + C_2)^3}{18} \Rightarrow C_2 = \sqrt[3]{18} - 1 .$$

Отже, шуканий частинний розв'язок визначається формулою

$$y = \frac{1}{18}\left(x + \sqrt[3]{18} - 1\right)^3 .$$

Відповідь: $y = \frac{1}{18}\left(x + \sqrt[3]{18} - 1\right)^3$.

Завдання для самостійної роботи

Знайти розв’язок диференціального рівняння:

1. $y''' = x^2 - \sin x$
2. $xy'' = y' \ln \dfrac{y'}{x}$
3. $y'' = \dfrac{1}{x}$
4. $yy'' = y^2 y + y'^2$
5. $(1 + x^2)y'' + y'^2 + 1 = 0$
6. $yy'' + y'^2 = 0$
7. $yy'' - y'(1 + y') = 0$
8. $xy'' + y' = 0$.

Знайти частинний розв’язок диференціального рівняння:

1. $1 + y'^2 = 2yy'', y(1) = y'(1) = 1$
2. $2y'' = 3y^2, y(2) = 1, y'(2) = -1$
3. $xy'' = y', y(0) = y'(0) = 0$
4. $2y'^2 = (y - 1)y'', y(0) = 0, y'(0) = 1$
5. $yy'' + y'^2 = 1, y(0) = y'(0) = 1$
6. $(x + 1)y'' + xy'^2 = y', y(1) = -2,$ $y'(1) = 4$
7. $y'' = \dfrac{\ln x}{x^2}, y(1) = 3, y'(1) = 1$
8. $y'' = e^{2y}, y(0) = 0, y'(0) = 1$.

Типові завдання з коментарем

Завдання №1. Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння

$$y^{(4)} = \frac{8}{(x-3)^5}.$$

Розв'язок: Маємо рівняння виду $y^{(n)} = f(x)$**,** розв'язок якого знаходять шляхом n- кратного інтегрування. Отже, розв'язок даного рівняння знайдемо 4- кратним інтегруванням:

$$y''' = \int y^{(4)} dx = \int \frac{8dx}{(x-3)^5} = -\frac{2}{(x-3)^5} + \overline{C_1}$$

$$y'' = \int y''' dx = \int \left(-\frac{2}{(x-3)^4} + C_1 \right) dx = \frac{2}{3(x-3)^3} + \overline{C_1} x + \overline{C_2}$$

$$y' = \int y'' dx = \int \left(\frac{2}{3(x-3)^3} + \overline{C_1} x + \overline{C_2} \right) dx = -\frac{1}{3(x-3)^2} + \frac{1}{2} \overline{C_1} x^2 + \overline{C_2} x + \overline{C_3}$$

$$y = \int y' dx =$$

$$= \int \left(-\frac{1}{3(x-3)^2} + \frac{1}{2} \overline{C_1} x^2 + \overline{C_2} x + \overline{C_3} \right) dx = \frac{1}{3(x-3)} + \frac{1}{6} \overline{C_1} x^3 + \frac{1}{2} \overline{C_2} x^2 + \overline{C_3} x + \overline{C_4} =$$

$$= \frac{1}{3(x-3)} + C_1 x^3 + C_2 x^2 + C_3 x + C_4.$$

Відповідь: $y = \dfrac{1}{3(x-3)} + C_1 x^3 + C_2 x^2 + C_3 x + C_4$.

Завдання №2. Проінтегрувати рівняння $y'' + 2y' = 0$.

Розв'язок: Маємо рівняння виду $y'' = f(y')$, для розв'язання якого використаємо підстановку $y' = p$. Вихідне рівняння матиме вигляд $p' + 2p = 0$ або $\dfrac{dp}{dx} = -2p$. Отримали рівняння з відокремлюваними змінними

$$\frac{dp}{dx} = -2p \Rightarrow \frac{dp}{p} = -2dx \Rightarrow \int \frac{dp}{p} = \int -2dx \Rightarrow \ln|p| = -2x + C \Rightarrow p = e^{-2x} \cdot \overline{C_1}.$$

Оскільки $p = y' = \dfrac{dy}{dx}$, то

$$\frac{dy}{dx} = e^{-2x} \cdot \overline{C_1} \Rightarrow dy = e^{-2x} \cdot \overline{C_1} dx \Rightarrow \int dy = \int e^{-2x} \cdot \overline{C_1} dx \Rightarrow y = -\frac{1}{2} e^{-2x} \cdot \overline{C_1} + C_2$$

$$\Rightarrow y = e^{-2x} \cdot C_1 + C_2.$$

Отже, загальний розв'язок вихідного рівняння

$$y = e^{-2x} \cdot C_1 + C_2.$$

Відповідь: $y = e^{-2x} \cdot C_1 + C_2$.

Завдання №3. Проінтегрувати диференціальне рівняння $y'' = \dfrac{6}{y^3}$.

Розв'язок: Маємо рівняння 3-го типу, для розв'язання якого використаємо підстановку $y' = p$, тоді

$$y'' = \frac{dy'}{dx} = \frac{dy'}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} = \frac{dp}{dy} p.$$

Підставляємо y' і y'' у вихідне рівняння, отримаємо

$$p\frac{dp}{dy} = \frac{6}{y^3} \Rightarrow pdp = \frac{6dy}{y^3}.$$

Інтегруючи, отримаємо

$$\int pdp = \int \frac{6dy}{y} \Rightarrow \frac{p^2}{2} = -\frac{6}{2y^2} + C_1 \Rightarrow p = \pm\sqrt{C_1 - \frac{6}{y^2}} \Rightarrow p = \frac{\pm\sqrt{C_1 y^2 - 6}}{y}.$$

Оскільки $p = y' = \dfrac{dy}{dx}$, одержимо

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\pm\sqrt{C_1 y^2 - 6}}{y} \Rightarrow \frac{ydy}{\sqrt{C_1 y^2 - 6}} = \pm dx \Rightarrow \frac{C_1 ydy}{\sqrt{C_1 y^2 - 6}} = \pm C_1 dx.$$

$$\Rightarrow \sqrt{C_1 y^2 - 6} = \pm(C_1 x + C_2) \Rightarrow C_1 y^2 - 6 = (C_1 x + C_2)^2.$$

Відповідь: $C_1 y^2 - 6 = (C_1 x + C_2)^2$.

Завдання №4. Знайти загальний розв'язок рівняння $y''(e^x + 1) + y' = 0$.

Розв'язок: Дане рівняння не містить явно x, тобто є рівнянням 2-го типу, що допускає зниження порядку, тому введемо заміну $y' = p(y), y'' = \dfrac{dp}{dx}$.

Підставивши y' і y'' у вихідне рівняння отримаємо диференціальне рівняння 1-го порядку з відокремлюваними змінними

$$\frac{dp}{dx}\left(e^x+1\right)+p=0 \Rightarrow \frac{dp}{p}=-\frac{dx}{e^x+1} \Rightarrow \int\frac{dp}{p}=\int-\frac{dx}{e^x+1}.$$

Шляхом заміни змінної $e^x+1=t$ знаходимо

$$\ln|p|=\ln\left(e^x+1\right)-\ln e^x+\ln C_1 \Rightarrow p=C_1\frac{e^x+1}{e^x}.$$

Враховуючи, що $p=y'=\dfrac{dy}{dx}$, одержимо

$$\frac{dy}{dx}=C_1\frac{e^x+1}{e^x} \Rightarrow dy=C_1\frac{e^x+1}{e^x}dx \Rightarrow \int dy=\int C_1\frac{e^x+1}{e^x}dx \Rightarrow y=C_1\left(x-e^{-x}\right)+C_2$$

.

Відповідь: $y=C_1\left(x-e^{-x}\right)+C_2$.