ВАРІАЦІЙНІ ПРИНЦИПИ В МЕХАНІЦІ

Принцип Гамільтона-Остроградського

Нехай задана система n матеріальних точок $M_k(x_k, y_k, z_k)$, $k = \overline{1, n}$, маси яких відповідно дорівнюють m_k, $k = \overline{1, n}$. Покладемо, що рух системи є підпорядкованим зв'язкам

$\varphi_j(x, y, z, t) = 0$, $j = \overline{1, m}$, де $m \le n$, (6.1)

і відбувається під дією сил $F_k(X_k, Y_k, Z_k)$, $k = \overline{1, n}$, що мають потенціал (силову функцію) $U = U_k(x_k, y_k, z_k, t)$:

$$X_k = \frac{\partial U}{\partial x_k},\ Y_k = \frac{\partial U}{\partial y_k},\ Z_k = \frac{\partial U}{\partial z_k}.$$

Кінетична енергія такої системи дорівнює

$$T = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} m_k\left(\dot{x}_k^2 + \dot{y}_k^2 + \dot{z}_k^2\right).$$

Нехай з деякого стану A, що відповідає моменту часу $t = t_0$, указана система перемістилася до моменту часу $t = t_0$ у стан B. Серед усіх можливих переміщень системи з A у B вибирається клас можливих рухів, а саме тих рухів, що є сумісними з даними зв'язкам і у даний інтервал часу $[t_0, t_1]$ переводять систему із A у B.

Дійсний рух системи з положення A у положення B задовольняє необхідну умову $\delta J = 0$ екстремуму інтеграла

$$J = \int_{t_0}^{t_1} (T + U) dt \quad . \qquad (6.2)$$

Кожному допустимому руху системи відповідає $3n$ функцій $x_k(t)$, $y_k(t)$, $z_k(t)$, $k = \overline{1, n}$, що визначені в інтервалі $[t_0, t_1]$, задовольняють рівняння (6.1) і мають задані значення на кінцях інтервалу $[t_0, t_1]$. Таким чином, маємо варіаційну задачу із зв'язками (6.1) і фіксованими границями.

Для розв'язування такої задачі складається допоміжна функція Лагранжа

$$F = T + U + \sum_{j=1}^{m} \lambda_j(t)\varphi_j$$

і для неї записується система рівнянь Ейлера-Остроградського:

$$m_k\ddot{x}_k - X_k - \sum_{j=1}^{m} \lambda_j(t)\frac{\partial \varphi_j}{\partial x_k} = 0,$$

$$m_k\ddot{y}_k - Y_k - \sum_{j=1}^{m} \lambda_j(t)\frac{\partial \varphi_j}{\partial y_k} = 0, \qquad (6.3)$$

$$m_k\ddot{z}_k - Z_k - \sum_{j=1}^{m} \lambda_j(t)\frac{\partial \varphi_j}{\partial z_k} = 0.$$

Рівняння (6.3) співпадають з диференціальними рівняннями дійсного руху системи.

Принцип найменшої дії у формі Лагранжа

Нехай зв'язки φ_j і потенціал U не залежать від часу t. У такому випадку має місце інтеграл енергії $T - U = h = const$. Інтеграл

$$J = \int_{t_0}^{t_1} T dt$$

називається дією. З інтеграла (6.2) випливає, що

$$\int_{t_0}^{t_1}(T+U)dt = 2\int_{t_0}^{t_1}Tdt - \int_{t_0}^{t_1}hdt.$$

Для дійсного руху згідно з принципом Гамільтона-Остроградського інтеграл дії повинен мати мінімальне значення:

$$J = \int_{t_0}^{t_1}Tdt = \min.$$

Принципу найменшої дії можна дати форму Якобі:

$$\int_{\gamma}\sqrt{2(U+h)}ds = \min$$

($ds-$ диференціал дуги), де час є виключеним.

Зауваження 1. Тут вважаються допустимими такі рухи, якізадовольняють рівняння зв'язків $\varphi_j(x,y,z)=0 \quad j=\overline{1,m}$ і рівняння $T-U=h$ з тим же значенням h, що й для дійсного руху, і які мають фіксовані початкове і кінцеве положення і фіксований початковий момент часу t_0. Кінцевий момент часу для них не є фіксованим.

Зауваження 2. Потенційна енергія входить не в інтеграл, а у додаткову умову $T-U=h$. Складаємо допоміжну функцію Лагранжа

$$F = \frac{1}{2}T + \frac{1}{2}(U+h) + \sum_{j=1}^{m}\lambda_j\varphi_j.$$

Потім пишемо рівняння Ейлера-Остроградського нашої задачі, що є рівняннями дійсного руху:

$$m_k\ddot{x}_k = \frac{\partial U}{\partial x_k} + 2\sum_{j=1}^{m}\lambda_j\frac{\partial\varphi_j}{\partial x_k} = 0,$$

$$m_k\ddot{y}_k = \frac{\partial U}{\partial y_k} + 2\sum_{j=1}^{m}\lambda_j\frac{\partial\varphi_j}{\partial y_k} = 0,$$

$$m_k\ddot{z}_k = \frac{\partial U}{\partial z_k} + 2\sum_{j=1}^{m}\lambda_j\frac{\partial\varphi_j}{\partial z_k} = 0.$$