Приклади розв'язування задач за темою „Розривні задачі"

Приклад 1. Відшукати ломані екстремалі функціонала

$$J[y(x)] = \int_0^2 \left(y'^4 - 6y'^2\right)dx, \quad y(0) = 0, \quad y(2) = 0,$$

допускаючи, що y' може мати одну точку розриву, яка відповідає абсцисі $x = c$.

Розв'язування. У цьому випадкові $F_{y'y'} = 12y'^2 - 12$ може перетворюватися в нуль і тому наявність зломів екстремалі є можливою. Оскільки підінтегральна функція залежить лише від y', то екстремалями є прямі

$$y = C_1 x + C_2.$$

Нехай

$$y_- = mx + n \quad (0 \le x < c), \quad y_+ = px + q \quad (c \le x \le 2).$$

Із граничних умов знаходять $n = 0$, $q = -2p$, так що

$$y_- = mx, \quad y_+ = p(x-2). \tag{3.9}$$

Умова неперервності екстремалі дає

$$mc = p(c-2). \tag{3.10}$$

Записують умови Вейєрштрасса-Ердмана (3.8). Мають

$$F_{y'} = 4y'^3 - 12y',$$

$$F - y' \cdot F_{y'} = -3y'^4 + 6y'^2.$$

Оскільки $y'_- = m, \; y'_+ = p,$ дістають

$$\begin{cases} 4m^3 - 12m = 4p^3 - 12p, \\ -3m^4 + 6m^2 = -3p^4 + 6p^2 \end{cases}$$

або

$$\begin{cases} (m-p)\left(m^2 + mp + p^2 - 3\right) = 0, \\ \left(m^2 - p^2\right)\left(m^2 + p^2 - 2\right) = 0. \end{cases} \tag{3.11}$$

Друге рівняння в (3.11) відразу дає $m = p$ або $m = -p$ або $m^2 + p^2 - 2 = 0$.
Розв'язок $m = p$ потрібно відкинути: при ньому екстремаль має неперервну похідну, а із умови (3.10) отримують, що $m = 0$, тобто екстремаль – відрізок осі Ox.

Таким чином, розв'язування системи (3.11) зводиться до розв'язування наступних систем рівнянь:

$$\begin{cases} m = -p, \\ m^2 + mp + p^2 = 3 \end{cases} \tag{3.12}$$

і

$$\begin{cases} m^2 + p^2 = 2, \\ m^2 + mp + p^2 = 3. \end{cases} \tag{3.13}$$

Розв'язок системи (3.12): $m = \sqrt{3}$, $p = -\sqrt{3}$ і $m = -\sqrt{3}$, $p = \sqrt{3}$. Розв'язок системи (3.13) дає $m = p$ і має бути відкинутий. Отже, $m = -p$ і умова неперервності (3.10) дає $c = 1$.

Відповідь. Ломані екстремалі з однією точкою злому такі:

$$y_1(x) = \begin{cases} \sqrt{3}\,x, & 0 \le x < 1, \\ -\sqrt{3}(x-2), & 1 \le x \le 2 \end{cases} \quad \text{і} \quad y_2(x) = \begin{cases} -\sqrt{3}\,x, & 0 \le x < 1, \\ \sqrt{3}(x-2), & 1 \le x \le 2. \end{cases}$$

$$J[y_1(x)] = J[y_2(x)] = -18.$$

3.3 Завдання для самостійного розв'язування

Знайти ломані екстремалі (якщо вони існують) для функціоналів:

1. $J[y(x)]=\int_0^4\left(y'^4-2y'^2\right)dx\to extr, \quad y(0)=0, \quad y(4)=2.$
2. $J[y(x)]=\int_{x_0}^{x_1}\left(y'^2+2xy-y^2\right)dx\to extr, \quad y(x_0)=y_0, \quad y(x_1)=y_1.$
3. $J[y(x)]=\int_0^2 y'^2(y'-1)^2\,dx\to extr, \quad y(0)=0, \quad y(2)=1.$
4. $J[y(x)]=\int_0^4 (y'-1)^2(y'+1)^2\,dx\to extr, \quad y(0)=0, \quad y(4)=2.$
5. $J[y(x)]=\int_{x_0}^{x_1}\left(y'^2+4x^2y-3y^2\right)dx\to extr, \quad y(x_0)=y_0, \quad y(x_1)=y_1.$
6. $J[y(x)]=\int_{-1}^{1} y^2\left(1-y'^2\right)dx\to extr, \quad y(-1)=0, \quad y(1)=1.$
7. $J[y(x)]=\int_0^{\pi/4}\left(y'^2-6yy'-16y^2\right)dx\to extr, \quad y(0)=0, \quad y\left(\frac{\pi}{4}\right)=1.$
8. $J[y(x)]=\int_3^4 \frac{(yy')^2}{4+y^2}\,dx\to extr, \quad y(3)=0, \quad y(4)=\sqrt{5}.$
9. $J[y(x)]=\int_0^a\left(3y'^2-y^2\right)dx\to extr, \quad y(0)=0, \quad y(a)=b.$
10. Визначити умову відбиття променя світла, що йде з точки $A(x_0, y_0)$ в точку $B(x_2, y_2)$ зі швидкістю $v(x, y)$.
11. У середовищі I швидкість поширення світла $v_1(x, y)$, а в середовищі II $-v_2(x, y)$. Середовища розділені кривою $y=\varphi(x)$. Відшукати умову заломлення променя світла, що йде з точки $A(x_0, y_0)$ середовища I в точку $B(x_2, y_2)$ середовища II, знаючи, що промінь проходить шлях AB за найкоротший відрізок часу.

Питання для самоконтролю

1. Сформулювати задачу про відбиття екстремалей.
2. Сформулювати задачу про заломлення екстремалей.
3. Дати визначення кусково-гладкої функції.
4. Сформулювати постановку варіаційної задачі на класі кусково-гладких функцій.
5. Вивід умов Вейєрштрасса-Ердмана.