Приклади розв'язування задач за темою „Варіаційні задачі на множині функцій з рухомими границями"

Приклад 1. Знайти відстань між параболою $y = x^2$ та прямою $x - y = 5$.

Розв'язування. Задача зводиться до знаходження екстремального значення функціонала

$$J[y(x)] = \int_{x_0}^{x_1} \sqrt{1+y'^2}\,dx \to extr \qquad (2.13)$$

при умові, що лівий кінець екстремалі може рухатися по кривій $y = x^2$, а правий – по прямій $y = x - 5$. Таким чином, у цьому випадкові мають $\varphi(x) = x^2$, $\psi(x) = x - 5$. Загальний розв'язок рівняння Ейлера буде: $y = C_1 x + C_2$, де C_1 і C_2 – довільні сталі, які треба визначити. Умови трансверсальності (2.3) мають вигляд

$$\left[\sqrt{1+y'^2} + (2x - y')\frac{y'}{\sqrt{1+y'^2}}\right]\Bigg|_{x=x_0} = 0,$$

$$\left[\sqrt{1+y'^2} + (1 - y')\frac{y'}{\sqrt{1+y'^2}}\right]\Bigg|_{x=x_1} = 0,$$

де $y' = C_1$. Рівняння (2.4) у цьому випадкові набувають вигляду

$$C_1 x_0 + C_2 = x_0^2,$$
$$C_1 x_1 + C_2 = x_1 - 5.$$

Таким чином, мають систему чотирьох рівнянь відносно чотирьох невідомих C_1, C_2, x_0, x_1:

$$\begin{cases} \sqrt{1+C_1^2} + (2x_0 - C_1)\dfrac{C_1}{\sqrt{1+C_1^2}} = 0, \\ \sqrt{1+C_1^2} + (1 - C_1)\dfrac{C_1}{\sqrt{1+C_1^2}} = 0, \\ C_1 x_0 + C_2 = x_0^2, \\ C_1 x_1 + C_2 = x_1 - 5, \end{cases} \qquad (2.14)$$

розв'язуючи яку, дістають:

$$C_1 = -1, \quad C_2 = 3/4, \quad x_0 = 1/2, \quad x_1 = 23/8.$$

Отже, $y = -x + 3/4$ і $J[y(x)] = \int_{1/2}^{23/8} \sqrt{1+(-1)^2}\,dx = \sqrt{2}\, x\Big|_{1/2}^{23/8} = \dfrac{19\sqrt{2}}{8}.$

Відповідь. Рівняння екстремалі $y = -x + 3/4$. Відстань між параболою та прямою дорівнює $19\sqrt{2}/8$.

Приклад 2. Знайти найкоротшу відстань від точки $A(1,1,1)$ до сфери

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1. \qquad (2.15)$$

Розв'язування. Задача зводиться до дослідження на мінімум функціонала

$$J[y,z] = \int_{x_1}^{1} \sqrt{1 + y'^2(x) + z'^2(x)}\,dx, \qquad (2.16)$$

де точка $B(x_1, y_1, z_1)$ повинна знаходитися на сфері (2.15). Екстремалями функціонала (2.16) є прямі

$$\begin{cases} y = C_1 x + C_2, \\ z = C_3 x + C_4. \end{cases} \qquad (2.17)$$

Із умов проходження екстремалі (2.17) через точку $A(1,1,1)$ дістають

$$\begin{cases} C_1 + C_2 = 1, \\ C_3 + C_4 = 1. \end{cases} \tag{2.18}$$

Умови трансверсальності (2.12) з урахуванням (2.17) мають вигляд

$$\left[\sqrt{1+y'^2+z'^2} - \frac{y'^2}{\sqrt{1+y'^2+z'^2}} + \right.$$

$$\left. + \left(\frac{-x}{\sqrt{1-x^2-y^2}} - z'\right)\frac{z'}{\sqrt{1+y'^2+z'^2}}\right]\Bigg|_{x=x_1} = 0,$$

$$\left[\frac{y'}{\sqrt{1+y'^2+z'^2}} + \frac{z'}{\sqrt{1+y'^2+z'^2}} \cdot \frac{(-y)}{\sqrt{1-x^2-y^2}}\right]\Bigg|_{x=x_1} = 0,$$

звідки після нескладних перетворень отримують

$$\begin{aligned} z_1 - C_3 x_1 = 0, \\ C_1 z_1 - C_3 y_1 = 0, \end{aligned} \tag{2.19}$$

де x_1, y_1, z_1 – координати шуканої точки B.

Із умови проходження екстремалі (2.17) через точку $B(x_1, y_1, z_1)$ мають

$$\begin{cases} y_1 = C_1 x_1 + C_2, \\ z_1 = C_3 x_1 + C_4. \end{cases} \tag{2.20}$$

Із (2.18), (2.19) і (2.20) знаходять $C_1 = 1, \quad C_2 = 0, \quad C_3 = 1, \quad C_4 = 0,$
так що рівняння екстремалі

$$\begin{cases} y = x, \\ z = x. \end{cases} \tag{2.21}$$

Оскільки точка $B(x_1, y_1, z_1)$ повинна лежати на сфері (2.15), то з урахуванням (2.21) отримують, що $x_1^2 + x_1^2 + x_1^2 = 1$, тобто $x_1 = \pm 1/\sqrt{3}$.

Таким чином, дістають дві точки

$$B_1\left(1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3}\right) \text{ і } B_2\left(-1/\sqrt{3}, -1/\sqrt{3}, -1/\sqrt{3}\right).$$

Із геометричних міркувань легко бачити, що екстремаль (2.21), що з'єднує точку A з точкою B_1, дає функціоналу (2.16) мінімум, який дорівнює

$$J_{\min} = \int_{1/\sqrt{3}}^{1} \sqrt{1+1+1}\,dx = \sqrt{3} - 1,$$

а екстремаль (2.21), що з'єднує точку A з точкою B_2, дає максимум

$$J_{\max} = \int_{-1/\sqrt{3}}^{1} \sqrt{3}\,dx = \sqrt{3} + 1.$$

Відповідь. Екстремаль $y = x,\ z = x$, що з'єднує точку A з точкою B_1, дає мінімум функціонала: $J_{\min} = \sqrt{3} - 1,$ а екстремаль $y = x,\ z = x$, що з'єднує точку A з точкою B_2, дає максимум функціонала.

Завдання для самостійного розв'язування

1. Дослідити на екстремум функціонал $J[y(x)]=\int\limits_0^{x_1} y^2 y'^2 dx$ при умові, що один кінець допустимих кривих є зафіксованим у точці $(0,0)$, а другий кінець рухається по прямій $y=\frac{1}{2}(3-x)$.
2. Дослідити на екстремум функціонал
$$J[y(x)]=\int\limits_0^{x_1}\frac{\sqrt{1+y'^2}}{y}dx \to extr; \quad y(0)=0, \quad y_1=x_1-5.$$
3. Знайти криву, на якій реалізується екстремум функціонала $J[y(x)]=\int\limits_0^{2}\left(xy'+y'^2\right)dx$ при умові, що лівий кінець її знаходиться у точці $A(0,1)$, а правий – на прямій $x=2$.
4. Знайти найкоротшу відстань від точки $A(1,0)$ до еліпсу $4x^2+9y^2=36$.
5. Знайти найкоротшу відстань між колом $x^2+y^2=1$ та прямою $x+y=4$.
6. Серед ліній, що з’єднують точку $O(0,0)$ з кривою $y^3=2-x$ знайти ту, яка дає мінімум функціонала $J[y(x)]=\frac{1}{2}\int\limits_0^{x_1}\left(y'^2-y^2\right)dx$.
7. Знайти найкоротшу відстань від точки $A(-1,5)$ до параболи $y^2=x$.
8. Знайти найкоротшу відстань від точки $A(-1,3)$ до прямої $y=1-3x$.
9. Записати умову трансверсальності для функціонала
$$J[y(x)]=\int\limits_{x_0}^{x_1}A(x,y)e^{arctg\,y'}\sqrt{1+y'^2}\,dx, \text{ якщо } A(x,y)\neq 0.$$
10. Знайти найкоротшу відстань від точки $M(2{,}0{,}5)$ до поверхні $z=x^2+y^2$.
11. Знайти найкоротшу відстань від точки $M(0,0,3)$ до поверхні $z=x^2+y^2$.
12. Дослідити на екстремум функціонал $J[y,z]=\int\limits_{x_0}^{x_1}\left(y'^2+z'^2+2yz\right)dx$ $y(0)=0$, $z(0)=0$ і (x_1,y_1,z_1) може рухатися по площині $x=x_1$.
13. Знайти найкоротшу відстань між поверхнями $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}+\frac{z^2}{9}=1$ і $x^2+y^2+z^2=4$.

Питання для самоконтролю

1. Сформулювати постановку задачі з рухомими границями.
2. Вивід умов трансверсальності у загальному вигляді.
3. Сформулювати умови трансверсальності для випадку явного та неявного завдання граничних умов.
4. Сформулювати умови трансверсальності для випадку, коли точка рухається по просторовій кривій.
5. Сформулювати умови трансверсальності для випадку, коли точка рухається по поверхні.