Приклади розв'язування задач за темою „Достатні умови екстремуму"

Приклад 1. Дослідити на екстремум функціонал

$$J[y(x)]=\int_0^1\left(x+2y+\frac{1}{2}y'^2\right)dx \to extr\,,\ y(0)=0,\ y(1)=0\,.$$

Розв'язування. Рівняння Ейлера для цього функціонала має вигляд $y''=2$. Екстремалями є параболи $y=x^2+C_1x+C_2$. Екстремаль, що задовольняє граничні умови, є $y=x^2-x$. Складають рівняння Якобі $-\frac{d}{dx}(u')=0$ або $u''=0$. Його загальний розв'язок $u(x)=C_1x+C_2$. Умова $u(0)=0$ дає $C_2=0$, а оскільки $u(x)=C_1x$ при $C_1\neq 0$ ніде на відрізку $[0,1]$ в нуль не перетворюється, крім точки $x=0$, то умову Якобі виконано, і екстремаль $y=x^2-x$ може бути включена у центральне поле екстремалей із центром у точці $(0,0)$, а саме: $y=x^2+Cx$. Функція Вейєрштрасса має вигляд $E(x,y,p,y')=\frac{1}{2}(y'-p)^2$. Звідки видно, що для довільних значень y' буде $E=\frac{1}{2}(y'-p)^2\geq 0$.

Відповідь. На екстремалі $y=x^2-x$ указаний функціонал досягає сильного мінімуму, який дорівнює $J\left[x^2-x\right]=1/3$.

Приклад 2. Дослідити на екстремум функціонал

$$J[y(x)]=\int_0^1\left(y'^3-\alpha y'\right)dx \to extr\,,\ y(0)=0,\ y(1)=-2\,,$$

($\alpha-$ будь-яке дійсне число).

Розв'язування. Оскільки підінтегральна функція залежить лише від y', то екстремалями є прямі $y=C_1x+C_2$. Екстремаллю, що задовольняє граничні умови, буде пряма $y=-2x$, яка може бути включена у центральне поле екстремалей $y=Cx$. На цій екстремалі нахил поля $p=-2$. Далі знаходять $F_{y'y'}=6y'$. На вказаній екстремалі мають $F_{y'y'}=-12<0$, тобто на лінії $y=-2x$ досягається слабкий максимум функціонала. Для довільних значень y' знак $F_{y'y'}$ не зберігається, отже, достатня умова сильного максимуму не виконується.

Функція Вейєрштрасса $E(x,y,p,y')$ у такому випадкові має вигляд

$$E(x,y,p,y')=(y'-p)^2(y'+2p)$$

та для деяких значень y' вона має протилежні знаки. Враховуючи зауваження на стор. 25, отримують, що сильного максимуму немає.

Відповідь. На екстремалі $y=-2x$ указаний функціонал досягає слабкого максимуму.

Завдання для самостійного розв'язування

Дослідити на екстремум функціонали:

1. $J[y(x)]=\int_0^2\left(xy'+y'^2\right)dx \to extr,\quad y(0)=1,\quad y(2)=0$.
2. $J[y(x)]=\int_0^a\left(y'^2+2yy'-16y^2\right)dx \to extr,\ a>0,\quad y(0)=0,\quad y(a)=0$.
3. $J[y(x)]=\int_1^2 y'\left(1+x^2y'\right)dx \to extr,\quad y(1)=3,\quad y(2)=5$.
4. $J[y(x)]=\int_0^{\pi/4}\left(4y^2-y'^2+8y\right)dx \to extr,\quad y(0)=-1,\quad y(\pi/4)=0$.

5. $J[y(x)]=\int\limits_1^2\left(x^2y'^2+12y^2\right)dx\to extr,\quad y(1)=1,\quad y(2)=8$.

6. $J[y(x)]=\int\limits_0^1(1+x)\mathrm{y}'^2\,dx\to extr,\quad y(0)=0,\quad y(1)=1$.

7. $J[y(x)]=\int\limits_0^a\frac{dx}{y'}\to extr,\quad y(0)=0,\quad y(a)=b,\quad a\rangle 0, b\rangle 0$.

8. $J[y(x)]=\int\limits_1^2\left(xy'^4-2yy'^3\right)dx\to extr,\quad y(1)=0,\quad y(2)=1$.

9. $J[y(x)]=\int\limits_0^a\left(1-e^{-y'^2}\right)dx\to extr,\quad y(0)=0,\quad y(a)=b,\quad a\rangle 0$.

10. $J[y(x)]=\int\limits_0^a\frac{\sqrt{1+y'^2}}{\sqrt{y}}\,dx\to extr,\quad y(0)=0,\quad y(a)=y_1$.

11. $J[y(x)]=\int\limits_{-1}^2 y'\left(1+x^2y'\right)dx\to extr,\quad y(-1)=1,\quad y(2)=4$

Питання для самоконтролю

1. Дати визначення поля екстремалей.
2. Сформулювати умову Якобі.
3. Сформулювати достатні умови Вейєрштрасса.
4. Сформулювати достатні умови Лежандра.