Прямые методы в вариационных задачах.

Прямые методы.

Дифференциальные уравнения вариационных задач интегрируются в конечном виде лишь в исключительных случаях. В связи с этим естественно возникает потребность в иных методах решения этих задач. Основная идея так называемых прямых методов заключается в том, что вариационная задача рассматривается как предельная для некоторой задачи на экстремум функции конечного числа переменных. Эта задача на экстремум функции конечного числа переменных решается обычными методами, а затем предельным переходом получается решение соответствующей вариационной задачи.

Функционал $\upsilon[y(x)]$ можно рассматривать как функцию бесконечного множества переменных. Это утверждение становится совершенно очевидным, если предположить, что допустимые функции могут быть разложены в степенные ряды:

$$y(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + ... + a_n x^n + ...$$

или в ряды Фурье:

$$y(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

или вообще в какие-нибудь ряды вида

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \varphi_n(x)$$

где $\varphi_n(x)$- заданные функции. Для задания функции $y(x)$, представимой в виде ряда $y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \varphi_n(x)$, достаточно задать значения всех коэффициентов a_n , и следовательно, значение функционала $\upsilon[y(x)]$ в этом случае определяется заданием бесконечной последовательности чисел: $a_0, a_1, ..., a_n, ...,$ то есть функционал является функцией бесконечного множества переменных :

$$\upsilon[y(x)] = \varphi(a_0, a_1, ..., a_n, ...).$$

Следовательно, различие между вариационными задачами и задачами на экстремум функций конечного числа переменных состоит в том, что в вариационном случае приходится исследовать на экстремум функции бесконечного множества переменных. Поэтому основная идея прямых методов, заключающаяся в том, что вариационная задача рассматривается как предельная для задачи на экстремум функций конечного числа переменных конечного числа переменных, является весьма естественной.

Л. Эйлер в первый период своих исследований в области вариационного исчисления применял метод, называемый теперь конечно-разностным методом. Этот метод в дальнейшем длительное время совсем не применялся и лишь в последние три десятилетия был с большим успехом снова возрождён в работах советских математиков(Л. А. Люстерник, И. Г. Петровский и др.)

Другой прямой метод, известный под названием метода Ритца, в разработку которого весьма значительный вклад внесен советскими математиками(Н. М. Крылов, Н. Н. Боголюбов и др.), в настоящее время находит широкое применение при решении различных вариационных задач.

Третий прямой метод, предложенный Л. В. Канторовичем, применимый к функционалам, зависящим от функций нескольких независимых переменных, находит все более широкое применение в тех же областях, в которых применяется метод Ритца.

Конечно-разностный метод Эйлера.

Идея конечно-разностного метода заключается в том, что значения функционала $\upsilon[y(x)]$, например

$$\int_{x_0}^{x_1} F(x, y, y')dx, \qquad y(x_0) = a, \qquad y(x_1) = b,$$

рассматриваются не на произвольных, допустимых в данной вариационной задаче, кривых, а лишь на ломанных, составленных из заданного числа n прямолинейных звеньев, с заданными абсциссами вершин:

$$x_0 + \Delta x,\ x_0 + 2\Delta x, \ldots,\ x_0 + (n-1)\Delta x,$$

где $$\Delta x = \frac{x_1 - x_0}{n} \quad \text{(см.рис.1)}$$

рис.1

На таких ломаных функционал $\upsilon[y(x)]$ превращается в функцию $\varphi(y_1, y_2, \ldots, y_{n-1})$ ординат $y_1, y_2, \ldots, y_{n-1}$ вершин ломаной, так как ломанная вполне определяется этими ординатами.

Выбираем ординаты $y_1, y_2, \ldots, y_{n-1}$ так, чтобы функция $\varphi(y_1, y_2, \ldots, y_{n-1})$ достигала экстремума, то есть определяем $y_1, y_2, \ldots, y_{n-1}$ из системы уравнений

$$\frac{\partial \varphi}{\partial y_1} = 0, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial y_2} = 0, \ldots\ldots, \frac{\partial \varphi}{\partial y_{n-1}} = 0,$$

а затем переходим к пределу при $n \to \infty$. В пределе при некоторых ограничениях, налагаемых на функцию F, получим решение вариационной задачи.

Удобнее, однако, значение функционала $\upsilon[y(x)]$ на указанн†††

††† †††
†

†† ††††††††††††††††
†

†††
†††††††††††† †††† этом случае на рассматриваемых ломаных
†

†††††††††††††††††††††††† ††††††††††††††††††††††††††††††††††
†

†††††††††† ††
†

†† †††† этом случае на
†

рассматриваемых ломаных

††† ††††††††††††††††
†

†††
††††††††††††† †††† этом случае на рассматриваемых ломаных
†

††††††††††††††††††††††† †††††††††††††††††††††††††††††††††††
†

†† ††††
†

этом случае на рассматриваемых ломаных

†††
†††††††††††††††††††††††††† †††† этом случае на рассматриваемых
†

ломаных

††††††††††††††††††††††† †††† этом случае на рассматриваемых
†

ломаных

† этом случае на рассматриваемых ломаных

$$\upsilon[y(x)] = \varphi(y_1, y_2, ..., y_{n-1}) = \sum_{i=0}^{n-1} F(x_i, y_i, \frac{y_{i+1} - y_i}{\Delta x})\Delta x.$$

Так как от y_i зависят лишь два слагаемых этой суммы: $i-$е и $(i-1)-$е,

$$F(x_i, y_i, \frac{y_{i+1}-y_i}{\Delta x})\Delta x \qquad\qquad F(x_{i-1}, y_{i-1}, \frac{y_i - y_{i-1}}{\Delta x})\Delta$$

то уравнения $\frac{\partial \varphi}{\partial y_i} = 0 \qquad (i = 1,2,...,n-1)$ принимают вид

$$F_y(x_i, y_i, \frac{y_{i+1}-y_i}{\Delta x})\Delta x + F_{y'}\left(x_i, y_i, \frac{y_{i+1}-y_i}{\Delta x}\right)\left(\frac{-1}{\Delta x}\right)\Delta x + F_{y'}(x_{i-1}, y_{i-1}, \frac{y_i - y_{i-1}}{\Delta x})\frac{1}{\Delta x}\Delta x = 0$$

или

$$F_y(x_i, y_i, \frac{\Delta y_i}{\Delta x}) - \frac{\Delta F_{y'}}{\Delta x} = 0.$$

Переходя к пределу при $n \to \infty$, получим уравнение Эйлера

$$F_y - \frac{d}{dx}F_{y'} = 0$$

которому должна удовлетворять искомая функция $y(x)$, реализующая экстремум. Аналогично может быть получено основное необходимое условие экстремума в других вариационных задачах.

Если не совершать предельного перехода, то из системы уравнений $\frac{\partial \varphi}{\partial y_i} = 0 \qquad (i = 1,2,...,n-1)$ можно определить искомые ординаты

$y_1, y_2, ..., y_{n-1}$ и тем самым получить ломаную, являющуюся приближенным решением вариационной задачи.

Метод Ритца.

Идея метода Ритца заключается в том, что значения некоторого функционала $\upsilon[y(x)]$ рассматриваются не на произвольных допустимых кривых данной вариационной задачи, а лишь на всевозможных линейных комбинациях $y_n = \sum_{i=1}^{n} a_i W_i(x)$ с постоянными коэффициентами, составленных из n первых функций некоторой выбранной последовательности функций $W_1(x), W_2(x), ..., W_n(x), ...$

Функции $y_n = \sum_{i=1}^{n} a_i W_i(x)$ должны быть допустимыми в рассматриваемой задаче, что налагает некоторые ограничения на выбор последовательности функций $W_i(x)$. На таких линейных комбинациях функционал $\upsilon[y(x)]$ превращается в функцию $\varphi(a_1, a_2, ..., a_n)$ коэффициентов $a_1, a_2, ..., a_n$. Эти коэффициенты $a_1, a_2, ..., a_n$ выбираются так, чтобы функция $\varphi(a_1, a_2, ..., a_n)$ достигала экстремума; следовательно, $a_1, a_2, ..., a_n$ должны быть определены из системы уравнений

$$\frac{\partial \varphi}{\partial a_i} = 0 \qquad (i = 1,2,3,...,n)$$

Совершая предельный переход при $n \to \infty$, получим в случае существования предела функцию $y_n = \sum_{i=1}^{\infty} a_i W_i(x)$, являющуюся(при некоторых ограничениях, налагаемых на функционал $\upsilon[y(x)]$ и на последовательность $W_1(x), W_2(x), ..., W_n(x), ...$) точным решением рассматриваемой вариационной задачи. Если не совершать предельного перехода, а ограничиться лишь n первыми членами $y_n = \sum_{i=1}^{n} a_i W_i(x)$, то получим приближенное решение вариационной задачи.

Если таким методом определяется абсолютный минимум функционала, то приближенное значение минимума функционала находится с избытком ,так как минимум функционала на любых допустимых кривых не больше, чем минимум того же функционала на части этого класса допустимых кривых – на кривых вида $y_n = \sum_{i=1}^{n} a_i W_i(x)$. При нахождении тем же методом максимального значения функционала получаем по тем же причинам приближенное значении максимума функционала с недостатком.

Для того чтобы функции $y_n = \sum_{i=1}^{n} a_i W_i(x)$ были допустимыми, прежде всего, необходимо удовлетворить граничным условиям. Если граничные условия линейны и однородны, например, в простейшей задаче

$y(x_0) = y(x_1) = 0$ или $\beta_{1j} y(x_j) + \beta_{2j} y'(x_j) = 0 \quad (j = 0,1)$

Где β_{ij} - постоянные, то проще всего и координатные функции выбрать удовлетворяющими этим граничным условиям. Очевидно, что при этом и $y_n = \sum_{i=1}^{n} a_i W_i(x)$ при любых a_i будут удовлетворять тем же граничным условиям. Пуст, например, граничные условия имеют вид $y(x_0) = y(x_1) = 0$, тогда в качестве координатных функций можно выбрать

$$W_i(x) = (x - x_0)(x - x_1)\varphi_i(x),$$

где $\varphi_i(x)$ - какие-нибудь непрерывные функции, или

$$W_k(x_0) = \sin \frac{k\pi(x - x_0)}{x_1 - x_0} \qquad (k = 1,2,...)$$

или какие-нибудь другие функции, удовлетворяющие условиям $W_i(x_0) = W_i(x_1) = 0$.

Если условия неоднородны, например $y(x_0) = y_0, y(x_1) = y_1$, где хотя бы одно из чисел y_0 или y_1 отлично от нуля, то проще всего искать решение вариационной задачи в виде

$$y_n = \sum_{i=1}^{n} a_i W_i(x) + W_0(x),$$

где $W_0(x)$ удовлетворяет заданным граничным условиям $W_0(x_0) = y_0$, $W_0(x_1) = y_1$, а все остальные $W_i(x)$ удовлетворяют соответствующим однородным граничным условиям, то есть в рассматриваемом случае $W_i(x_0) = W_i(x_1) = 0$. Очевидно, что при таком выборе при любых a_i функции $y_n(x)$ удовлетворяют заданным граничным условиям. В качестве функции $W_0(x)$ можно выбрать, например, линейную функцию

$$W_0(x) = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}(x - x_0) + y_0$$

Решение системы уравнений $\frac{\partial\varphi}{\partial a_i}=0 \quad (i=1,2,3,...,n)$ вообще говоря, является весьма сложной задачей. Эта задача значительно упрощается, если на экстремум исследуется квадратичный относительно неизвестной функции и её производных функционал υ, так как в этом случае уравнения $\frac{\partial\varphi}{\partial a_i}=0 \quad (i=1,2,3,...,n)$ линейны относительно a_i.

Выбор последовательности функций $W_1, W_2,..., W_n,...$, называемых координатными функциями, сильно влияет на степень сложности дальнейших вычислений, и поэтому от удачного выбора координатной системы функций в значительной мере зависит успех применения этого метода.

Все сказанное выше в полной мере относится и к функционалам $\upsilon[z(x_1, x_2,..., x_n)]$, причем, конечно, в этом случае функции W_i должны быть уже функциями переменных $x_1, x_2,..., x_n$, а также – к функционалам, зависящим от нескольких функций.

Метод Ритца часто применяется для точного или приближенного решения задач математической физики. Например, если требуется найти в некоторой области D решение уравнения Пуассона

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=f(x,y)$$

при заданных значениях z на границе области D, то можно заменить эту задачу вариационной задачей об экстремуме функционала, для которого данное уравнение является уравнением Остроградского. В рассматриваемом случае таким функционалом будет

$$\iint_D\left[\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2+2zf(x,y)\right]dxdy$$

Функцию z, реализующую экстремум этого функционала, можно находить любым из прямых методов.

Задачи математической физики обычно сводятся к исследованию на экстремум функционалов, квадратичных относительно неизвестной функции и её производных, и следовательно, как указывалось выше, применение метода Ритца в этом случае упрощается.

Вопрос о сходимости приближений, получаемых по методу Ритца, к искомому решению вариационной задачи, а также об оценке степени точности этих приближений является весьма сложным.

Для определенности будем иметь в виду функционал

$$\upsilon[y(x)] = \int_{x_0}^{x_1} F(x, y(x), y'(x))dx$$

и предполагать, что речь идет о его минимуме. Последовательность координатных функций $W_1(x), W_2(x), ..., W_n(x), ...$ будем считать полной в том смысле, что каждая допустимая функция может быть с любой степенью точности аппроксимирована в смысле близости первого порядка линейной комбинацией $\sum_{k=1}^{n} a_k W_k(x)$ координатных функций, где n достаточно велико. Тогда, очевидно, что методом Ритца можно получить функции $y_1, y_2, ..., y_n, ...$ где $y_n = \sum_{k=1}^{n} a_k W_k(x)$, образующие так называемую минимизирующую последовательность, то есть последовательность, для которой значения функционала

$$\upsilon[y_1], \upsilon[y_2], ..., \upsilon[y_n], ...$$

сходятся к минимуму или к нижней грани значений функционала $\upsilon[y(x)]$. Однако из того, что $\lim_{n\to\infty} \upsilon[y(x)] = \min \upsilon[y(x)]$, отнюдь не следует, что $\lim_{n\to\infty} y_n(x) = y(x)$. Минимизирующая последовательность может и не стремиться к функции, реализующей экстремум в классе допустимых функций.

Действительно, функционал

$$\upsilon[y_n(x)] = \int_{x_0}^{x_1} F(x, y_n(x), y_n'(x))dx$$

может мало чем отличаться от

$$\upsilon[y(x)] = \int_{x_0}^{x_1} F(x, y(x), y'(x))dx$$

не только в том случае, когда на всем отрезке интегрирования $y_n(x)$ близка в смысле близости первого порядка к $y(x)$, но и в том случае, когда на достаточно малых частях отрезка (x_0, x_1) функции $y_n(x)$ и $y(x)$ или их производные резко отличаются друг от друга, оставаясь близкими на остальной части отрезка (x_0, x_1) (рис.2).

рис.2

Поэтому минимизирующая последовательность $y_1, y_2, ..., y_n$ может даже не иметь предела в классе допустимых функций, хотя функции $y_1, y_2, ..., y_n$ сами и будут допустимыми.

Условия сходимости последовательности y_n, полученной методом Ритца, к решению вариационной задачи и оценка быстроты сходимости для конкретных, часто встречающихся функционалов были разработаны в трудах Н. М. Крылова и Н. Н. Боголюбова. Так, например, для функционалов вида

$$\upsilon = \int_0^1 \left[p(x)y'^2 q(x)y^2 + f(x)y\right]dx; \qquad y(0) = y(1) = 0$$

где $p(x) > 0; \quad q(x) \geq 0$, часто встречающихся в приложениях, не только доказана сходимость приближений, получаемых по методу Ритца, к функции $y(x)$, реализующей минимум функционала, при координатных функциях

$$W_k(x) = \sqrt{2}\sin k\pi x \qquad (k = 1,2,...)$$

но и даны весьма точные оценки погрешности $|y(x)-y_n(x)|$.

Приведем одну из этих оценок максимума $|y(x)-y_n(x)|$ на отрезке (0,1):

$$\max|y-y_n|\le\frac{1}{n+1}\left[\max p(x)+\frac{\max q(x)}{(n+1)^2\pi^2}\right]^{\frac{1}{2}}\frac{\sqrt{\int_0^1 f^2(x)dx}}{\pi^2\sqrt{2}[\min p(x)]^{\frac{5}{2}}}\times$$
$$\times\left[\max|p'(x)|+\frac{1}{\pi}\max q(x)+\pi\min p(x)\right].$$

Даже в этом, сравнительно простом случае, оценка погрешности очень сложна. й в нескольких точках отрезка $[x_0,x_1]$. Если в пределах требуемой точности их значения совпадают, то считают, что с требуемой точностью решение рассматриваемой вариационной задачи равно $y_n(x)$. Если же значения $y_n(x)$ и $y_{n+1}(x)$ хотя бы в некоторых из выбранных точек в пределах заданной точности не совпадают, то вычисляют $y_{n+2}(x)$ и сравнивают значения $y_{n+1}(x)$ и $y_{n+2}(x)$. Этот процесс продолжается до тех пор, пока значения $y_{n+k}(x)$ и $y_{n+k+1}(x)$ не совпадут в пределах заданной точности.

Пример 1.

При изучении колебаний заделанного клина постоянной толщины (рис.3) приходится исследовать на экстремум функционал

$$\upsilon=\int_0^1\left(ax^3y''^2-bxy^2\right)dx;\qquad y(1)=y'(1)=0$$

где a и b - положительные постоянные.

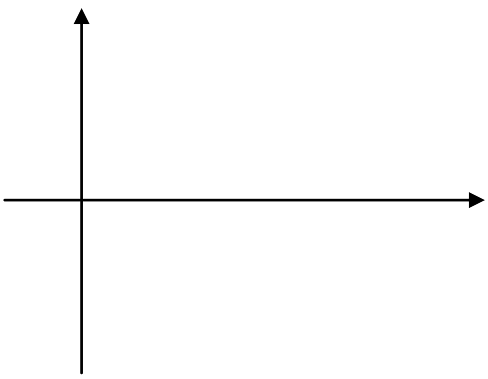

Рис.3

За координатные функции, удовлетворяющие граничным условиям, можно взять $(x-1)^2$, $(x-1)^2 x$, $(x-1)^2 x^2, ..., (x-1)^2 x^{k-1}, ...$;

Следовательно,

$$y_n = \sum_{k=1}^{n} a_k (x-1)^2 x^{k-1}.$$

Ограничиваясь лишь двумя первыми членами, будем иметь

$$y_2 = (x-1)^2 (a_1 + a_2 x)$$

тогда

$$\upsilon_2 = \upsilon[y_2] = \int_0^1 \left[ax^3 \left(6a_2 x + 2a_1 - 4a_2\right)^2 - bx(x-1)^4 (a_1 + a_2 x)^2\right] dx =$$

$$= a\left[\left(a_1 - 2a_2\right)^2 + \frac{24}{5} a_2 (a_1 - 2a_2) + 6a_2^2\right] - b\left(\frac{a_1^2}{30} + \frac{2a_1 a_2}{105} + \frac{a_2^2}{280}\right).$$

Необходимые условия экстремума $\frac{\partial \upsilon_2}{\partial a_1} = 0;$ $\frac{\partial \upsilon_2}{\partial a_2} = 0$ принимают в данном случае вид

$$\left(a - \frac{b}{30}\right) a_1 + \left(\frac{2}{5} a - \frac{b}{105}\right) a_2 = 0$$

и $$\left(\frac{2}{5} a - \frac{b}{105}\right) a_1 + \left(\frac{2}{5} a - \frac{b}{280}\right) a_2 = 0.$$

Для получения решений, отличных от решения $a_1 = a_2 = 0$, которое соответствует отсутствию колебаний клина, необходимо, чтобы определитель этой однородной линейной системы уравнений был равен нулю:

$$\begin{vmatrix} a - \frac{b}{30} & \frac{2}{5} a - \frac{b}{105} \\ \frac{2}{5} a - \frac{b}{105} & \frac{2}{5} a - \frac{b}{280} \end{vmatrix} = 0$$

или $$\left(a - \frac{b}{30}\right)\left(\frac{2}{5} a - \frac{b}{280}\right) - \left(\frac{2}{5} a - \frac{b}{105}\right)^2 = 0.$$

Это уравнение называется уравнением частот. Оно определяет частоту b собственных колебаний клина, описываемых функцией

$$u(x,t) = y(x) \cos bt.$$

Меньший из двух корней b_1 и b_2 уравнения частот дает приближенное значение частоты основного тона колебаний клина.

Пример 2.

В задачах, связанных с кручением цилиндра или призмы, приходится исследовать на экстремум функционал

$$\upsilon[z(x,y)] = \iint_D \left[\left(\frac{\partial z}{\partial x} - y\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y} + x\right)^2\right] dxdy.$$

Для цилиндра с эллиптическим поперечным сечением область интегрирования D будет ограничена эллипсом $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$. В этом случае, взяв лишь одну координатную функцию xy, получим

$$z_1 = \alpha xy, \quad \upsilon[z_1] = \upsilon_1 = \frac{\pi ab}{4}\left[(\alpha+1)^2 a^2 + (\alpha-1)^2 b^2\right].$$

Необходимое условие экстремума $\frac{\partial \upsilon_1}{\partial \alpha} = 0$ принимает в данном случае вид: $(\alpha+1)a^2 + (\alpha-1)b^2 = 0$, откуда

$$\alpha = \frac{b^2 - a^2}{a^2 + b^2}, \qquad z_1 = \frac{b^2 - a^2}{a^2 - b^2} xy.$$

Пример 3.

Если в условиях предыдущего примера область D будет прямоугольником со сторонами $2a$ и $2b$, $-a \le x \le a; \quad -b \le y \le b$, то взяв за координатные функции xy, xy^3, x^3y, то есть положив

$$z_3 = \alpha_1 xy + \alpha_2 xy^3 + \alpha_3 x^3 y,$$

получим

$$\upsilon_3 = \upsilon[z_3] = \int_{-a}^{a}\int_{-b}^{b} \left[\left(\frac{\partial z_3}{\partial x} - y\right)^2 + \left(\frac{\partial z_3}{\partial y} + x\right)^2\right] dxdy =$$

$$= \frac{4}{3}ab^3(\alpha_1 - 1)^2 + 4ab^5\left(\frac{b^2}{7} + \frac{3a^2}{5}\right)\alpha_2^2 + 4a^5b\left(\frac{a^2}{7} + \frac{3b^2}{5}\right)\alpha_3^2 + \frac{4}{3}a^3b(\alpha_1 + 1)^2 +$$

$$+ \frac{8}{5}a^3b(\alpha_1 + 1)\alpha_2 - \frac{8}{5}a^5b(\alpha_1 + 1)\alpha_3 - \frac{8}{5}a^3b^3(a^2 + b^2)\alpha_2\alpha_3 - \frac{8}{3}a^3b^3(\alpha_1 - 1)\alpha_3.$$

Необходимые условия экстремума $\frac{\partial \upsilon_3}{\partial a_1}=0$, $\frac{\partial \upsilon_3}{\partial a_2}=0$, $\frac{\partial \upsilon_3}{\partial a_3}=0$ позволяют вычислить a_1, a_2, a_3:

$$a_1=-\frac{7(a^6-b^6)+135a^2b^2(a^2-b^2)}{7(a^6+b^6)+107a^2b^2(a^2+b^2)},$$
$$a_2=-\frac{7a^2(3a^2+35b^2)}{21(a^6+b^6)+321a^2b^2(a^2+b^2)},$$
$$a_3=-\frac{7b^2(35a^2+35b^2)}{21(a^6+b^6)+321a^2b^2(a^2+b^2)}.$$

Пример 4.

Найти решение уравнения

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=f(x,y)$$

внутри прямоугольника $D, 0\le x\le a,\quad 0\le y\le b$, обращающееся в нуль на границе D. Функция $f(x,y)$ предполагается разложимой внутри рассматриваемого прямоугольника в равномерно сходящийся двойной ряд Фурье:

$$f(x,y)=\sum_{p=1}^{\infty}\sum_{q=1}^{\infty}\beta_{pq}\sin p\frac{\pi x}{a}\sin q\frac{\pi y}{b}.$$

Эту краевую задачу можно свести к вариационной задаче, то есть подобрать функционал, для которого заданное уравнение было бы уравнением Остроградского, и затем одним из прямых методов найти функцию, реализующую экстремум этого функционала, и тем самым найти решение исходной краевой задачи. Как легко проверить,

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=f(x,y)$$

является уравнением Остроградского для функционала

$$\upsilon[z(x,y)]=\iint_D\left[\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2+2zf(x,y)\right]dxdy.$$

Граничное условие сохраняется: $z=0$ на границе области D. Исследуем этот функционал на экстремум методом Ритца. В качестве системы координатных функций возьмем

$$\sin m\frac{\pi x}{a}\sin n\frac{\pi y}{b} \qquad (m,n=1,2,...)$$

Каждая из этих функций и их линейные комбинации удовлетворяют граничному условию $z=0$ на границе области D. Свойством полноты эти функции также обладают. Взяв

$$z_{n,m}=\sum_{p=1}^{n}\sum_{q=1}^{m}a_{pq}\sin p\frac{\pi x}{a}\sin q\frac{\pi y}{b}.$$

будем иметь

$$\upsilon[z_{nm}]=\int_0^a\int_0^b\left[\left(\frac{\partial z_{nm}}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z_{nm}}{\partial y}\right)^2+2z_{nm}\sum_{p=1}^{\infty}\sum_{q=1}^{\infty}\beta_{pq}\sin p\frac{\pi x}{a}\sin q\frac{\pi y}{b}.\right]dxdy=$$

$$=\frac{\pi^2 ab}{4}\sum_{p=1}^{n}\sum_{q=1}^{m}\left(\frac{p^2}{a^2}+\frac{q^2}{b^2}\right)a_{pq}^2+\frac{ab}{2}\sum_{p=1}^{n}\sum_{q=1}^{m}a_{pq}\beta_{pq}.$$

Этот результат легко получить, если принять во внимание, что координатные функции $\sin p\frac{\pi x}{a}\sin q\frac{\pi y}{b}$ $\quad (p,q=1,2...)$ образуют в области D ортогональную систему, то есть

$$\iint_D \sin p\frac{\pi x}{a}\sin q\frac{\pi y}{b}\sin p_1\frac{\pi x}{a}\sin q_1\frac{\pi y}{b}dxdy=0$$

при любых целых положительных p,q,p_1,q_1, за исключением случая $p=p_1, q=q_1$. При $p=p_1, q=q_1$ получаем

$$\iint_D \sin^2 p\frac{\pi x}{a}\sin^2 q\frac{\pi y}{b}dxdy=\frac{ab}{4}.$$

Поэтому из всех членов, стоящих под знаком двойного интеграла, равного $\upsilon[z_{nm}]$, надо учитывать лишь те, которые содержат квадраты функций $\sin p\frac{\pi x}{a}\sin q\frac{\pi y}{b}$, $\sin p\frac{\pi x}{a}\cos q\frac{\pi y}{b}$, $\cos p\frac{\pi x}{a}\sin q\frac{\pi y}{b}$. Очевидно, $\upsilon[z_{nm}]$ является функцией $\varphi(a_{11},a_{12},...,a_{nm})$ коэффициентов $a_{11},a_{12},...,a_{nm}$, которые определяются из основного необходимого условия экстремума

$$\frac{\partial\varphi}{\partial a_{pq}}=0 \qquad (p=1,2,...n; \quad q=1,2,...,m)$$

Эта система уравнений в данном случае имеет вид

$$a_{pq}\left(\frac{p^2}{a^2}+\frac{q^2}{b^2}\right)\pi^2+\beta_{pq}=0 \qquad (p=1,2,...,n;\quad q=1,2,...,m)$$

откуда
$$a_{pq}=-\frac{\beta_{pq}}{\pi^2\left(\frac{p^2}{a^2}+\frac{q^2}{b^2}\right)}.$$

Следовательно,

$$z_{nm}=-\frac{1}{\pi^2}\sum_{p=1}^{n}\sum_{q=1}^{m}\frac{\beta_{pq}}{\frac{p^2}{a^2}+\frac{q^2}{b^2}}\sin p\frac{\pi x}{a}\sin q\frac{\pi y}{b}$$

Переходя к пределу при n и m, стремящимся к бесконечности, в данном случае получим точное решение:

$$z=-\frac{1}{\pi^2}\sum_{p=1}^{\infty}\sum_{q=1}^{\infty}\frac{\beta_{pq}}{\frac{p^2}{a^2}+\frac{q^2}{b^2}}\sin p\frac{\pi x}{a}\sin q\frac{\pi y}{b}.$$

Метод Канторовича.

При применении метода Ритца к функционалам $\upsilon[z(x_1,x_2,...,x_n)]$, зависящим от функций нескольких переменных, выбирается координатная система функций

$$W_1(x_1,x_2,...,x_n),\quad W_2(x_1,x_2,...,x_n),...,W_m(x_1,x_2,...,x_n),...$$

и приближенное решение вариационной задачи ищется в виде

$$z_m=\sum_{k=1}^{m}a_kW_k(x_1,x_2,...,x_n)$$

где коэффициенты a_k - постоянные.

Метод Канторовича также требует выбора координатной системы функций $W_1(x_1,x_2,...,x_n),\quad W_2(x_1,x_2,...,x_n),...,W_m(x_1,x_2,...,x_n),...$

И приближенное решение также ищется в виде

$$z_m=\sum_{k=1}^{m}a_k(x_i)W_k(x_1,x_2,...,x_n)$$

однако коэффициенты $a_k(x_i)$ не постоянные, а являются неизвестными функциями одной из независимых переменных. Функционал $\upsilon[z]$ на классе функций вида

$$z_m = \sum_{k=1}^{m} a_k(x_i) W_k(x_1, x_2, ..., x_n)$$

превращается в функционал $\tilde{\upsilon}[a_1(x_i), a_2(x_i), ..., a_m(x_i)]$, зависящий от m функций одной независимой переменной $a_1(x_i), a_2(x_i), ..., a_m(x_i)$ выбираются так, чтобы функционал $\tilde{\upsilon}$ достигал экстремума.

Если после этого перейти к пределу при $m \to \infty$, то при некоторых условиях можно получить точное решение, если же предельного перехода не осуществлять, то этим методом будет получено приближенное решение и притом, вообще говоря, значительно более точное, чем при применении метода Ритца, с теми же координатными функциями и с тем же числом членов m.

Большая точность этого метода вызвана тем, что класс функций

$$z_m = \sum_{k=1}^{m} a_k W_k(x_1, x_2, ..., x_n)$$

при постоянных a_k и, следовательно, среди функций вида

$$z_m = \sum_{k=1}^{m} a_k(x_i) W_k(x_1, x_2, ..., x_n)$$

можно подобрать функции, лучше аппроксимирующие решение вариационной задачи, чем среди функций вида $z_m = \sum_{k=1}^{m} a_k W_k(x_1, x_2, ..., x_n)$ где a_k - постоянны.