Приклади розв'язування задач за темою „Варіаційні задачі на умовний екстремум"

Приклад 1. За допомогою методів варіаційного числення знайти найкоротшу відстань між точками $A(1,-1,0)$ і $B(2,1,-1)$, що лежать на поверхні $15x-7y+z-22=0$.

Розв'язування. Відомо, що відстань між двома точками $A(x_0,y_0,z_0)$ і $B(x_1,y_1,z_1)$ на поверхні $\varphi(x,y,z)=0$ визначається за формулою

$$J[y(x),z(x)]=\int_{x_0}^{x_1}\sqrt{1+y'^2+z'^2}\,dx,$$

де $y=y(x),\ \ z=z(x)$.

Треба знайти мінімум функціонала $J[y(x),z(x)]$ при умові $\varphi(x,y,z)=0$. У цьому випадкові

$$x_0=1,\ \ x_1=2,\ \ \varphi(x,y,z)=15x-7y+z-22.$$

Складають допоміжний функціонал

$$J^*=\int_1^2\left[\sqrt{1+y'^2+z'^2}+\lambda(x)(15x-7y+z-22)\right]dx$$

та записують для нього рівняння Ейлера:

$$\lambda(x)\cdot(-7)-\frac{d}{dx}\left(\frac{y'}{\sqrt{1+y'^2+z'^2}}\right)=0, \qquad (5.11)$$

$$\lambda(x)\cdot 1-\frac{d}{dx}\left(\frac{z'}{\sqrt{1+y'^2+z'^2}}\right)=0. \qquad (5.12)$$

Розв'язують систему рівнянь (5.11), (5.12), застосовуючи умову зв'язку

$$15x-7y+z-22=0. \qquad (5.13)$$

Шукані функції $y=y(x)$ і $z=z(x)$ задовольняють наступні граничні умови:

$$y(1)=-1,\ \ y(2)=1;\ \ z(1)=0,\ \ z(2)=-1. \qquad (5.14)$$

Якщо помножити рівняння (5.12) на 7 та скласти із (5.11), отримують

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{y'+7z'}{\sqrt{1+y'^2+z'^2}}\right)=0,$$

звідки

$$\frac{y'+7z'}{\sqrt{1+y'^2+z'^2}}=C_1. \qquad (5.15)$$

Із (5.13) мають

$$z'=7y'-15. \qquad (5.16)$$

Якщо підставити це значення z' у (5.15) та розв'язати отримане диференціальне рівняння, знаходять, що $y(x)=\tilde{C}_1x+C_2$. Граничні умови (5.14) дають $\tilde{C}_1=2,\ \ C_2=-3$, так що

$$y(x)=2x-3. \qquad (5.17)$$

Із (5.16) з урахуванням (5.17) знаходять

$$z(x)=1-x \qquad (5.18)$$

(граничні умови для функції (5.18), очевидно, виконуються).

Із (5.11) або (5.12) дістають $\lambda(x)\equiv 0$. Шукана відстань

$$J[y(x),z(x)]=\int_1^2\sqrt{1+y'^2+z'^2}\,dx=\sqrt{6}.$$

Цей результат можна легко отримати, використовуючи методи аналітичної геометрії.

Відповідь. Відстань дорівнює $\sqrt{6}$.

Приклад 2. Знайти екстремаль в ізопериметричній задачі про екстремум функціонала

$$J[y(x),z(x)]=\int_0^1\left(y'^2+z'^2-4xz'-4z\right)dx,$$

$$y(0)=0,\ \ z(0)=0,\ \ y(1)=1,\ \ z(1)=1,$$

при умові

$$\int_0^1\left(y'^2-xy'-z'^2\right)dx=2\,. \qquad (5.19)$$

Розв'язування. Складають допоміжний функціонал

$$\Phi=\int_0^1\left[y'^2+z'^2-4xz'-4z+\lambda\left(y'^2-xy'-z'^2\right)\right]dx$$

та записують для нього систему рівнянь Ейлера

$$-\frac{d}{dx}\left(2y'+2\lambda y'-\lambda x\right)=0,$$

$$-4-\frac{d}{dx}\left(2z'-4x-2\lambda z'\right)=0,$$

розв'язуючи яку, дістають

$$y(x)=\frac{\lambda x^2+2C_1x}{4(1+\lambda)}+C_2,$$

$$z(x)=\frac{C_3x}{2(1-\lambda)}+C_4.$$

Граничні умови дають

$$C_1=\frac{3\lambda+4}{2},\ C_2=0,\ C_3=2(1-\lambda),\ C_4=0,$$

так що

$$y(x)=\frac{\lambda x^2+(3\lambda+4)x}{4(1+\lambda)},$$

$$z(x)=x.$$

Для знаходження λ використовують ізопериметричну умову (5.19). Оскільки $y'(x)=\dfrac{2\lambda x+3\lambda+4}{4(1+\lambda)}$, а $z'(x)=1$, то отримують

$$\int_0^1\left[\frac{(2\lambda x+3\lambda+4)^2}{16(1+\lambda)^2}-\frac{(2\lambda x+3\lambda+4)x}{4(1+\lambda)}-1\right]dx=2\,,$$

звідки мають рівняння для визначення λ:

$$\frac{1}{3}\left(23\lambda^2+46\lambda+24\right)=48\left(\lambda^2+2\lambda+1\right).$$

Звідси $\lambda_1=-10/11$ і $\lambda_2=-12/11$. Підстановкою у (5.19) переконуються, що $\lambda_2=-12/11$ ізопериметричну умову не задовольняє, а $\lambda_1=-10/11$ задовольняє.

Шукана екстремаль визначається рівняннями

$$\begin{cases} y(x)=\dfrac{7x-5x^2}{2}, \\ z(x)=x. \end{cases}$$

Відповідь. Екстремаль задачі $\begin{cases} y(x)=\dfrac{7x-5x^2}{2}, \\ z(x)=x. \end{cases}$

Завдання для самостійного розв'язування

1. Відшукати найкоротшу відстань між точками $A(0,0,3)$ і $B(1,1,-1)$ на поверхні $2x+2y+z-3=0$.
2. Відшукати найкоротшу відстань між точками $A(1,0,-1)$ і $B(0,-1,1)$ на поверхні $x+y+z=0$.

3. Відшукати найкоротшу відстань між точками $A(-5,1,1)$ і $B(1,1,-1)$ на поверхні $x+2y+3z=0$.
4. Знайти екстремаль задачі Лагранжа: $J[y,z]=\int\limits_0^1 \left(y'^2+z\right)dx \to extr$, $y(0)=1$, $z(0)=1,\ y(1)=e,\ \ z(1)=e^2+1$, якщо $z-y^2-x=0$.
5. Знайти екстремаль задачі Лагранжа: $J[y,z]=\int\limits_0^1 \left(y'^2+z^2\right)dx \to extr$, $y(0)=0$, $z(0)=1,\ y(1)=1,\ \ z(1)=\sqrt{2}$, якщо $y-z^2+1=0$.
6. Знайти екстремаль задачі Лагранжа: $J[y,z]=\int\limits_0^{\pi/2} \left(y-z'^2\right)dx \to extr$, $y(0)=3$, $z(0)=1,\ y(\pi/2)=2,\ \ z(\pi/2)=0$, якщо $y-z^2-2=0$.
7. Знайти екстремаль задачі Лагранжа: $J[y,z]=\int\limits_0^1 \left(y'^2+z^2+x\right)dx \to extr$, $y(0)=0$, $z(0)=1,\ y(1)=e,\ \ z(1)=\sqrt{e^2+1}$, якщо $y^2-z^2+1=0$.
8. Знайти найкоротшу відстань між двома точками $A(x_0,y_0,z_0)$ і $B(x_1,y_1,z_1)$ на поверхні $\varphi(x,y,z)=0$ (у загальному вигляді).
9. Знайти екстремаль в ізопериметричній задачі $J[y]=\int\limits_0^1 y'^2dx \to extr$, $y(0)=1$, $y(1)=6$, $\int\limits_0^1 ydx=3$.
10. Знайти екстремаль в ізопериметричній задачі $J[y]=\int\limits_0^1 \left(y'^2+x^2\right)dx \to extr$, $y(0)=0$, $y(1)=0$, $\int\limits_0^1 y^2dx=2$.
11. Знайти екстремаль в ізопериметричній задачі $J[y]=\int\limits_0^1 y'^2dx \to extr$, $y(0)=0$, $y(1)=\frac{1}{4}$, $\int\limits_0^1 \left(y-y'^2\right)dx=\frac{1}{12}$.

Питання для самоконтролю

1. Сформулювати задачу Лагранжа.
2. Дати визначення неголономних і голономних в’язей у механіці.
3. Сформулювати ізопериметричну задачу.