ВАРІАЦІЙНІ ЗАДАЧІ НА МНОЖИНІ ФУНКЦІЙ З РУХОМИМИ ГРАНИЦЯМИ

Найпростіша задача з рухомими границями

Нехай $F = F(x, y, y')$ є тричі диференційовною функцією своїх аргументів і нехай у площині xOy задано дві криві

$$y = \varphi(x) \quad \text{і} \quad y = \psi(x) \tag{2.1}$$

де $\varphi(x) \in C_1[a,b]$ і $\psi(x) \in C_1[a,b]$.

Розглядається функціонал

$$J[y(x)] = \int_{x_0}^{x_1} F(x, y, y')dx \to extr, \tag{2.2}$$

що є визначеним на гладких кривих $y = y(x)$, кінці яких $A(x_0, y_0)$ і $B(x_1, y_1)$ лежать на заданих лініях (2.1), так що $y_0 = \varphi(x_0)$, $y_1 = \psi(x_1)$. Потрібно знайти екстремум функціонала (2.2).

Теорема. Нехай крива $y = y(x)$ дає екстремум функціонала (2.2) серед усіх кривих класу C_1, що з'єднують дві довільні точки двох вказаних кривих $y = \varphi(x)$, $y = \psi(x)$. Тоді крива $y(x)$ є екстремаллю та в кінцях $A(x_0, y_0)$ і $B(x_1, y_1)$ кривої $y(x)$ виконуються *умови трансверсальності*

$$\left[F + (\varphi' - y')F_{y'}\right]\Big|_{x=x_0} = 0, \quad \left[F + (\psi' - y')F_{y'}\right]\Big|_{x=x_1} = 0. \tag{2.3}$$

Таким чином, для розв'язування найпростішої задачі з рухомими границями треба:

1) Записати та розв'язати відповідне рівняння Ейлера. У результаті отримують сім'ю екстремалей $y = f(x, C_1, C_2)$, яка залежить від двох параметрів C_1 і C_2.

2) Із умов трансверсальності (2.3) та із рівнянь

$$\begin{aligned} f(x_0, C_1, C_2) &= \varphi(x_0), \\ f(x_1, C_1, C_2) &= \psi(x_1) \end{aligned} \tag{2.4}$$

визначити сталі C_1, C_2, x_0, x_1.

3) Обчислити екстремум функціонала (2.2).

Зауваження. 1. Якщо гранична точка (x_1, y_1) рухається по вертикальній прямій $x = x_1$, то *умова трансверсальності* має вигляд

$$F_{y'}\Big|_{x=x_1} = 0. \tag{2.5}$$

2. Якщо гранична точка (x_1, y_1) рухається по горизонтальній прямій $y = y_1$, то *умова трансверсальності* має вигляд

$$\left[F - y'F_{y'}\right]\Big|_{x=x_1} = 0. \tag{2.6}$$

Задача з рухомими границями для функціоналів вигляду

$$J[y,z] = \int_{x_0}^{x_1} F(x, y, z, y', z')dx.$$

При дослідженні на екстремум функціонала

$$J[y,z] = \int_{x_0}^{x_1} F(x, y, z, y', z')dx \to extr \tag{2.7}$$

вважається, що хоча б одна із граничних точок $A(x_0, y_0, z_0)$ або $B(x_1, y_1, z_1)$ рухається по вказаній кривій, а друга є закріпленою (або обидві граничні точки є рухомими).

Наслідок 1. Нехай крива $\begin{cases} y = y(x), \\ z = z(x) \end{cases}$ дає екстремум функціонала (2.7) у трьохвимірному просторі, коли точка $A(x_0, y_0, z_0)$ рухається по кривій

$$\begin{cases} y = \varphi_0(x), \\ z = \psi_0(x), \end{cases} \tag{2.8}$$

а точка $B(x_1, y_1, z_1)$ – по кривій

$$\begin{cases} y = \varphi_1(x), \\ z = \psi_1(x). \end{cases} \qquad (2.9)$$

Тоді функції $y = y(x)$, $z = z(x)$ задовольняють систему рівнянь Ейлера

$$\begin{cases} F_y - \dfrac{d}{dx} F_{y'} = 0, \\ F_z - \dfrac{d}{dx} F_{z'} = 0 \end{cases} \qquad (2.10)$$

та *умови трансверсальності*

$$\left[F + (\varphi_k' - y')F_{y'} + (\psi_k' - z')F_{z'}\right]\Big|_{x=x_k} = 0, \qquad k = 0,1. \qquad (2.11)$$

Умови трансверсальності (2.11) разом з рівняннями (2.8), (2.9) дозволяють визначити довільні сталі у загальному розв'язку системи рівнянь Ейлера.

Наслідок 2. Нехай крива $\begin{cases} y = y(x), \\ z = z(x) \end{cases}$ дає екстремум функціонала (2.7) у трьохвимірному просторі, коли точка $A(x_0, y_0, z_0)$ рухається по поверхні $z = \varphi_0(x, y)$, а точка $B(x_1, y_1, z_1)$ – по поверхні $z = \varphi_1(x, y)$. Тоді функції $y = y(x)$, $z = z(x)$ задовольняють систему рівнянь Ейлера (2.10) та *умови трансверсальності*

$$\left[F - y'F_{y'} + (\varphi_{k\,x}' - z')F_{z'}\right]\Big|_{x=x_k} = 0, \left[F_{y'} + F_{z'}\varphi_{k\,y}'\right]\Big|_{x=x_k} = 0, \; k = 0,1.$$

(2.12)

Умови (2.12) разом із рівняннями $z = \varphi_0(x, y)$, $z = \varphi_1(x, y)$ дають можливість визначити довільні сталі у загальному розв'язку системи рівнянь Ейлера.