Приклади розв’язування задач за темою „Функціонал. Рівняння Ейлера та його узагальнення”

Приклад 1. Відшукати екстремалі задачі

$$J[y(x)]=\int_0^{\pi/2}\left(y'^2(x)-y^2(x)\right)dx\to extr, \qquad y(0)=0,\ y(\pi/2)=1.$$

Розв’язування. Оскільки $F(x,y,y')=y'^2-y^2$, то $F_y=-2y$, $F_{y'}=2y'$, $\frac{d}{dx}F_{y'}=2y''$. Рівняння Ейлера має вигляд $y''+y=0$. Його загальний розв’язок

$$y(x)=C_1\cos x+C_2\sin x.$$

З граничних умов обчислюють $C_1=0,\quad C_2=1$.

Відповідь. Функція $y(x)=\sin x$ єдина допустима екстремаль.

Приклад 2. Відшукати екстремалі задачі

$$J[y_1(x),y_2(x)]=\int_0^{\pi/2}\left(y_1'^2(x)+y_2'^2(x)+2y_1(x)y_2(x)\right)dx\to extr,$$

$$y_1(0)=0,\ \ y_1(\pi/2)=1,\ y_2(0)=0,\ \ y_2(\pi/2)=1.$$

Розв’язування. Складають систему диференціальних рівнянь Ейлера. Вона має вигляд

$$y_1''-y_2=0,\ \ y_2''-y_1=0.$$

Вилучаючи одну зі змінних, наприклад y_2, дістають рівняння $y_1^{(4)}-y_1=0.$ Інтегруючи його, отримують загальний розв’язок системи рівнянь

$$y_1(x)=C_1e^x+C_2e^{-x}+C_3\cos x+C_4\sin x,$$

$$y_2(x)=C_1e^x+C_2e^{-x}-C_3\cos x-C_4\sin x.$$

Використовують граничні умови. Дістають $C_1=0,\ C_2=0,\ C_3=0,\ \ C_4=1.$

Відповідь. Функції $y_1(x)=\sin x$, $y_2(x)=-\sin x$ – екстремалі задачі.

Приклад 3. Відшукати екстремаль функціонала

$$J[y(x)]=\int_0^{\pi/2}\left(y''^2(x)-y^2(x)+x^2\right)dx\to extr,$$

$$y(0)=1,\ \ y(\pi/2)=0,\ y'(0)=0,\ \ y'(\pi/2)=-1.$$

Розв’язування. Рівняння Ейлера-Пуассона має вигляд $y^{(4)}-y=0$. Його загальний розв’язок такий:

$$y(x)=C_1e^x+C_2e^{-x}+C_3\cos x+C_4\sin x.$$

Невідомі константи C_1,C_2,C_3,C_4 обчислюють за граничними умовами. Дістають $C_1=0,\ C_2=0,$ $C_3=1,\ C_4=0.$

Відповідь. Єдина допустима екстремаль функціонала задачі – функція $y(x)=\cos x$.

Приклад 4. Відшукати екстремаль функціонала

$$J[z(x,y)]=\iint_D\left[\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2+2zf(x,y)\right]dxdy\to extr;$$

$$z(x,y)=v(x,y),\ (x,y)\in\Gamma.$$

Розв’язування. Складають рівняння Ейлера-Остроградського. Воно має вигляд

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=f(x,y)\Leftrightarrow \Delta z=f(x,y).$$

Рівняння Ейлера-Остроградського цієї задачі перетворюється у рівняння Пуассона.

Відповідь. Екстремаль функціонала – неперервна функція $z(x,y)$, яка задовольняє рівняння Пуассона і набуває заданих значень $v(x,y)$ на границі області D.

Завдання для самостійного розв’язування

Відшукати екстремалі функціоналів:

1. $J[y(x)] = \int\limits_{-1}^{0} \left(12xy - y'^2\right) dx \to extr, \quad y(-1) = 1, \;\; y(0) = 0$.

2. $J[y(x)] = \int\limits_{0}^{\pi} \left(4y\cos x + y'^2 - y^2\right) dx \to extr, \quad y(0) = 0, \;\; y(\pi) = 0$.

3. $J[y(x)] = \int\limits_{1}^{2} \left(xy^2 - y\right) dx \to extr, \quad y(1) = \frac{1}{2}, \;\; y(2) = \frac{1}{2}$.

4. $J[y(x)] = \int\limits_{0}^{1} \left(2xy + (x^2 + e^y)y'\right) dx \to extr, \quad y(0) = 0, \;\; y(1) = 1$.

5. $J[y(x)] = \int\limits_{1}^{2} \left(y'^2 + 2y'\right) dx \to extr, \quad y(1) = 0, \;\; y(2) = 1$.

6. $J[y(x)] = \int\limits_{0}^{1} \left(xy' + y'^2\right) dx \to extr, \quad y(0) = 0, \;\; y(1) = 1$.

7. $J[y(x)] = 2\pi \int\limits_{x_0}^{x_1} y\sqrt{1 + y'^2}\, dx \to extr, \quad y(x_0) = y_0, \;\; y(x_1) = y_1$.

8. $J[y(x)] = \frac{1}{\sqrt{2g}} \int\limits_{x_1}^{x_2} \frac{\sqrt{1 + y'^2}}{\sqrt{y}}\, dx \to extr, \quad y(x_1) = y_1, \quad y(x_2) = y_2$.

9. $\int\limits_{1}^{2} \left(y_1'^2 + y_2^2 + y_2'^2\right) dx \to extr; \;\; y_1(1) = 1, \; y_1(2) = 2, \;\; y_2(1) = 0, \; y_2(2) = 1.$

10. $\int\limits_{0}^{\pi} \left(2y_1 y_2 - 2y_1^2 + y_1'^2 - y_2'^2\right) dx \to extr; \;\; y_1(0) = 0, \; y_1(\pi) = 1, \;\; y_2(0) = 0,$
$y_2(\pi) = -1.$

11. $\int\limits_{0}^{\pi/4} \left(2y_2 - 4y_1^2 + y_1'^2 - y_2'^2\right) dx \to extr; \;\; y_1(0) = 0, \; y_1(\pi/4) = 1, \;\; y_2(0) = 0,$
$y_2(\pi/4) = 1.$

12. $\int\limits_{-1}^{1} \left(2xy_1 - y_1'^2 + y_2'^3/3\right) dx \to extr; \;\; y_1(1) = 0, \; y_1(-1) = 2, \;\; y_2(1) = 1,$
$y_2(-1) = -1.$

13. $\int\limits_{x_0}^{x_1} \left(16y^2 - y''^2 + x^2\right) dx \to extr.$

14. $\int\limits_{0}^{1} \left(y''^2 + y'^2\right) dx \to extr; \;\; y(0) = 0, \; y'(0) = 1, \; y(1) = sh\,1, \; y'(1) = ch\,1.$

15. $\int\limits_{0}^{1} \left(y^2 + 2y'^2 + y''^2\right) dx \to extr; \;\; y(0) = 0, \; y'(0) = 1, \; y(1) = 0, \; y'(1) = -sh\,1.$

16. $\int\limits_{-1}^{0} \left(240y - y'''^2\right) dx \to extr; \;\; y(-1) = 1, y'(-1) = -4{,}5, y''(-1) = 16, \quad y(0) = 0, y'(0) = 0, y''(0) = 0.$

17. Написати рівняння Ейлера-Остроградського для функціонала

$$J[z(x,y)] = \iint\limits_{D} \left[\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right)^2 + \left(\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right)^2 + 2\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}\right)^2 - 2zf(x,y) \right] dxdy.$$

18. Якщо замкнену просторову криву з дроту устромити у мильний розчин, а потім вийняти, то утворена при цьому під дією сил поверхневого натягу плівка має мінімальну площу. Знайти диференціальне рівняння такої поверхні.

Питання для самоконтролю

1. Дати визначення функціонала.
2. Дати визначення варіації функціонала.
3. Сформулювати найпростішу задачу варіаційного числення.
4. Сформулювати необхідну умову екстремуму функціонала.
5. Сформулювати основну лему варіаційного числення.
6. Вивід рівняння Ейлера. Інтеграли рівняння Ейлера.
7. Сформулювати задачу варіаційного числення для функціоналів, що залежать від n функцій однієї змінної.
8. Сформулювати задачу варіаційного числення для функціоналів, що залежать від похідних вищого порядку. Який порядок має рівняння Ейлера-Пуассона.
9. Сформулювати задачу варіаційного числення для функціоналів, що залежать від функцій багатьох змінних.