ДОСТАТНІ УМОВИ ЕКСТРЕМУМУ

Умова Якобі

Нехай мають найпростішу варіаційну задачу

$$J[y(x)]=\int_{x_0}^{x_1}F(x,y,y')dx\to extr\,, \qquad (4.1)$$

$$y(x_0)=y_0\,,\; y(x_1)=y_1\,. \qquad (4.2)$$

Якщо розв'язок $u=u(x)$ *рівняння Якобі*

$$\left(F_{yy}-\frac{d}{dx}F_{yy'}\right)u-\frac{d}{dx}\left(F_{y'y'}u'\right)=0\,, \qquad (4.3)$$

що задовольняє умові $u(x_0)=0$, не перетворюється в нуль у жодній з точок півінтервалу $x_0<x\le x_1$, то дугу екстремалі можна включити у центральне поле екстремалей із центром у точці $A(x_0,y_0)$.

У рівнянні (4.3) у функції $F_{yy}(x,y,y')$, $F_{yy'}(x,y,y')$ і $F_{y'y'}(x,y,y')$ замість $y(x)$ треба підставити праву частину рівняння екстремалі $y=y(x,C_0)$.

Достатні умови Вейєрштрасса

Розглядається найпростіша варіаційна задача (4.1), (4.2).

Функцією Вейєрштрасса $E(x,y,p,y')$ називається функція, що визначається рівністю

$$E(x,y,p,y')=F(x,y,y')-F(x,y,p)-(y'-p)F_p(x,y,p)\,, \qquad (4.4)$$

де $p=p(x,y)$ – нахил поля екстремалей у точці (x,y) варіаційної задачі (4.1), (4.2).

Достатні умови слабкого екстремуму.

Крива C дає слабкий екстремум функціонала (4.1)*, якщо:*

1. *Крива C є екстремаллю функціонала* (4.1)*, що задовольняє граничні умови* (4.2)*, тобто є розв'язком рівняння Ейлера для функціонала* (4.1)*, який задовольняє умови* (4.2).
2. *Екстремаль C може бути включена у поле екстремалей; зокрема, це буде, коли виконано умову Якобі.*
3. *Функція Вейєрштрасса* $E(x,y,p,y')$ *повинна зберігати знак в усіх точках* (x,y)*, що є близькими до екстремалі C, і для близьких до* $p(x,y)$ *значень* y'*. Функціонал* $J[y(x)]$ *буде мати максимум на C, якщо* $E\le 0$*, і мінімум, якщо* $E\ge 0$.

Достатні умови сильного екстремуму.

Крива C дає сильний екстремум функціонала (4.1)*, якщо:*

1. *Крива C є екстремаллю функціонала* (4.1)*, що задовольняє граничні умови* (4.2).
2. *Екстремаль C може бути включена у поле екстремалей.*
3. *Функція Вейєрштрасса* $E(x,y,p,y')$ *зберігає знак в усіх точках* (x,y)*, що є близькими до екстремалі C, і для довільних значень* y'*. Функціонал* $J[y(x)]$ *буде мати максимум на C, якщо* $E\le 0$*, і мінімум, якщо* $E\ge 0$.

Зауваження. Умова Вейєрштрасса є необхідною для наявності екстремуму в наступному значенні – якщо у точках екстремалі для деяких значень y' функція E має протилежні знаки, то сильний екстремум не досягається. Якщо ця властивість має місце для скільки завгодно близьких до p значень y', то не досягається і слабкий екстремум.

Достатні умови Лежандра

Нехай функція $F(x,y,y')$ має неперервну частинну похідну $F_{y'y'}(x,y,y')$ і нехай екстремаль *C* включена у поле екстремалей.

Якщо на екстремалі *C* мають $F_{y'y'}>0$, то на кривій *C* досягається слабкий мінімум; якщо $F_{y'y'}<0$ на екстремалі *C*, то на ній досягається слабкий максимум функціонала (4.1). Ці умови називаються *посиленими умовами Лежандра.*

У тому випадкові, коли $F_{y'y'}(x, y, y') \geq 0$ у точках (x, y), близьких до екстремалі *C*, для довільних значень y', то мають сильний мінімум, а у випадку, коли для вказаних значень аргументів $F_{y'y'}(x, y, y') \leq 0$, мають сильний максимум.