

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
ЗАПОРІЗЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
МАТЕМАТИЧНИЙ ФАКУЛЬТЕТ
КАФЕДРА ПРИКЛАДНОЇ МАТЕМАТИКИ І МЕХАНІКИ

ЗАТВЕРДЖУЮ

Декан математичного факультету

С.І. Гоменюк

« 03 » _____ 2018 р.



ВАРІАЦІЙНЕ ЧИСЛЕННЯ

РОБОЧА ПРОГРАМА НАВЧАЛЬНОЇ ДИСЦИПЛІНИ

Підготовки бакалавра

спеціальності 113 Прикладна математика

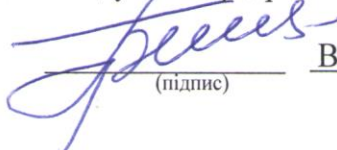
освітньо-професійна програма Прикладна математика

Укладач Швидка Світлана Петрівна, к.ф.-м.н., доцент, доцент кафедри прикладної математики і механіки

Обговорено та ухвалено
на засіданні кафедри
прикладної математики і механіки

Протокол № 2 від 28 серпня 2018 р.

Завідувач кафедри

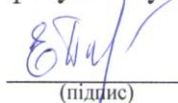


В.З. Грищак
(ініціали, прізвище)

Ухвалено науково-методичною радою
математичного факультету

Протокол № 1 від «03» вересня 2018 р.

Голова науково-методичної ради
факультету



О.С. Пшенична
(ініціали, прізвище)

2018 рік

1. Опис навчальної дисципліни

Найменування показників	Галузь знань, спеціальність, освітня програма, рівень вищої освіти	Характеристика навчальної дисципліни	
		денна форма навчання	заочна форма навчання
Кількість кредитів – 3	Галузь знань 11 Математика та статистика	За вибором ВНЗ	
Розділів – 2	Спеціальність 113 Прикладна математика	Цикл дисциплін професійної підготовки	
Загальна кількість годин – 90		Освітньо-професійна програма Прикладна математика	Рік підготовки: 3-й
	Лекції 16 год.		
Тижневих годин для денної форми навчання: аудиторних – 3 год; самостійної роботи студента – 3,5 год.	Рівень вищої освіти: бакалаврський	Практичні заняття 32 год.	
		Самостійна робота 42 год.	
		Вид підсумкового контролю: залік	

2. Мета та завдання навчальної дисципліни

Метою викладання навчальної дисципліни «Варіаційне числення» є отримання знань про основні типи задач варіаційного числення і методи дослідження функціоналів на екстремум, розширення кругозору студентів щодо використання методів варіаційного числення при дослідженні прикладних задач, а також поглиблення студентами знань з теорії та набуття умінь і навичок застосування математичного апарату з математичного аналізу, диференціальних рівнянь і рівнянь математичної фізики для розв'язання задач варіаційного числення.

Основними завданнями курсу є:

- ознайомлення з основними поняттями та означеннями варіаційного числення;
- ознайомлення з постановками класичних задач варіаційного числення, ідеями та методами їх розв'язання;
- ознайомлення з наближеними методами розв'язання варіаційних задач;
- засвоєння системи математичних знань, необхідних для моделювання задач варіаційного числення;
- набуття навичок і умінь застосування знань з теорії до розв'язання варіаційних задач.

У результаті вивчення дисципліни студент повинен **знати** основні поняття, положення, задачі та методи варіаційного числення в межах тем:

- постановка найпростішої задачі варіаційного числення, рівняння Ейлера та його узагальнення;
- постановка найпростішої варіаційної задачі на множині функцій з рухомими границями, умови трансверсальності;
- ламані екстремалі, умови Вейерштраса-Ердмана;
- достатні умови екстремуму;
- варіаційні задачі на умовний екстремум;
- прямі методи варіаційного числення;

вміти розв'язувати типові задачі за вищезазначеними темами, а саме:

- знаходити екстремалі найпростішої задачі варіаційного числення та узагальненої найпростішої задачі варіаційного числення;
- знаходити екстремалі варіаційної задачі на множині функцій з рухомими границями;
- знаходити ламані екстремалі;
- знаходити екстремалі задачі Лагранжа з неголономними та голономними зв'язками,
- знаходити екстремалі ізопериметричної задачі;
- знаходити екстремалі за допомогою прямих методів варіаційного числення.

Згідно з вимогами освітньо-професійної програми студенти повинні досягти таких **результатів навчання (компетентностей)**:

- здатність розв'язувати складні спеціалізовані задачі та практичні проблеми прикладної математики у професійній діяльності або в процесі навчання, що передбачає застосування математичних теорій та методів і характеризується комплексністю та невизначеністю умов;
- здатність вести дослідницьку діяльність, включаючи аналіз проблем, вибір способу й методів дослідження, а також оцінку якості результатів;
- здатність використовувати й адаптувати математичні теорії, методи та прийоми для доведення математичних тверджень і теорем;
- здатність математично формалізувати постановку завдання;
- здатність обирати та застосовувати математичні методи для розв'язання практичних задач дослідження, моделювання, аналізу, проектування, керування, прогнозування, прийняття рішень.

Міждисциплінарні зв'язки

Для успішного оволодіння дисципліною «Варіаційне числення» студентам необхідні знання з дисциплін циклів фундаментальної та професійної підготовки: «Математичний аналіз» (диференціальне та інтегральне числення функцій однієї змінної та багатьох незалежних змінних); «Диференціальні рівняння» (методи інтегрування диференціальних рівнянь

першого порядку, вищих порядків та систем диференціальних рівнянь); «Рівняння математичної фізики» (методи інтегрування рівнянь у частинних похідних). Теоретичні знання і практичні уміння, отримані при вивченні курсу, можуть бути корисними при написанні курсових робіт та виконанні кваліфікаційної роботи бакалавра.

3. Програма навчальної дисципліни

Розділ 1. Варіаційні задачі пошуку безумовного екстремуму функціонала

Тема 1. Інтегральний функціонал. Окремі випадки рівняння Ейлера.

Інтегральний функціонал. Область визначення функціонала. Близькість кривих. Неперервність та лінійність функціонала. Варіація функціонала. Екстремум функціонала. Слабкий та сильний, відносний та абсолютний екстремум. Основна лема варіаційного числення. Найпростіша задача варіаційного числення. Необхідна умова екстремуму функціонала. Рівняння Ейлера. Екстремаль. Окремі випадки рівняння Ейлера.

Тема 2. Узагальнення найпростішої задачі варіаційного числення.

Функціонали, що залежать від n функцій однієї змінної. Система рівнянь Ейлера. Функціонали, що залежать від похідних вищого порядку. Рівняння Ейлера-Пуассона. Функціонали, що залежать від функцій багатьох змінних. Рівняння Ейлера-Остроградського.

Тема 3. Варіаційні задачі на множині функцій з рухомими границями.

Найпростіша варіаційна задача на множині функцій з рухомими границями. Умови трансверсальності. Окремі випадки умов трансверсальності. Узагальнення найпростішої варіаційної задачі з рухомими границями.

Тема 4. Розривні задачі.

Екстремалі з кутовими точками. Задача про відбиття екстремалей. Задача про заломлення екстремалей. Ламані екстремалі. Умови Вейерштраса-Ердмана. Односторонні варіації.

Тема 5. Достатні умови екстремуму.

Поле екстремалей. Центральне поле екстремалей. Умова Якобі. Функція Вейерштраса Достатні умови Вейерштраса та Лежандра.

Розділ 2. Варіаційні задачі на умовний екстремум. Прямі методи варіаційного числення

Тема 6. Варіаційні задачі на умовний екстремум.

Задача Лагранжа з неголономними та голономними зв'язками та метод її розв'язання. Функція Лагранжа. Множники Лагранжа. Ізопериметрична задача та метод її розв'язання. Принцип подвійності.

Тема 7. Прямі методи варіаційного числення.

Наближений розв'язок. Скінченно-різницевий метод Ейлера. Метод Рітца. Координатні функції. Метод Канторовича. Точність наближеного розв'язку.

4. Структура навчальної дисципліни

Назви тематичних розділів і тем	Кількість годин									
	усього	денна форма				усього	заочна форма			
		у тому числі					у тому числі			
		л	пр.	сам.роб.	І.З.		л	пр.	сам.роб.	І.З.
2	3	4	5	6	7	8	9			
Розділ 1. Варіаційні задачі пошуку безумовного екстремуму функціонала										
Тема 1. Інтегральний функціонал. Окремі випадки рівняння Ейлера	12	2	4	6						
Тема 2. Узагальнення найпростішої задачі варіаційного числення	12	2	4	6						
Тема 3. Варіаційні задачі на множині функцій з рухомими границями	14	2	6	6						
Тема 4. Розривні задачі	12	2	4	6						
Тема 5. Достатні умови екстремуму	12	2	4	6						
Разом за розділом 1	62	10	22	30						
Розділ 2. Варіаційні задачі на умовний екстремум. Прямі методи варіаційного числення										
Тема 6. Варіаційні задачі на умовний екстремум	14	4	4	6						
Тема 7. Прямі методи варіаційного числення	14	2	6	6						
Разом за розділом 2	28	6	10	12						
Усього годин	90	16	32	42						

5. Теми лекційних занять

№ теми з/прогр.	Назва теми	Кількість годин
1	Інтегральний функціонал. Окремі випадки рівняння Ейлера	2
2	Узагальнення найпростішої задачі варіаційного числення	2
3	Варіаційні задачі на множині функцій з рухомими границями	2
4	Розривні задачі	2
5	Достатні умови екстремуму	2
6	Задача Лагранжа з неголономними та голономними зв'язками та метод її розв'язання	2
6	Ізопериметрична задача та метод її розв'язання	2
7	Прямі методи варіаційного числення	2
Разом		16

6. Теми практичних занять

№ теми з/прогр.	Назва теми	Кількість годин
1	Розв'язання найпростішої задачі варіаційного числення	2
1	Окремі випадки рівняння Ейлера	2
2	Функціонали, що залежать від n функцій однієї змінної. Система рівнянь Ейлера	2
2	Функціонали, що залежать від похідних вищого порядку. Рівняння Ейлера-Пуассона. Функціонали, що залежать від функцій багатьох змінних. Рівняння Ейлера-Остроградського	2
3	Розв'язання найпростішої варіаційної задачі на множині функцій з рухомими границями. Умови трансверсальності	4
3	Узагальнення найпростішої варіаційної задачі з рухомими границями	2
4	Ламані екстремалі. Умови Вейерштраса-Ердмана	4
5	Достатні умови Вейерштраса	2
5	Достатні умови Лежандра	2
6	Задача Лагранжа з неголономними та голономними зв'язками та метод її розв'язання	2
6	Ізопериметрична задача та метод її розв'язання	2
7	Скінченно-різницевий метод Ейлера	2
7	Метод Рітца	2
7	Метод Канторовича	2
Разом		32

7. Самостійна робота

№ теми з/прогр.	Назва теми	Кількість годин
1	Варіаційні задачі у параметричній формі. Задача Больца. Умови трансверсальності	6
2	Інваріантність рівнянь Ейлера	6
3	Задача Больца на множині функцій з рухомими границями	6
4	Односторонні варіації	6
5	Канонічна форма рівнянь Ейлера	6
6	Задача Дідони. Закон взаємності ізопериметричних задач	6
7	Застосування метода Канторовича до розв'язання варіаційних задач	6
Разом		42

Індивідуальні завдання

Індивідуальне завдання має комплексний характер і передбачає виконання 5 задач.

Задача 1. – Розв'язати найпростішу задачу варіаційного числення.

Задача 2. – Визначити допустимі екстремалі функціонала, що залежить від n функцій однієї змінної або функціонала, що залежить від похідних вищого порядку.

Задача 3. – Використовуючи умови Вейерштраса та Лежандра, дослідити функціонал на екстремум.

Задача 4. – Відшукати допустимі екстремалі у варіаційній задачі з рухомими границями.

Задача 5. – Розв’язати ізопериметричну задачу.

Розв’язані та детально описані задачі треба оформити в окремому зошиті та захистити на 14-му тижні.

8. Види контролю і система накопичення балів

	Вид контролю	Кількість балів
Розділ 1	1) Самостійна робота за темою 1	7
	2) Самостійна робота за темою 2	7
	3) Контрольна робота за темою 3	16
Разом		30
Розділ 2	4) Контрольна робота за темою 6	17
	5) Самостійна робота за темою 7	8
	6) Колоквіум з питань, що виносяться на самостійне опрацювання	5
Разом		30
Індивідуальне завдання	7) Захист індивідуального завдання	20
Залік		20
Всього за семестр		100

Критерії оцінювання кожного з проведених видів контролю

1) Самостійна робота за темою «Інтегральний функціонал. Окремі випадки рівняння Ейлера» містить теоретичні питання, виконання яких оцінюється у 2,5 бали, та практичні завдання (максимально оцінюються у 4,5 бали).

2) Самостійна робота за темою «Узагальнення найпростішої задачі варіаційного числення» містить 2 практичні завдання, виконання одного оцінюють у 4 бали, а другого – у 3 бали.

3) Контрольна робота передбачає виконання теоретичних та практичних завдань за темою «Варіаційні задачі на множині функцій з рухомими границями». Практичну частину оцінюють у 12 балів, теоретичну – у 4 бали.

4) Контрольна робота за темою «Варіаційні задачі на умовний екстремум» містить 3 практичні завдання (максимальна оцінка їх виконання – 17 балів).

5) Самостійна робота за темою «Прямі методи варіаційного числення» містить 2 практичні завдання, кожне з яких оцінюють у 4 бали.

6) Колоквіум проводять з питань самостійної роботи. Під час колоквіуму заслуховують короткі доповіді з опрацьованих питань, після кожної доповіді обов’язкове обговорення. Максимальна оцінка – 5 балів.

7) Під час захисту індивідуального завдання треба бути готовим пояснити або окремі етапи розв’язання обраних викладачем завдань, або повністю

завдання. Максимальна кількість балів дорівнює 20, по 4 бали за кожне завдання.

Шкала оцінювання: національна та ECTS

ЗА ШКАЛОЮ ECTS	За шкалою університету	За національною шкалою	
		Екзамен	Залік
A	90 – 100 (відмінно)	5 (відмінно)	Зараховано
B	85 – 89 (дуже добре)	4 (добре)	
C	75 – 84 (добре)		
D	70 – 74 (задовільно)	3 (задовільно)	
E	60 – 69 (достатньо)		
FX	35 – 59 (незадовільно – з можливістю повторного складання)	2 (незадовільно)	Не зараховано
F	1 – 34 (незадовільно – з обов'язковим повторним курсом)		

9. Рекомендована література

Основна:


1. Буслаев В. С. Вариационное исчисление. Ленинград: Изд-во Ленинградского университета, 1980. 288 с.
2. Ванько В. И., Ермошина О. В., Кувыркин Г. Н. Вариационное исчисление и оптимальное управление. Москва: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2006. 488 с.
3. Грищак В. З., Швидка С. П. Варіаційне числення: методичні вказівки до практичних і лабораторних занять. Запоріжжя: ЗНУ, 2007. 52 с.
4. Карташов А. П., Рождественский Б. Л. Обыкновенные дифференциальные уравнения и основы вариационного исчисления. Москва: Наука, 1986. 238с.
5. Краснов М. Л., Макаренко Г. И., Киселев А. И. Вариационное исчисление: задачи и упражнения. Москва: Наука, 1973. 190 с.
6. Моклячук М. П. Варіаційне числення: екстремальні задачі. Київ: Либідь, 1994. 328 с.
7. Моклячук М. П. Збірник задач з варіаційного числення та методів оптимізації. Київ: ВПЦ «Київський університет», 2014. 255 с.
8. Эльсгольц Л. Э. Дифференциальные уравнения и вариационное исчисление. Москва: Наука, 1969. 424 с.
9. Клименко М.І. Варіаційне числення та методи оптимізації: навчальний посібник для студентів освітньо-кваліфікаційного рівня «бакалавр», напряму підготовки «Математика». Запоріжжя: ЗНУ, 2015. 84 с.

Додаткова:

1. Бердичевский В. Л. Вариационные принципы механики сплошной среды. Москва: Наука, 1983. 448 с.
2. Гельфанд И. М., Фомин С. В. Вариационное исчисление. Москва: Физматлит, 1961. 228 с.
3. Коша А. Вариационное исчисление. Москва: Высшая школа, 1983. 280 с.
4. Ланцош К. Вариационные принципы механики. Москва: Мир, 1965. 408 с.
5. Михлин С. Г. Численная реализация вариационных методов. Москва: Наука, 1966. 432 с.
6. Ректорис К. Вариационные методы в математической физике. Москва: Мир, 1985. 590 с.
7. Спасский Р. А. Классическое вариационное исчисление и вариационные принципы механики. Севастополь: СевНТУ, 2004. 176 с.
8. Цлаф Л. Я. Вариационное исчисление и интегральные уравнения: справочное руководство. Москва: Наука, 1966. 192 с.
9. Янг Л. Лекции по вариационному исчислению и оптимальному управлению. Москва: Мир, 1974. 488с.

Інформаційні ресурси

1. Ахиезер Н. И. Лекции по вариационному исчислению: учебник для гос. ун-тов. Москва: Гостехиздат, 1955. 248 с. URL: http://ebooks.znu.edu.ua/files/mathbooks/differentsialnie_i_integraln_uravneniya/books/var_ischislenie/ahiezer.djvu
2. Будылин А. М. Вариационное исчисление. 2001. 197 с. URL: http://ebooks.znu.edu.ua/files/phiziki/matematika/mat_fizika/16var.pdf
3. Зейферт Г., Трельфалль В. Вариационное исчисление в целом. Ижевск: Издательский дом «Удмуртский университет», 2000. 160 с. URL: http://ebooks.zsu.zp.ua/files/mathbooks/differentsialnie_i_integraln_uravneniya/books/var_ischislenie/Zejfert.djvu

Погоджено 
навчальний відділ
« 14 » листопада 2018р.