ВСТУП

«Возможно ли оценить вероятность правильности теории вероятности»

Спостережувані нами події (явища) можна розділити на: достовірні (які обов'язково відбудуться), неможливі (які обов'язково не відбудуться) і випадкові (або відбудуться, або не відбудуться). Кожна випадкова подія є наслідком дії дуже багатьох випадкових причин. Неможливо врахувати вплив на результат всіх цих причин, оскільки кількість їх дуже велика й закони їхньої дії невідомі. Тому теорія ймовірностей не ставить перед собою мету пророкувати, відбудеться одинична подія чи ні - вона просто не в змозі це зробити.

Інша справа, якщо розглядаються випадкові події, що багаторазово спостерігаються при здійсненні тих самих умов, тобто якщо мова йде про масові однорідні випадкові події. Виявляється, що досить велика кількість однорідних випадкових подій незалежно від їхньої конкретної природи підпорядковується певним закономірностям, а саме імовірнісним закономірностям. Установленням цих закономірностей і займається теорія ймовірностей.

Отже, предметом теорії ймовірностей є вивчення імовірнісних закономірностей масових однорідних випадкових подій. Знання закономірностей, яким підпорядковуються масові випадкові події, дозволяє передбачати, як ці події будуть протікати.

Установлення закономірностей, яким підкоряються масові випадкові явища, базується на вивченні методами теорії ймовірностей статистичних даних - результатів спостережень.

Математична статистика розробляє способи визначення числа необхідних випробувань до початку дослідження (планування експерименту), у ході дослідження (послідовний аналіз) і вирішує багато інших завдань. Сучасну математичну статистику визначають як науку про прийняття рішень в умовах невизначеності.

Отже, завдання математичної статистики полягає в створенні методів збору й обробки статистичних даних для одержання наукових і практичних висновків.

Методи теорії ймовірностей широко застосовуються в різних галузях природознавства й техніки: у теорії надійності, теорії масового обслуговування, у теоретичній фізиці, астрономії, теорії стрільби, теорії помилок спостережень, теорії автоматичного керування, загальної теорії зв'язку й у багатьох інших теоретичних і прикладних науках. Теорія ймовірностей служить також для обґрунтування математичної й прикладної статистики, яка у свою чергу використовується при плануванні й організації виробництва, при аналізі технологічних процесів, контролі якості продукції й для багатьох інших цілей.

Коротка історична довідка.

Історія теорії ймовірностей почалася з досліджень азартних ігор ученими Ферма, Паскалем, Бернуллі в 1600 - 1700 роках. Суть їх робіт полягала у введенні понять «випадкова подія», «явище», «імовірність», «математичне сподівання». Наступний етап у розвитку теорії ймовірностей ознаменували вчені Муавр, Лаплас, Пуассон. Ними введене поняття «класичної ймовірності», встановлене правило обчислення ймовірності. Наприкінці XIX - початку XX століть ученими Чебишевим, Марковим, Ляпуновим уточнені поняття випадкової величини, випадкового процесу, побудована теорія граничних теорем. Розквітом теорії ймовірностей вважається 1933 рік, коли Колмогоров заклав основи аксіоматики теорії ймовірностей.

Математична статистика виникла в XVII столітті й розвивалася паралельно з теорією ймовірностей. Подальшому розвитку математична статистика (друга половина XIX - початок XX століття) зобов'язана, у першу чергу, П.Л. Чебишеву, А.А Маркову, А.М. Ляпунову, а також К. Гауссу, А. Кетле, Ф. Гальтону, К. Пірсону та ін. У XX столітті найбільш істотний внесок у математичну статистику був зроблений радянськими математиками (В.І. Романовський, Е.Е. Слуцкий, А.Н. Колмогоров, Н.В. Смірнов), а також англійськими (Стьюдент, Р. Фішер, Е. Пірсон) та американськими (Ю. Нейман, А. Вальд) ученими.

МОДУЛЬ І

ВИПАДКОВІ ПОДІЇ Й ВЕЛИЧИНИ

ТЕМА 1. ОСНОВНІ ПОНЯТТЯ ТЕОРІЇ ЙМОВІРНОСТЕЙ

«Прогноз погоды – теория вероятностей в действии»

1.1 Визначення випадкової події. Види подій

Визначення. *Теорія ймовірностей* – математична наука, що вивчає закономірності масових випадкових явищ.

При науковому дослідженні різних фізичних і технічних задач часто доводиться мати справу з особливого типу явищами, які прийнято називати випадковими.

Визначення. *Випадкове явище* – це таке явище, що при кількаразовому відтворенні того самого випробування протікає щоразу трохи по-іншому.

Як відомо, процес пізнання людиною навколишньої дійсності відбувається через експеримент або випробування. Одним з первинних понять теорії ймовірностей є поняття події.

Визначення. *Подія* – усякий факт, що в результаті випробування може відбутися або не відбутися. *Елементарною подією* називається мінімальний логічно неподільний результат випробування. Складені події можуть бути представлені сумою елементарних подій.

Події бувають трьох видів:

1) *достовірна* – подія, що обов'язково відбудеться при завданні деякого певного комплексу умов (вода при нормальному тиску й температурі 20^0 С рідка), позначається – U;

2) *неможлива* – подія, що напевне не відбудеться (вода при нормальному тиску й температурі -20^0 С тверда), позначається – V;

3) *випадкова* – подія, що або відбудеться, або не відбудеться (випадіння орла при підкиданні монети).

Також події розділяють на:

а) *спільні* – ті події, які в результаті випробування можуть відбутися одночасно;

б) *неспільні* – дані події не можуть відбутися одночасно в одному випробуванні.

Приклад. При досвіді з киданням монети подія A – «з'явився орел» і подія B – «з'явилася решка» неспільні (тобто поява однієї з них виключає появу іншої).

Декілька подій утворюють *повну групу*, якщо в результаті випробування обов'язково з'явиться одна з них.

Приклад. При одному кидку гральної кістки шість елементарних подій A_1 – {випала «одиниця»}, … , A_6 – {випала «шістка»} утворюють повну групу, бо в результаті випробування обов'язково відбудеться тільки одне з них.

1.2 Алгебра подій

Визначення. Подія C називається *сумою (об'єднанням)* A та B, якщо вона відбувається в тому випадку, коли в результаті випробування відбувається хоча б одна з A або B.

Позначення: $C = A \cup B$ $C = A + B$.

Графічно сума подій A та B зображена на рисунку 1.1.

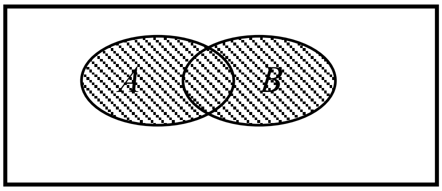

Рис.1.1 Сума подій

Приклад. Нехай подія A – влучення першого стрільця в мішень, подія B – влучення другого стрільця в мішень. Подія C – поразка мішені, тобто хоча б одне влучення по мішені, є сумою подій A та B.

Визначення. Подія D називається *добутком (перетинанням)* подій A та B, якщо вона відбувається в тому випадку, коли в результаті випробування відбуваються обидві події одночасно.

Позначення: $D = A \cap B$ $D = A \cdot B$.

Графічно перетинання подій A та B зображено на рисунку 1.2.

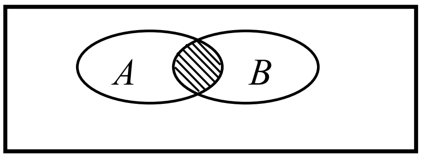

Рис.1.2 Добуток подій

Приклад. Нехай подія A – влучення першого стрільця в мішень, подія B – влучення другого стрільця в мішень. Подія D – влучення обох стрільців, є добутком подій A та B.

Визначення. Подія E називається *різницею* подій A та B, якщо в результаті випробування подія E відбувається тоді й тільки тоді, коли A відбувається, а B - не відбувається.

Позначення: $E = A \backslash B$.

Графічно різниця подій A та B зображена на рисунку 1.3.

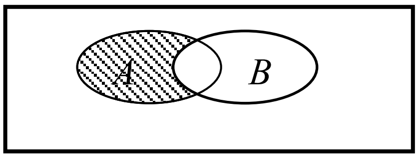

Рис.1.3 Різниця подій

Приклад. Нехай подія A – влучення першого стрільця в мішень, подія B – влучення другого стрільця в мішень. Подія E – влучення першого стрільця й промах другого, є різницею подій A та B.

Визначення. Подія F називається *запереченням* події A, якщо в результаті випробування подія F відбувається тоді й тільки тоді, коли A не відбувається.

Позначення: $F = \bar{A}$.

Графічно заперечення події A зображено на рисунку 1.4.

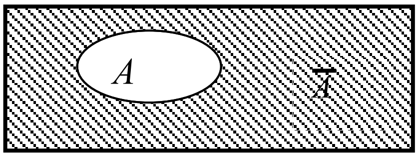

Рис.1.4 Заперечення події

Примітка. Сума події та її заперечення достовірна (1.1). Добуток події з її запереченням неможливий (1.2).

$$A \cup \bar{A} = U \tag{1.1}$$

$$A \cap \bar{A} = V \tag{1.2}$$

Приклад. Нехай подія A – влучення стрільця в мішень, тоді подія $\bar{A}$ – промах стрільця.

1.3 Імовірність події

Існують класичне, геометричне, статистичне й аксіоматичне поняття ймовірності події.

Визначення. *Імовірність* – це кількісна міра ступеня невизначеності в настанні події.

Класичне визначення. *Імовірністю* настання події А називають відношення *P(A)* кількості сприятливих подій до всіх можливих подій, якщо події попарно несумісні й рівноможливі.

$$P(A) = \frac{m}{n} \tag{1.3}$$

Властивості: 1) $P(U) = 1 \quad (m = n)$
2) $P(V) = 0 \quad (m = 0)$
3) $0 < P(A) < 1$

Задача. Кидаються два гральних кубики. Визначити ймовірність того, що сума очок, що випали, дорівнює трьом.

Підрахуємо число можливих результатів, вважаючи окремим елементарним результатом кожну просту можливу комбінацію (наприклад, випадання 1-1, 1-2, …, 6-6)... Очевидно, що таких результатів буде $n = 6*6 = 36$. Підрахуємо тепер число комбінацій, що задовольняють заданій умові. Можливо всього два успішні результати (1-2 і 2-1), тому шукана ймовірність $P(A) = 2/36 = 1/18$.

Обмеженістю класичного визначення є вимога підрахунку всіх можливих результатів (тобто скінченності їхнього числа), а також рівноможливість подій.

Статистичне визначення. Нехай проводиться n випробувань, у результаті яких подія A настає m раз. Величину $\varpi_n(A) = \frac{m}{n}$ будемо називати *відносною частотою* настання події A або *частістю*. Тоді $\lim\limits_{n \to \infty} \varpi_n(A) = P(A)$ називається *ймовірністю* події А.

Статистичне визначення ймовірності є основою в теорії прийняття рішень. На ньому базується прийняття рішень при аналізі даних. Математичною підставою статистичного визначення є закон великих чисел, сформульований і доведений Бернуллі (описаний нижче).

Аксіоматичне визначення. Повну множину подій, які можуть відбутися в результаті випробування, будемо називати *полем подій Ú*. Елементи цього поля – *елементарні події*.

Аксіома 1. Для кожного елемента A_i з поля $Ú$ існує величина $0 \le P(A_i) \le 1$, що належить цьому полю й називається *ймовірністю* цієї події.

Аксіома 2. Імовірність достовірної події дорівнює 1.

Аксіома 3. Якщо події A та B несумісні, то ймовірність їхньої суми дорівнює сумі ймовірностей подій A та B.

Геометричне визначення. Було запропоноване для подолання незастосовності класичного визначення ймовірності для нескінченного числа результатів випробування.

Визначення. *Імовірністю* називається відношення довжини (площі, об'єму) сприятливої області до довжини (площі, об'єму) області можливих значень.

Приклад. Нехай відрізок ℓ - частина відрізка L. На L довільно поставлена точка. Імовірність влучення точки на ℓ пропорційна її довжині й не залежить від розташування ℓ на L. Тоді ця ймовірність дорівнює відношенню довжини відрізка ℓ до довжини відрізка L.

Зауваження. Недоліком є наступний факт. Для класичного визначення справедливі зворотні твердження (наприклад, якщо Р = 0, то A – неможливо), а для геометричного вони не виконуються (наприклад, імовірність влучення точки в точку дорівнює нулю, при цьому дана подія не є неможливою).

1.4 Елементи комбінаторики

Основними поняттями, які почерпнула теорія ймовірностей з комбінаторики, є поняття переставлення, розміщення й сполучення.

Правило добутку. Якщо множини E_1, E_2, …, E_k попарно не перетинаються й містять відповідно n_1, n_2, …, n_k елементів, то число способів вибору по одному елементу з кожної множини дорівнює $n_1 * n_2 * \ldots * n_k$.. Це правило ще називають *основним принципом комбінаторики.*

Визначення. *Переставлення* – це комбінації, що складаються з тих самих n різних елементів, що відрізняються порядком їхнього розташування, кількість яких обчислюється за формулою:

$$P_n = n! \qquad (1.4)$$

Приклад. Скільки тризначних чисел можна скласти із цифр 1, 2, 3?

Оскільки в нашому випадку всі числа складаються з тих самих цифр – 1, 2, 3 і відрізняються лише порядком їхнього розташування, то ми маємо справу з переставленням, і, отже, можна скласти: $P_3 = 3! = 6$ чисел.

Визначення. *Розміщення* – це комбінації, складені з n різних елементів по m елементів, які відрізняються або складом елементів, або їхнім порядком. Кількість розміщень позначається A_n^m й обчислюється за формулою:

$$A_n^m = n(n-1)(n-2)\cdots(n-m+1) \tag{1.5}$$

Приклад. Скільки можна подати сигналів, маючи 6 прапорців різних кольорів, якщо сигналом вважається показ двох прапорців?

У даній задачі ми маємо справу з розміщенням із шести прапорців по два прапорця, тому скористаємося формулою для підрахунку кількості всіх розміщень із 6 елементів по 2: $A_6^2 = 6 \cdot 5 = 30$.

Визначення. *Сполучення* – це комбінації, складені з n елементів по m елементів, які відрізняються хоча б одним елементом. Кількість сполучень позначається C_n^m й обчислюється за формулою:

$$C_n^m = \frac{n!}{m!(n-m)!} \tag{1.6}$$

Приклад. Скількома способами можна взяти 2 деталі з 10?

У цій задачі ми маємо справу зі сполученням, тому скористаємося формулою для підрахунку кількості комбінацій 2-х деталей з 10:

$$C_{10}^2 = \frac{10!}{2!(10-2)!} = 45.$$

Зауваження. Основною різницею між сполученнями й розміщеннями є можливість урахування порядку проходження елементів. Якщо порядок відіграє роль (цифри в числі, букви в слові й т.п.), то використовують розміщення, у протилежному випадку - сполучення.

Питання для самоперевірки

1. Що розуміється у ТЙ під словом «подія»?
2. Яка подія називається випадковою? Наведіть приклади.
3. Яка подія називається достовірною, неможливою? Наведіть приклади.
4. Яка подія називається елементарною, складовою? Наведіть приклади.
5. Що називається простором (полем) елементарних подій? Наведіть приклади.
6. Які події називаються неспільними? Наведіть приклади.
7. Чи є протилежні події неспільними?
8. Що називається повною групою подій? Наведіть приклади.
9. Що називається сумою, добутком, різницею й запереченням подій?
10. Наведіть основні властивості операцій над подіями.
11. Сформулюйте класичне, статистичне й геометричне визначення ймовірності. Наведіть приклади їхнього використання.
12. Сформулюйте основні властивості ймовірності.
13. Сформулюйте комбінаторне правило добутку.
14. Дайте поняття числа переставлень, сполучень і розміщень.

ТЕМА 2. ОСНОВНІ ТЕОРЕМИ ТЕОРІЇ ЙМОВІРНОСТЕЙ

2.1 Теореми додавання ймовірностей

Теорема 1. Імовірність появи однієї з двох несумісних подій дорівнює сумі ймовірностей цих подій.

$$P(A + B) = P(A) + P(B) \tag{2.1}$$

Доведення. Нехай n – загальне число подій, m_1 – число подій, сприятливих події A, m_2 – число подій, сприятливих події B. Число подій, сприятливих або події A, або події B дорівнює $m_1 + m_2$ (через несумісність подій A и B). Тоді $P(A + B) = (m_1 + m_2)/n = m_1/n + m_2/n = P(A) + P(B)$.

Теорема 2. Сума ймовірностей подій $\{A_i\}$, що утворюють повну групу подій, дорівнює одиниці.

Приклад. Листи надходять із трьох міст A, B, C. Імовірність того, що лист прийде з міста A дорівнює 0.7, з міста B – 0.1. Знайти ймовірність того, що лист прийде з міста C.

Події A, B, C – несумісні й утворюють повну групу подій, отже, використовуючи теорему додавання ймовірностей, знаходимо:

$$P(C) = 1 - P(A) - P(B) = 1 - 0.7 - 0.1 = 0.2.$$

Теорема 3. Сума ймовірностей протилежних подій дорівнює одиниці.

$$P(A) + P(\bar{A}) = 1 \tag{2.2}$$

Теорема 4. Імовірність появи однієї із двох сумісних подій дорівнює сумі ймовірностей цих подій мінус імовірність їхньої сумісної появи.

$$P(A + B) = P(A) + P(B) - P(AB) \tag{2.3}$$

Доведення.

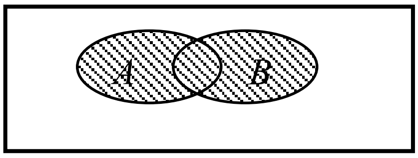

Рис.2.1 Сума двох подій.

З рисунка 2.1 видно, що подія $A + B$ складається із трьох непересічних (тобто несумісних) подій: $A\overline{B}$, $B\overline{A}$ і AB. Подію A можна представити як суму двох непересічних подій: $A\overline{B}$ і AB, подію B – як суму $B\overline{A}$ й AB. Тоді за теоремою додавання ймовірностей несумісних подій отримаємо:

$$P(A + B) = P(A\overline{B}) + P(B\overline{A}) + P(AB) \qquad (2.4)$$

$$P(A) = P(A\overline{B}) + P(AB) \qquad (2.5)$$

$$P(B) = P(B\overline{A}) + P(AB) \qquad (2.6)$$

Підставивши другий і третій вираз в перший, одержуємо остаточну формулу:

$$P(A+B) = P(A) - P(AB) + P(B) - P(B) + P(AB) = P(A) + P(B) - P(AB) \qquad (2.7)$$

Приклад. Імовірність цвітіння троянди дорівнює $p_1 = 0.6$, а хризантеми – $p_2 = 0.9$. Визначити ймовірність того, що хоча б одна квітка розцвіла.

Дані події є сумісними й незалежними. Тому ймовірність їхньої суми знаходимо таким способом:

$$P = p_1 + p_2 - p_1p_2 = 0.9 + 0.6 - 0.9*0.6 = 0.96$$

Зауваження. Якщо необхідно знайти ймовірність «хоча б одного» успіху, доцільно застосовувати теорему 3. Для цього знаходять імовірність протилежної події («жодного» успіху), після чого віднімають її з одиниці, тобто $P(A) = 1 - P(\bar{A})$.

У попередньому прикладі знаходять імовірність «не цвітіння» для кожної квітки $q_1 = 1 - p_1 = 0.4$ і $q_2 = 1 - p_2 = 0.1$ та їхній добуток $P(\bar{A}) = 0.04$. Тоді ймовірність $P(A) = 0.96$.

2.2 Теорема множення ймовірностей

Визначення. *Умовною ймовірністю* $P(A/B)$ будемо називати ймовірність події A, обчислену в припущенні, що подія B вже відбулася.

Визначення. Події A та B називаються *незалежними* тоді й тільки тоді, коли виконується наступна умова: $P(A/B) = P(A)$, тобто подія A не залежить від того, відбулася B чи ні.

Теорема. Імовірність добутку двох подій дорівнює добутку умовної ймовірності однієї з них на безумовну ймовірність іншої події.

$$P(AB) = P(A/B)\,P(B) = P(B/A)\,P(A) \qquad (2.8)$$

Приклад 1. Кидається кубик, подія A – {випадання шістки}, B – {випадання числа, кратного трьом}. Знайти ймовірність A, B, (A/B), (B/A) і з'ясувати, чи є A та B залежними подіями.

Оскільки в даному випробуванні кількість усіляких подій дорівнює шести, а для події A успішним результатом є лише один, то $P(A) = 1/6$; для події B сприятливих результатів два, тобто $P(B) = 1/3$. Умовна ймовірність $P(A/B)$ – імовірність випадання шістки, за умови, що випало число, кратне трьом. За класичним визначенням така умовна ймовірність дорівнює 1/2, а $P(B/A) = 1$. Оскільки $P(A/B) \neq P(A)$, то події A та B залежні.

Наслідок. Якщо $P(A/B) = P(A)$ або $P(B/A) = P(B)$, то $P(AB) = P(A)\,P(B)$.

Приклад 2. Стріляють дві стрільці. Перший стрілець влучає 8 разів з 10 пострілів, другий - 9 разів з 10 пострілів. Визначити, з якою ймовірністю мішень буде поцілена.

Нехай подія A – влучення в мішень першим стрільцем, за класичним визначенням імовірності $P(A) = 8/10$. Подія B – влучення в мішень другим стрільцем, $P(B) = 9/10$. Позначимо через C – мішень буде поцілена, тобто $C = A + B$. Використовуючи теорему 4 і наслідок, знаходимо:

$P(C) = P(A) + P(B) - P(AB) = P(A) + P(B) - P(A)\,P(B) = 0.8 + 0.9 - 0.8*0.9 = 0.98$.

Приклад 3. Знайти виграш у лотерею «5 з 36».

Нехай подія A – виграш. Кількість всіх можливих варіантів - C_{36}^{5}, отже за класичним визначенням ймовірності $P(A) = 1/1\,C_{36}^{5} \approx /300000$.

2.3 Формула повної ймовірності й формула Бейеса

Теорема 1. (Формула повної ймовірності) Нехай $A_1, A_2, \ldots, A_n$ утворюють повну групу подій і нехай подія B відбувається обов'язково з одним з A_i. Тоді ймовірність події B обчислюється за формулою:

$$P(B) = P(B/A_1)P(A_1) + \ldots + P(B/A_n)P(A_n) = \sum_{i=1}^{n} P(B/A_i)P(A_i) \qquad (2.9)$$

Приклад. Є три ящики. У першому ящику 3 білих і 3 чорних кулі, у другому - 5 білих й 1 чорна, у третьому - 1 біла і 5 чорних. Навмання вибираємо ящик і виймаємо з нього кулю. Визначити ймовірність того, що вийнята куля білого кольору.

Оберемо такі позначення: подій: A_i – обраний *і-ий* ящик, B – обрана біла куля. Тоді маємо: $P(A_1) = P(A_2) = P(A_3) = 1/3$, $P(B/A_1) = 3/6$, $P(B/A_2) = 5/6$, $P(B/A_3) = 1/6$. Використовуючи формулу повної ймовірності, одержуємо:

$$P(B) = \frac{3}{6}\cdot\frac{1}{3} + \frac{5}{6}\cdot\frac{1}{3} + \frac{1}{6}\cdot\frac{1}{3} = \frac{1}{2}$$

Теорема 2. (Формула Бейеса) Нехай A_1, A_2, …, A_n утворюють повну групу подій і нехай подія B відбувається обов'язково з одним з A_i. Тоді:

$$P(A_k / B) = \frac{P(B/A_k)P(A_k)}{\sum_{i=1}^{n} P(B/A_i)\cdot P(A_i)} \tag{2.10}$$

Приклад. Візьмемо умову з попереднього прикладу. Якщо вийнята біла куля, то яка ймовірність того, що вона вийнята із третього ящика?

Використовуючи формулу Бейеса, знаходимо:

$$P(A_3 / B) = \frac{P(B/A_3)P(A_3)}{P(B)} = \frac{1/6 * 1/3}{1/2} = \frac{1}{9}.$$

Формула Бейеса дозволяє переоцінити ймовірність гіпотез після того, як стає відомим результат випробування.

Питання для самоперевірки

1. Сформулюйте основні теореми додавання ймовірностей. Наведіть приклади.
2. Доведіть теорему додавання ймовірностей сумісних подій.
3. Що таке умовна ймовірність?
4. Дайте визначення незалежних і залежних подій. Наведіть приклади залежних і незалежних подій.
5. Доведіть незалежність подій $\overline{A}$ і B, якщо A й B - незалежні.
6. Сформулюйте поняття попарно незалежних подій і подій, незалежних у сукупності.
7. Доведіть формулу повної ймовірності. У яких випадках вона застосовується?
8. Доведіть формулу Бейеса. У яких випадках її можна застосовувати?

ТЕМА 3. ВИПРОБУВАННЯ З ПОВТОРЕННЯМИ

3.1 Формули Бернуллі й Пуассона

Теорема. (Формула Бернуллі) Нехай проводиться n незалежних випробувань, результатом кожного з яких можуть бути успіх або невдача. Нехай імовірність успіху в кожному випробуванні однакова й дорівнює p, імовірність невдачі – $q = 1 - p$. Необхідно обчислити ймовірність того, що подія А (успіх) відбудеться рівно m раз. Така ймовірність позначається $P_n^m = P_n(m)$ й обчислюється за формулою:

$$P_n(m) = C_n^m p^m q^{n-m} \tag{3.1}$$

Доведення. Імовірність однієї складної події, яка полягає в тому, що в n випробуваннях буде m успіхів і (n - m) невдач за теоремою множення ймовірностей дорівнює $p^m q^{m-n}$. Таких складних подій може бути стільки, скільки існує сполучень із n елементів по m елементах, тобто C_n^m . Оскільки ці складні події несумісні, то за теоремою додавання ймовірностей несумісних подій $P_n(m) = \sum p^m q^{n-m}$, а оскільки ймовірність $p^m q^{m-n}$ для кожної події однакова, то $P_n(m) = C_n^m p^m q^{n-m}$.

Приклад 1. Імовірність народження хлопчика дорівнює 0.52. Чому дорівнює ймовірність того, що в родині народиться один хлопчик і дві дівчинки?

Маємо n = 3, m = 1, p = 0.52, значить q = 1 - 0.52 = 0.48. За формулою Бернуллі: $P_3^1 = C_3^1 (0.52)^1 (0.48)^2 = 0.36$.

Приклад 2. Монета кидається п'ять разів. Знайти ймовірність того, що герб випаде не більше двох разів.

У даній задачі кількість випробувань n = 5, а кількість випадань герба – $m \le 2$. Нам необхідно знайти суму ймовірностей наступних випадків: «герб не випаде жодного разу» – $P_5(0)$, «герб випаде один раз» – $P_5(1)$, «герб випаде два рази» – $P_5(2)$, тобто:

$$P_5(m \le 2) = P_5(0) + P_5(1) + P_5(2) = C_5^0 \left(\frac{1}{2}\right)^0 \left(\frac{1}{2}\right)^5 + C_5^1 \left(\frac{1}{2}\right)^1 \left(\frac{1}{2}\right)^4 + C_5^2 \left(\frac{1}{2}\right)^2 \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{2}$$

Якщо число випробувань велике, а ймовірність успіху мала, то ймовірність m успіхів в n випробуваннях знаходять за *формулою Пуассона*:

$$P_n(m) = \frac{e^{-\lambda}\lambda^m}{m!}, \quad \lambda = np \qquad (3.2)$$

Якщо для формули Бернуллі (або тим більше Пуассона) побудувати графік залежності $P_n(m)$ від m, то ми помітимо, що ймовірність із ростом m спочатку буде зростати, а потім спадати. Для практики іноді потрібно знати, яке число настання подій є *найбільш ймовірним*. Це число m_0 визначається за формулою:

$$np - q \le m_0 \le np + p \qquad (3.3)$$

3.2 Теореми Муавра-Лапласа

У тому випадку, коли число випробувань і ймовірність успіху в кожному випробуванні великі, замість формули Бернуллі застосовують локальну теорему Лапласа.

Теорема (локальна Лапласа). Якщо ймовірність p появи події A в кожному випробуванні постійна й відмінна від нуля й одиниці, то ймовірність $P_n(k)$ того, що подія A матиме місце в n випробуваннях рівно k разів, приблизно дорівнює (тим точніше, чим більше n) значенню функції:

$$y = \frac{1}{\sqrt{npq}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-x^2/2} = \frac{1}{\sqrt{npq}} \cdot \varphi(x) \qquad (3.4)$$

де $$x = (k - np)\big/\sqrt{npq}$$

Практично в кожній книзі з теорії ймовірностей існують таблиці значень функції $\varphi(x)$, що зветься *функції Гауса*. Крім того $\varphi(-x) = \varphi(x)$, тобто дана функція парна.

Приклад. Знайти ймовірність події A – «рівно 80 успіхів в 400 випробуваннях», якщо в одному випробуванні ймовірність успіху дорівнює 0.2.

Скористаємося формулою Лапласа:

$$P_{400}(80) \approx \frac{1}{\sqrt{400 \cdot 0.2 \cdot 0.8}} \cdot \varphi(x) = \frac{1}{8} \cdot \varphi(x),$$
$$x = (k - np)\Big/\sqrt{npq} = (80 - 400 \cdot 0.2) / 0.8 = 0.$$

За таблицею знаходимо $\cdot\,\varphi(0)$ = 0.3989, тоді $P_{400}(80)$ = 0.3989/8 = 0.04986.

Зауваження. Теорема незастосовна при $n \le 10$.

Теорема (інтегральна Лапласа). Якщо ймовірність p настання події A в кожному випробуванні постійна й не дорівнює нулю й одиниці, то ймовірність $P_n(k_1, k_2)$ того, що подія A матиме місце в n випробуваннях від k_1 до k_2 разів, приблизно дорівнює такому визначеному інтегралу:

$$P_n(k_1, k_2) \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{x'}^{x''} e^{-z^2/2} \, dz \qquad (3.5)$$

де $$x' = \frac{k_1 - np}{\sqrt{npq}}, \qquad x'' = \frac{k_2 - np}{\sqrt{npq}}$$

Цей інтеграл не обчислюється аналітично. Існують таблиці функції $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-z^2/2} \, dz$. Крім того, $\Phi(-x) = -\Phi(x)$ і ця функція зветься *функція Лапласа*. Підставимо її у формулу з теореми й після ряду перетворень одержимо:

$$P_n(k_1, k_2) \approx \Phi(x'') - \Phi(x') \qquad (3.6)$$

Приклад. Імовірність браку деталі дорівнює 0.2. Визначити ймовірність того, що з обраних навмання 400 деталей виявиться бракованих від 70 до 100 штук.

У цьому випадку p = 0.2, $q = 1 - p$ = 1 - 0.2 = 0.8. Скористаємося інтегральною теоремою:

$$P_{400}(70{,}100) \approx \Phi(x'') - \Phi(x')$$
$$x' = \frac{70 - 400 \cdot 0.2}{\sqrt{400 \cdot 0.2 \cdot 0.8}} = -1.25, \quad x'' = \frac{100 - 400 \cdot 0.2}{\sqrt{400 \cdot 0.2 \cdot 0.8}} = 2.5.$$

За таблицею знаходимо Ф(-1.25) = -0.3944, Ф(2.5) = 0.4938, отже:

$P_{400}(70{,}100) \approx$ 0.4938 - (-0.3944) = 0.8882.

Питання для самоперевірки

1. При яких умовах використовується формула Бернуллі для обчислення ймовірностей?
2. Дайте визначення найбільш ймовірного числа m_0 появи події при повторних випробуваннях і наведіть правило його обчислення.
3. Виведіть формулу для наближеного обчислення ймовірності, що відповідає найбільш ймовірного числу.
4. При яких умовах використовується теорема Пуассона? Сформулюйте теорему.
5. Чому закон Пуассона називають законом рідких явищ?
6. При яких умовах використовується локальна теорема Мавра - Лапласа? Сформулюйте теорему.
7. При яких умовах використовується інтегральна теорема Мавра - Лапласа? Сформулюйте теорему.
8. Наведіть формулу для функції Лапласа й визначте її властивості.

ТЕМА 4. ВИПАДКОВІ ВЕЛИЧИНИ

4.1 Функція розподілу випадкової величини

Визначення. *Випадковою величиною* називають величину, що в результаті випробування прийме одне й тільки одне можливе значення, наперед невідоме й залежне від випадкових причин, які заздалегідь не можуть бути враховані.

Наприклад, число народжених хлопчиків серед 100 немовлят є випадковою величиною, що може приймати значення 0,1,2, …, 100.

Будемо позначати випадкові величини прописними буквами X, Y, Z, а їхні значення – рядковими: x_i, y_i, z_i.

Випадкова величина буває:

а) *дискретною* – випадкова величина, що може приймати скінченну або нескінченну рахункову множину ізольованих значень із певними ймовірностями;

б) *безперервною* – випадкова величина, що може приймати всі значення зі скінченного або нескінченного інтервалу.

Вважають, що про випадкову величину відомо все, якщо можна перелічити всі значення випадкової величини в експерименті або вказати інтервал її значень, а також перелічити ймовірності, з якими приймається кожне значення або вказати ймовірність влучення випадкової величини в інтервал. Інакше кажучи, необхідно задати закон розподілу випадкової величини. Його можна задати за допомогою таблиці, аналітично (у вигляді формул) і графічно. Дискретну випадкову величину зазвичай задають таблицею, що має такі властивості:

$$\bigcup_{i=1}^{n}\{X = x_i\} = U, \quad \sum_{i=1}^{n} p_i = 1 \tag{4.1}$$

Приклад. Задати закон розподілу числа випадання герба в п'яти киданнях монети.

Позначимо через X випадкову величину, що визначає число випадань герба. Імовірності всіх можливих значень обчислюються за формулою Бернуллі.

$$p_5(0) = C_5^0\left(\frac{1}{2}\right)^0 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^5 = \frac{1}{32}, \qquad p_5(1) = C_5^1\left(\frac{1}{2}\right)^1 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{5}{32},$$

$$p_5(2) = C_5^2\left(\frac{1}{2}\right)^2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{10}{32}, \qquad p_5(3) = C_5^3\left(\frac{1}{2}\right)^3 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{10}{32},$$

$$p_5(4) = C_5^4\left(\frac{1}{2}\right)^4 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^1 = \frac{5}{32}, \qquad p_5(5) = C_5^5\left(\frac{1}{2}\right)^5 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^0 = \frac{1}{32}.$$

Побудуємо ряд розподілу випадкової величини X:

x_i	0	1	2	3	4	5
p_i	p_0=1/32	p_1=5/32	p_2=5/16	p_3=5/16	p_4=5/32	p_5=1/32

Для наочності закон розподілу дискретної випадкової величини можна зобразити графічно, для чого будують точки (x_i ,p_i) і з'єднують їх відрізками. Отриману фігуру, називають *багатокутником розподілу* (рис. 4.1).

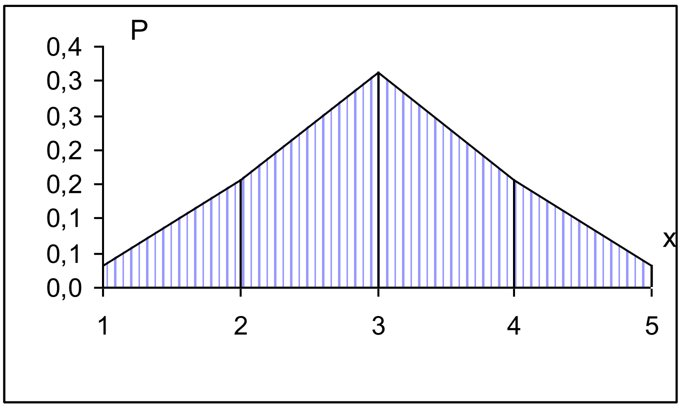

Рис.4.1 Багатокутник розподілу

Для безперервних випадкових величин потрібно вказати область влучення (визначення) випадкової величини й записати закон розподілу ймовірностей влучення випадкової величини в будь-який інтервал цієї множини. Аналітичним вираженням закону розподілу випадкової величини є поняття функції розподілу.

Визначення. *Функцією розподілу ймовірностей* або інтегральною функцією випадкової величини X називається функція $F(x)$, що визначає ймовірність того, що випадкова величина X прийме значення, яке менше аргументу x, тобто:

$$F(x) = P(X < x) \tag{4.2}$$

Визначення (уточнене). *Випадкова величина безперервна*, якщо її функція розподілу безперервна, кусочно - диференційована з безперервною першою похідною.

Властивості функції розподілу:

1) Значення функції розподілу належать відрізку [0,1], тобто $0 \le F(x) \le 1$.

2) Функція розподілу ймовірностей не спадна, тобто $F(x_2) \ge F(x_1)$, якщо $x_2 > x_1$.

Доведення. Нехай $x_2 > x_1$, тоді подію $X < x_2$ можна розбити на несумісні події: а) $X < x_1$ і б) $x_1 < X < x_2$. За теоремою додавання ймовірностей: $P(X < x_2) = P(X < x_1) + P(x_1 < X < x_2)$, звідси маємо: $P(X < x_2) - P(X < x_1) = P(x_1 < X < x_2)$ або $F(x_2) - F(x_1) = P(x_1 < X < x_2)$. Оскільки будь-яка ймовірність більша або дорівнює нулеві, то $F(x_2) \ge F(x_1)$.

Наслідок 1. Імовірність того, що випадкова величина прийме значення, що належить відрізку (a, b), дорівнює приросту функції розподілу на цьому інтервалі: $P(a \le x \le b) = F(b) - F(a)$.

Наслідок 2. Імовірність того, що безперервна випадкова величина прийме одне певне значення, дорівнює нулю.

Наслідок 3. Якщо можливі значення випадкової величини належать інтервалу (a, b), то: 1) $F(x) = 0$ при $x \le a$; 2) $F(x) = 1$ при $x \ge b$.

Наслідок 4. Якщо можливі значення випадкової величини належать дійсній множині, то справедливі такі граничні співвідношення:

$$\lim_{x \to \infty} F(x) = 0, \qquad \lim_{x \to +\infty} F(x) = 1 \tag{4.3}$$

Примітка 1. Поняття функції розподілу поширюється й на дискретні, й на безперервні випадкові величини. Для дискретної випадкової величини X, що може приймати значення $x_1, \cdots, x_n$

$$F(x) = \sum_{x_i < x} P\{X = x_i\} \tag{4.4}$$

Приклад 1. Нехай випадкова величина задана таблицею:

X	1	4	8
P	0.3	0.1	0.6

Знайти функцію розподілу ймовірностей і побудувати її графік.

$$F(x)=\begin{cases} 0 & при \;\; x \le 1 \\ 0.3 & при \;\; 1 < x \le 4 \\ 0.4 & при \;\; 4 < x \le 8 \\ 1 & при \;\; x > 8 \end{cases}$$

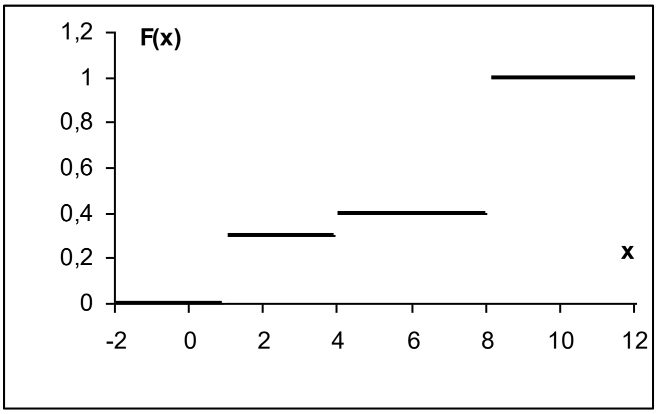

Рис.4.2 Графік функції розподілу

Примітка 2. Нехай випадкова подія A має ймовірність $P(A) = p$. Назвемо *індикатором події A* випадкову величину J_A, що приймає тільки два значення 1 і 0, причому $J_A = 1$ – подія A відбулася, $J_A = 0$ – подія A не відбулася. Тоді індикатором є дискретна випадкова величина з таблицею розподілу:

J_A	1	0
	p	q

де $q = 1 - p$.

4.2 Щільність розподілу випадкової величини

Визначення. *Щільністю розподілу* ймовірностей безперервної випадкової величини X називають функцію $p(x) = F'(x)$.

Визначення. Функція $p(x)$ (або $f(x)$) називається *щільністю розподілу* випадкової величини X, якщо для будь-яких a, b, що належать дійсній множині ($a \le b$), справедлива така рівність:

$$P\{a \le x \le b\} = \int_a^b p(x)dx \tag{4.5}$$

Якщо у випадкової величини існує щільність розподілу $p(x)$, то:

$$F(x) = P\{X < x\} = P\{-\infty \le X < x\} = \int_{-\infty}^{x} p(t)dt \tag{4.6}$$

Лема. Якщо випадкова величина X має щільність розподілу, то ця випадкова величина є безперервною.

Графік щільності розподілу називають *кривою розподілу*.

Властивості щільності розподілу:

1) $p(x) \geq 0$ як похідна неспадної функції.

2) $\int\limits_{-\infty}^{\infty} p(x)dx = 1,$ тому що $p\{-\infty \leq X \leq \infty\} = 1.$ Геометричний зміст – площа криволінійної трапеції, обмеженою віссю Ox і *p(x)*, дорівнює 1 (рис. 4.3).

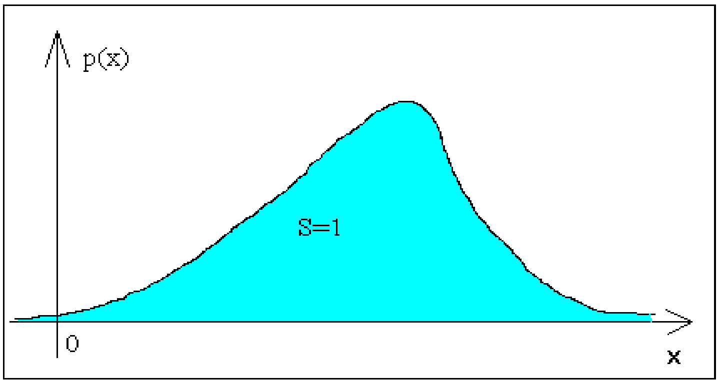

Рис.4.3 Геометричний зміст щільності розподілу

Питання для самоперевірки

1. Що називається випадковою величиною (ВВ)? Наведіть приклади ВВ.
2. Що таке дискретна ВВ? Наведіть приклади.
3. Що називається законом розподілу ВВ і які існують способи його завдання? Наведіть приклади.
4. Дайте поняття багатокутника й кривої розподілу.
5. Що називається функцією розподілу ВВ $F(x)$?
6. Дайте визначення безперервної ВВ.
7. Сформулюйте основні властивості функції розподілу.
8. Як виражається ймовірність влучення ВВ у скінченний інтервал (a; b) через $F(x)$?
9. Що називається щільністю розподілу ймовірностей $f(x)$?
10. Сформулюйте основні властивості щільності розподілу.
11. Як виражається ймовірність влучення безперервної СВ у скінченний інтервал (a; b) через $f(x)$?

ТЕМА 5. ЧИСЛОВІ ХАРАКТЕРИСТИКИ ВИПАДКОВОЇ ВЕЛИЧИНИ

5.1 Математичне сподівання випадкової величини

У багатьох питаннях практики немає необхідності характеризувати випадкову величину повністю, як це роблять закони розподілу. Достатньо зазначити числові характеристики – параметри, що характеризують, як правило, очікуване вірне значення випадкової величини X (міри центральної тенденції або міри положення) і розкид значень випадкової величини щодо центра (міри масштабу або зсуву). Параметрами, що характеризують міру положення, є: математичне сподівання μ (або $M(x)$), мода μ_0 та медіана μ_e.

<u>Визначення.</u> *Модою* називається значення випадкової величини X, для якої щільність розподілу ймовірностей максимальна, тобто $\max\limits_{x} p(x)$ (для безперервних випадкових величин) або в якому випадкова величина має найбільшу ймовірність $\max\limits_{i} p_i$ (для дискретних випадкових величин).

Розподіли з однією модою називаються *одномодальними* (рис. 5.1); вони відіграють найбільш важливу роль у додатках. Якщо ймовірність або щільність ймовірностей досягає максимуму в декількох точках, то такий розподіл називається *полімодальним*. Розподіли, що не мають моди, називаються *антимодальними*.

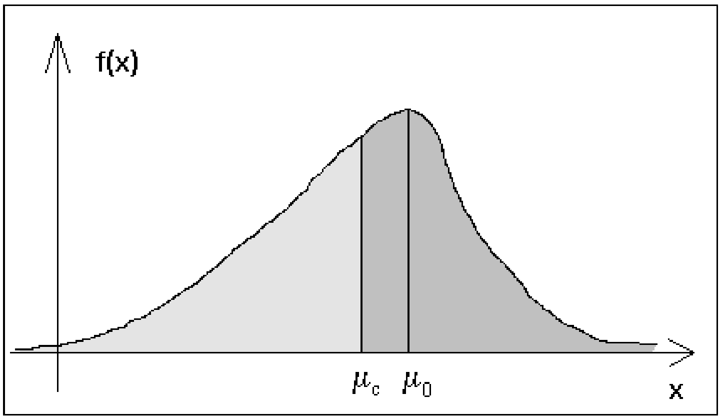

Рис.5.1 Графічне визначення моди та медіани

<u>Визначення</u>. *Медіаною* називається значення випадкової величини X, для якого виконується:

$$P\{X < \mu_e\} = P\{X > \mu_e\} = 1/2 \tag{5.1}$$

Визначення. *Математичним сподіванням* називається зважене за ймовірностями середнє значення випадкової величини X. Воно вводиться окремо для дискретних і безперервних випадкових величин.

1) Для дискретних випадкових величин математичне сподівання обчислюється за формулою:

$$\mu = \sum_{i=1}^{n} x_i p_i\ , \qquad \sum_{i=1}^{n} p_i = 1 \tag{5.2}$$

де x_i, p_i – значення з таблиці розподілу ймовірностей. Іноді математичне сподівання називають просто середнім значенням випадкової величини.

2) Для безперервних випадкових величин математичне сподівання узагальнює формулу для дискретних і обчислюється:

$$\mu = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) dx \tag{5.3}$$

Теорема 1. Математичне сподівання числа появ події в одному випробуванні дорівнює ймовірності цієї події.

Доведення. В одному випробуванні може бути два результати: $x = 0$ з імовірністю q і $x = 1$ з імовірністю p. Тоді $M(x) = 1 \cdot p + 0 \cdot q = p$.

Лема. Математичне сподівання приблизно дорівнює (тим точніше, чим більше випробувань) середньому арифметичному спостережуваних значень випадкової величини.

Властивості математичного сподівання:

1) $M(C) = C$, де C – константа.

Доведення. Нехай C – дискретна випадкова величина з імовірністю $p = 1$. Тоді $M(C) = C \cdot 1 = C$.

2) $M(CX) = C \cdot M(x)$.

Доведення. Нехай випадкова величина X може приймати значення x_1, x_2, … з ймовірностями p_1, p_2, … відповідно. Тоді випадкова величина $C*X$ може приймати значення $C*x_1$, $C*x_2$, … з тими ж ймовірностями p_1, p_2, … ... Математичне сподівання дорівнює:

$$M(C*X) = C*x_1*p_1 + C*x_2*p_2 + \ldots = C*(x_1*p_1 + x_2*p_2 + \ldots) = C*M(X) \tag{5.4}$$

3) Математичне сподівання добутку незалежних випадкових величин дорівнює добутку їхніх математичних сподівань: $M(X*Y) = M(X)*M(Y)$.

4) Математичне сподівання суми випадкових величин дорівнює сумі математичних сподівань доданків: $M(X + Y) = M(X) + M(Y)$.

Наслідок. Властивості 3 і 4 справедливі для будь-якої кількості випадкових величин.

Теорема 2. Математичне сподівання відхилення випадкової величини від свого математичного сподівання дорівнює нулю.

$$M[X - M(X)] = 0 \tag{5.5}$$

Доведення. Для доведення розкриємо дужки й використаємо властивості математичного сподівання, а також той факт, що $M(M(X)) = M(X)$ (оскільки математичне сподівання не є випадковою величиною, це – константа).

$$M[X - M(X)] = M(X) - M(M(X)) = M(X) - M(X) = 0 \tag{5.6}$$

5.2 Дисперсія випадкової величини

Визначення. *Дисперсією* випадкової величини X називається математичне сподівання квадрата відхилення випадкової величини від свого математичного сподівання. Позначається: $Д(X)$, $\sigma^2(X)$.

$$Д(X) = M[X - M(X)]^2 \tag{5.7}$$

Для дискретних випадкових величин дисперсія обчислюється за формулою:

$$Д(X) = \sum_{i=1}^{n} (x_i - M(X))^2 p_i \,, \qquad \sum_{i=1}^{n} p_i = 1 \tag{5.8}$$

де x_i, p_i – значення з таблиці розподілу ймовірностей. Іноді дисперсію називають просто квадратом відхилення випадкової величини.

Для безперервних випадкових величин дисперсія узагальнює формулу для дискретних і обчислюється:

$$Д(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}(x-M(X))^2 f(x)dx \qquad (5.9)$$

Теорема. Дисперсія дорівнює різниці математичного сподівання від квадрата випадкової величини й квадрата математичного сподівання випадкової величини:

$$Д(X)=M(X^2)-[M(X)]^2 \qquad (5.10)$$

Доведення. За визначенням дисперсії, одержуємо:

$Д(X) = M(X - M(X))^2 = M(X^2 - 2M(X)X + M^2(X)) = M(X^2) - 2M(X)M(X) + M^2(X) = M(X^2) - 2M^2(X) + M^2(X) = M(X^2) - [M(X)]^2.$

Властивості дисперсії:

1) Дисперсія константи дорівнює нулю.

$$Д(C) = 0 \qquad (5.11)$$

Доведення. За визначенням дисперсії маємо:

$$Д(C)=M(C-M(C))^2=M(C-C)^2=M(0)=0.$$

2) Константа виноситься з-під знака дисперсії у квадраті.

$$Д(CX) = C^2Д(X) \qquad (5.12)$$

Доведення. За визначенням дисперсії маємо:

$$Д(CX)=M(CX-M(CX))^2=M(CX-CM(X))^2=$$
$$M[C(X-M(X))]^2=C^2Д(CX).$$

3) Дисперсія суми двох і більше незалежних випадкових величин дорівнює сумі їхніх дисперсій.

$$Д(X+Y)=Д(X)+Д(Y) \qquad (5.13)$$

Доведення. Використовуючи теорему, одержуємо:

$$Д(X+Y)=M((X+Y)^2)-[M(X+Y)]^2=M(X^2)+2M(X)M(Y)+M(Y^2)-$$
$$(M(X)+M(Y))^2=M(X^2)+M(Y^2)-[M(X)]^2-[M(Y)]^2=Д(X)+Д(Y)$$

4) Дисперсія різниці двох випадкових величин дорівнює сумі їхніх дисперсій.

$$Д(X-Y)=Д(X)+Д(Y) \tag{5.14}$$

Доведення.

$$Д(X-Y)=Д(X)+Д(-Y)=Д(X)+(-1)^2Д(Y)=Д(X)+Д(Y).$$

Визначення. Середнім квадратичним відхиленням випадкової величини називають квадратний корінь із дисперсії цієї випадкової величини.

$$\sigma(X)=\sqrt{Д(X)} \tag{5.15}$$

Лема. Дисперсія числа появи події *А* в *n* незалежних випробуваннях обчислюється за формулою:

$$Д(X)=npq \tag{5.16}$$

5.3 Моменти випадкової величини

Більш загальними характеристиками випадкової величини є початкові й центральні моменти *k-го* порядку.

Визначення. *Початковим моментом k-го порядку* називають математичне сподівання *k-ого* ступеня випадкової величини:

$$\mu_k=M(X^k)=\sum_{i=1}^{n}x_i^k p_i \tag{5.17}$$

Примітка. Математичне сподівання - це початковий момент 1-го порядку.

Визначення. *Центральним моментом k-го порядку* називають математичне сподівання *k-ої* ступеня відхилення:

$$\nu_k = M\left[(X - M(X))^k\right] \tag{5.18}$$

Для дискретних випадкових величин:

$$\nu_k = \sum_{i=1}^{n}(x_i - \mu)^k p_i \tag{5.19}$$

Примітка.

$$\nu_1 = 0; \quad \nu_2 = Д(X) \tag{5.20}$$

Визначення. *Асиметрією* називають відношення третього центрального моменту до куба середнього квадратичного відхилення.

$$S_k = {\nu_3}/{\sigma^3} \tag{5.21}$$

Ця величина характеризує несиметричність розподілу відносно *M*(*X*). Дійсно, у сумі $\nu_3 = \sum_{i=1}^{n}(x_i - M(X))^3 p_i$ або в інтегралі $\nu_3 = \int_{-\infty}^{+\infty}(x - M_x)^3 f(x)dx$ при симетричному відносно *M*(*X*) законі розподілу кожному позитивному доданку відповідає рівний йому по модулю від'ємний доданок, так що вся сума або інтеграл дорівнюють нулю.

Четвертий центральний момент служить для характеристики «крутості», тобто гостровершинності або плосковершинності розподілу. Ця властивість описується за допомогою так званого ексцесу.

Визначення. *Ексцесом* випадкової величини *X* називається величина E_x, що обчислюється за формулою:

$$E_x = {\nu_4}/{\sigma^4} - 3 \tag{5.22}$$

У цій формулі віднімається число 3 так, як і для досить важливого нормального закону розподілу $\nu_4 / \sigma^4 = 3$ й $E_x = 0$. Таким чином, для кривих більш гостровершинних $E_x > 0$, а для менш гостровершинних - $E_x < 0$.

На рисунку 5.2 зображені графіки щільності розподілу ймовірностей двох випадкових величин. При зсуві графіка ліворуч стосовно математичного сподівання асиметрія негативна (графік 1), а праворуч - позитивна (графік 2).

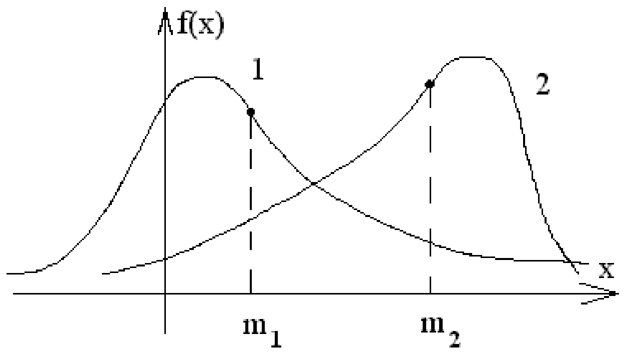

Рис.5.2 Графік кривої розподілу для різних значень асиметрії

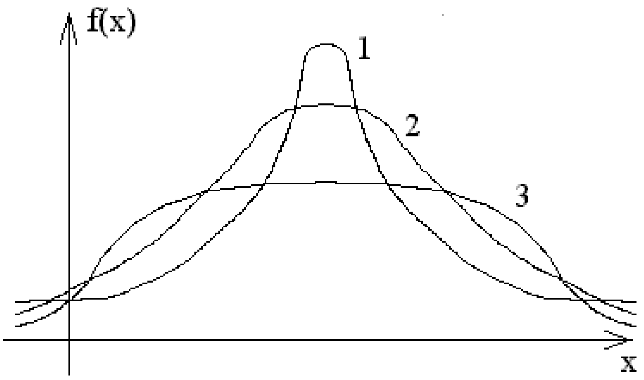

Рис.5.3 Порівняння кривих розподілу для різних значень эксцеса

На рисунку 5.3 представлене порівняння графіків щільності розподілу випадкових величин з нормальною випадковою величиною за допомогою ексцесу. При більш швидкому зростанні ймовірності, ніж у нормального закону (графік 2) величина ексцесу позитивна (графік 1), а при більш повільному - негативна (графік 3). У нормального закону, як в еталонного, величини асиметрії й ексцесу дорівнюють нулю.

Питання для самоперевірки

1. Що називається математичним сподіванням ВВ? Що характеризує МС?
2. Сформулюйте основні властивості МС.
3. Що називається модою й медіаною ВВ?
4. Які розподіли ймовірностей називаються одномодальними, полімодальними й антимодальними?
5. Дайте визначення дисперсії ВВ. Що вона характеризує?
6. Що називається середнім квадратичним відхиленням ВВ?
7. Сформулюйте основні властивості дисперсії.
8. Дайте поняття початкового моменту k -го порядку.
9. Дайте поняття центрального моменту k -го порядку.
10. Вивести співвідношення для μ_2, μ_3 і μ_4 через ν_1, ν_2, ν_3 і ν_4.
11. Що характеризує асиметрія й ексцес ВВ?