ФУНКЦІОНАЛ. РІВНЯННЯ ЕЙЛЕРА ТА ЙОГО ЗАГАЛЬНЕННЯ

Поняття функціонала. Необхідна умова екстремуму

Нехай дано деякий клас M функцій $y(x)$. Якщо кожній функції $y(x) \in M$ згідно з деяким законом поставлено у відповідність визначене число J, то кажуть, що у класі M визначено *функціонал* J та пишуть $J = J[y(x)]$.

Клас функцій, на якому визначено функціонал $J[y(x)]$ називається *областю визначення функціонала.*

Варіацією δy аргументу $y(x)$ функціонала $J[y(x)]$ називається різниця $\delta y = y(x) - y_0(x)$, де $y(x)$ змінюється довільно у деякому класі функцій.

Якщо приріст функціонала

$$\Delta J = J[y(x) + \delta y] - J[y(x)]$$

можна представити у вигляді

$$\Delta J = L[y(x), \delta y] + \beta(y(x), \delta y) \max|\delta y|,$$

де $L[y(x), \delta y]$ – лінійний відносно δy функціонал, $\max|\delta y|$ – максимальне значення $|\delta y|$ і $\beta(y(x), \delta y) \to 0$ при $\max|\delta y| \to 0$, то лінійна відносно δy частина приросту функціонала, тобто $L[y(x), \delta y]$, називається *варіацією функціонала* і позначається δJ .

Теорема *(необхідна умова екстремуму).* Якщо функціонал $J[y(x)]$, що має варіацію, досягає максимуму або мінімуму при $y = y_0(x)$, де $y(x)$ – внутрішня точка області визначення функціонала, то при $y = y_0(x)$ $\delta J = 0$.

Основна лема варіаційного числення. Якщо для кожної неперервної функції $\eta(x)$

$$\int_{x_0}^{x_1} \Phi(x) \eta(x)\, dx = 0,$$

де функція $\Phi(x)$ є неперервною на відрізку $[x_0, x_1]$, то $\Phi(x) \equiv 0$ на цьому відрізку.

Рівняння Ейлера

Найпростіша задача варіаційного числення (задача Лагранжа на множині функцій із закріпленими кінцями) – це задача визначення екстремуму функціонала

$$J[y(x)] = \int_{x_0}^{x_1} F(x, y, y')dx \to extr \qquad (1.1)$$

на множині функцій з простору $C_1[x_0, x_1]$ неперервно диференційовних функцій на відрізку $[x_0, x_1]$, що задовольняють граничні умови

$$y(x_0) = y_0,\ y(x_1) = y_1. \qquad (1.2)$$

Вважається, що функція $F(x, y, y')$ є тричі диференційовною.

Теорема *(про необхідну умову екстремуму в найпростішій задачі класичного варіаційного числення).* Нехай функція $y(x) \in C_1[x_0, x_1]$ – розв'язок задачі (1.1), (1.2). Тоді вона задовольняє рівняння

$$F_y(x, y, y') - \frac{d}{dx} F_{y'}(x, y, y') = 0. \qquad (1.3)$$

Рівняння (1.3) називається *рівнянням Ейлера*. Допустима функція, яка задовольняє це рівняння, називається *екстремаллю*.

Рівняння Ейлера можна подати у вигляді

$$y''(x) F_{y'y'}(x, y, y') + y'(x) F_{yy'}(x, y, y') + F_{xy'}(x, y, y') - F_y(x, y, y') = 0, \qquad (1.4)$$

$$F_{y'y'}(x, y, y') \neq 0.$$

Це диференціальне рівняння другого порядку відносно шуканої функції $y(x)$. Його загальний розв'язок залежить від двох невідомих констант. Ці константи визначають, використовуючи граничні умови (1.2).

Інтеграли рівняння Ейлера.

1. Функція F не залежить від y': $F(x,y,y') = F(x,y)$.

Рівняння Ейлера має вигляд

$$F_y(x,y) = 0. \qquad (1.5)$$

Це взагалі не диференціальне рівняння. Розв'язки рівняння не містять невідомих констант і можуть не проходити через граничні точки $(x_0,y_0),(x_1,y_1)$. Лише тоді, коли розв'язок рівняння проходить через ці точки, існує функція, що може давати екстремум функціонала.

2. Функція F лінійно залежить від y':

$$F(x,y,y') = M(x,y) + N(x,y)y'.$$

Рівняння Ейлера має вигляд

$$\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x} = 0. \qquad (1.6)$$

Це також не диференціальне рівняння і в загальному випадку його розв'язки не задовольняють граничні умови. Якщо ж $\dfrac{\partial M}{\partial y} - \dfrac{\partial N}{\partial x} \equiv 0$, то $M(x,y)dx + N(x,y)dy$ є точним диференціалом і функціонал

$$J[y(x)] = \int_{x_0}^{x_1} F(x,y,y')dx = \int_{(x_0,y_0)}^{(x_1,y_1)} \left(M(x,y)dx + N(x,y)dy\right)$$

не залежить від шляху інтегрування. Тоді варіаційна задача не має сенсу.

3. Функція F залежить лише від y': $F(x,y,y') = F(y')$.

Рівняння Ейлера має вигляд

$$F_{y'y'}(x,y,y') \cdot y'' = 0. \qquad (1.7)$$

Розв'язками такого рівняння будуть лише функції $y(x) = C_1 x + C_2$. Тому екстремалями задачі будуть лише прямі лінії.

4. Функція F залежить лише від x, y': $F(x,y,y') = F(x,y')$.

Рівняння Ейлера має вигляд

$$\frac{d}{dx}F_{y'}(x,y') = 0 \text{ або } F_{y'}(x,y') = C, \qquad (1.8)$$

де C – довільна стала. Це рівняння є диференціальним рівнянням першого порядку. Інтегруючи його, знаходять екстремалі задачі.

5. Функція F залежить лише від y, y': $F(x,y,y') = F(y,y')$.

У цьому разі рівняння Ейлера має перший інтеграл

$$F(y,y') - y' \cdot F_{y'}(y,y') = C, \qquad (1.9)$$

де C – довільна стала.

Щоб переконатися у цьому, обчислюється

$$\frac{d}{dx}\left(F - y' \cdot F_{y'}\right) = y' \cdot \left(F_y - \frac{d}{dx}F_{y'}\right) = 0.$$

Функціонали, що залежать від n функцій однієї змінної

Розглядається задача дослідження на екстремум функціонала

$$J[y_1,y_2,...,y_n] = \int_{x_0}^{x_1} F(x,y_1,y_2,...,y_n,y_1',y_2',...,y_n')dx \to extr \qquad (1.10)$$

при граничних умовах вигляду

$$y_k(x_0) = y_{k0}, \; y_k(x_1) = y_{k1}, \; k = \overline{1,n}, \qquad (1.11)$$

де $y_k(x)$, $k = \overline{1,n}$ – функції з простору $C_1[x_0,x_1]$ неперервно диференційовних функцій на відрізку $[x_0,x_1]$. Вважається, що функція F неперервна і має неперервні частинні похідні першого порядку по всіх $2n+1$ аргументах.

Теорема. Нехай функції $y_k(x), k = \overline{1,n}$ дають екстремум задачі (1.10), (1.11). Тоді вони задовольняють систему рівнянь Ейлера:

$$F_{y_k}-\frac{d}{dx}F_{y'_k}=0\quad\left(k=\overline{1,n}\right). \qquad (1.12)$$

Функціонали, що залежать від похідних вищого порядку

Розглядається задача дослідження на екстремум функціонала

$$J[y(x)]=\int_{x_0}^{x_1}F\left(x,y(x),y'(x),\ldots,y^{(n)}(x)\right)dx\to extr\,; \qquad (1.13)$$

$$y^{(k)}(x_0)=y_0^{(k)},\ y^{(k)}(x_1)=y_1^{(k)},\ k=\overline{0,n-1} \qquad (1.14)$$

у просторі $C_n[x_0,x_1]$ n раз неперервно диференційовних функцій. Вважається, що функція $F\left(x,y,y',\ldots,y^{(n)}\right)$ має неперервні частинні похідні першого порядку по всіх аргументах.

Теорема. Нехай функція $y(x)\in C_n[x_0,x_1]$ дає екстремум функціонала задачі (1.13), (1.14). Тоді вона задовольняє *рівняння Ейлера-Пуассона*

$$F_y-\frac{d}{dx}F_{y'}+\frac{d^2}{dx^2}F_{y''}-\ldots+(-1)^n\frac{d^n}{dx^n}F_{y^{(n)}}=0\,. \qquad (1.15)$$

Функціонали, що залежать від функцій багатьох змінних

Нехай $D-$ замкнута обмежена область у просторі R^2 з гладкою мережею Γ. Досліджується на екстремум функціонал

$$J[z(x,y)]=\iint_D F\left(x,y,z,\frac{\partial z}{\partial x},\frac{\partial z}{\partial y}\right)dxdy\to extr \qquad (1.16)$$

у класі допустимих функцій з простору $C_1(D)$ один раз неперервно диференційовних по всіх змінних функцій $z(x,y)$, що набувають на границі Γ області D заданих значень

$$z(x,y)=v(x,y),\quad (x,y)\in\Gamma, \qquad (1.17)$$

де F є тричі диференційовною функцією своїх аргументів. Шукається функція $z=z(x,y)$, яка є неперервною разом із своїми похідними включно до другого порядку в області D, приймає на границі Γ області D задані значення і дає екстремум функціонала (1.16).

Теорема. Нехай $z=z(x,y)$ – розв'язок екстремальної задачі (1.16), (1.17). Тоді функція $z=z(x,y)$ задовольняє *рівняння Ейлера-Остроградського*

$$F_z-\frac{\partial}{\partial x}\{F_p\}-\frac{\partial}{\partial y}\{F_q\}=0 \qquad (1.18)$$

з граничними умовами (1.17), де

$$\frac{\partial}{\partial x}\{F_p\}=F_{px}+F_{pz}\frac{\partial z}{\partial x}+F_{pp}\frac{\partial p}{\partial x}+F_{pq}\frac{\partial q}{\partial x},\qquad \frac{\partial}{\partial y}\{F_q\}=F_{qy}+F_{qz}\frac{\partial z}{\partial y}+F_{qp}\frac{\partial p}{\partial y}+F_{qq}\frac{\partial q}{\partial y}$$

(1.20)

є повні частинні похідні по x і y відповідно. Тут для скорочення позначено $\frac{\partial z}{\partial x}=p$, $\frac{\partial z}{\partial y}=q$.

Рівняння (1.18) є рівнянням другого порядку в частинних похідних.

ВАРІАЦІЙНІ ЗАДАЧІ НА МНОЖИНІ ФУНКЦІЙ З РУХОМИМИ ГРАНИЦЯМИ

Найпростіша задача з рухомими границями

Нехай $F=F(x,y,y')$ є тричі диференційовною функцією своїх аргументів і нехай у площині xOy задано дві криві

$$y=\varphi(x)\quad \text{і}\quad y=\psi(x) \qquad (2.1)$$

де $\varphi(x)\in C_1[a,b]$ і $\psi(x)\in C_1[a,b]$.

Розглядається функціонал

$$J[y(x)]=\int_{x_0}^{x_1} F(x,y,y')dx \to extr, \qquad (2.2)$$

що є визначеним на гладких кривих $y=y(x)$, кінці яких $A(x_0,y_0)$ і $B(x_1,y_1)$ лежать на заданих лініях (2.1), так що $y_0=\varphi(x_0)$, $y_1=\psi(x_1)$. Потрібно знайти екстремум функціонала (2.2).

Теорема. Нехай крива $y=y(x)$ дає екстремум функціонала (2.2) серед усіх кривих класу C_1, що з'єднують дві довільні точки двох вказаних кривих $y=\varphi(x)$, $y=\psi(x)$. Тоді крива $y(x)$ є екстремаллю та в кінцях $A(x_0,y_0)$ і $B(x_1,y_1)$ кривої $y(x)$ виконуються *умови трансверсальності*

$$\left[F+(\varphi'-y')F_{y'}\right]\Big|_{x=x_0}=0, \quad \left[F+(\psi'-y')F_{y'}\right]\Big|_{x=x_1}=0. \qquad (2.3)$$

Таким чином, для розв'язування найпростішої задачі з рухомими границями треба:

1) Записати та розв'язати відповідне рівняння Ейлера. У результаті отримують сім'ю екстремалей $y=f(x,C_1,C_2)$, яка залежить від двох параметрів C_1 і C_2.

2) Із умов трансверсальності (2.3) та із рівнянь

$$\begin{aligned} &f(x_0,C_1,C_2)=\varphi(x_0),\\ &f(x_1,C_1,C_2)=\psi(x_1) \end{aligned} \qquad (2.4)$$

визначити сталі C_1,C_2,x_0,x_1.

3) Обчислити екстремум функціонала (2.2).

Зауваження. 1. Якщо гранична точка (x_1,y_1) рухається по вертикальній прямій $x=x_1$, то *умова трансверсальності* має вигляд

$$F_{y'}\Big|_{x=x_1}=0. \qquad (2.5)$$

2. Якщо гранична точка (x_1,y_1) рухається по горизонтальній прямій $y=y_1$, то *умова трансверсальності* має вигляд

$$\left[F-y'F_{y'}\right]\Big|_{x=x_1}=0. \qquad (2.6)$$

Задача з рухомими границями для функціоналів вигляду

$$J[y,z]=\int_{x_0}^{x_1} F(x,y,z,y',z')dx.$$

При дослідженні на екстремум функціонала

$$J[y,z]=\int_{x_0}^{x_1} F(x,y,z,y',z')dx \to extr \qquad (2.7)$$

вважається, що хоча б одна із граничних точок $A(x_0,y_0,z_0)$ або $B(x_1,y_1,z_1)$ рухається по вказаній кривій, а друга є закріпленою (або обидві граничні точки є рухомими).

Наслідок 1. Нехай крива $\begin{cases} y=y(x),\\ z=z(x)\end{cases}$ дає екстремум функціонала (2.7) у трьохвимірному просторі, коли точка $A(x_0,y_0,z_0)$ рухається по кривій

$$\begin{cases} y=\varphi_0(x),\\ z=\psi_0(x), \end{cases} \qquad (2.8)$$

а точка $B(x_1,y_1,z_1)$ – по кривій

$$\begin{cases} y=\varphi_1(x),\\ z=\psi_1(x). \end{cases} \qquad (2.9)$$

Тоді функції $y=y(x)$, $z=z(x)$ задовольняють систему рівнянь Ейлера

$$\begin{cases} F_y-\dfrac{d}{dx}F_{y'}=0,\\ F_z-\dfrac{d}{dx}F_{z'}=0 \end{cases} \qquad (2.10)$$

та *умови трансверсальності*

$$\left[F+\left(\varphi_k'-y'\right)F_{y'}+\left(\psi_k'-z'\right)F_{z'}\right]\Big|_{x=x_k}=0\,,\qquad k=0{,}1. \qquad (2.11)$$

Умови трансверсальності (2.11) разом з рівняннями (2.8), (2.9) дозволяють визначити довільні сталі у загальному розв'язку системи рівнянь Ейлера.

Наслідок 2. Нехай крива $\begin{cases} y=y(x), \\ z=z(x) \end{cases}$ дає екстремум функціонала (2.7) у трьохвимірному просторі, коли точка $A(x_0,y_0,z_0)$ рухається по поверхні $z=\varphi_0(x,y)$, а точка $B(x_1,y_1,z_1)$ – по поверхні $z=\varphi_1(x,y)$. Тоді функції $y=y(x)$, $z=z(x)$ задовольняють систему рівнянь Ейлера (2.10) та *умови трансверсальності*

$$\left[F-y'F_{y'}+(\varphi_{k\,x}'-z')F_{z'}\right]\Big|_{x=x_k}=0\,,\left[F_{y'}+F_{z'}\varphi_{k\,y}'\right]\Big|_{x=x_k}=0\,,\ k=0{,}1. \qquad (2.12)$$

Умови (2.12) разом із рівняннями $z=\varphi_0(x,y)$, $z=\varphi_1(x,y)$ дають можливість визначити довільні сталі у загальному розв'язку системи рівнянь Ейлера.