

Приклади розв'язування задач за темою „Варіаційні принципи в механіці”

Приклад. Виходячи з принципу найменшої дії, визначити траєкторію руху матеріальної точки одиничної маси під дією сили тяжіння.

Розв'язування. Спрямуємо вісь OY вгору. Тоді потенціал сили тяжіння $U = -gy$.

$$(6.4)$$

Згідно з принципом найменшої дії на траєкторії γ руху інтеграл дії

$$\int_{\gamma} \sqrt{2(U+h)} ds \rightarrow \min. \quad (6.5)$$

Отже, траєкторія точки буде екстремаллю функціонала (6.5). Якщо підставити (6.4) у (6.5), отримаємо

$$J = \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{2(h-gy)} \sqrt{1+y'^2} dx. \quad (6.6)$$

Рівняння Гамільтона-Якобі має вигляд

$$\frac{\partial W}{\partial x} - \sqrt{2h-2gy - \left(\frac{\partial W}{\partial x}\right)^2} = 0$$

або

$$\left(\frac{\partial W}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial W}{\partial y}\right)^2 = 2(h-gy).$$

Його повний інтеграл

$$W = Ax + \int \sqrt{2h-2gy-A^2} dy = Ax - \frac{1}{3g} (2h-2gy-A^2)^{3/2} + B,$$

де A, B – константи.

Отже, екстремалі функціонала (6.6) задовольняють рівняння

$$x + \frac{A}{g} (2h-2gy-A^2)^{1/2} = C,$$

звідки

$$y = \frac{h}{g} - \frac{A^2}{2g} - \frac{g}{2A^2} (x-C)^2,$$

де A, C – константи.

Якщо екстремалі проходять через початок координат, то $y(0) = 0$, і рівняння має вигляд

$$y = -\frac{g}{2A^2} x^2 + \frac{\sqrt{2h-A^2}}{A} x. \quad (6.7)$$

Відповідь. Траєкторія руху матеріальної точки описується однопараметричною множиною парабол (6.7).

6.3 Завдання для самостійного розв'язування

1. Вивести диференціальне рівняння вільних коливань струни.
2. Вивести диференціальне рівняння коливань прямого стрижня.
3. Побудувати траєкторію руху точки в площині під дією сили відштовхування від осі OX , пропорційної відстані точки від цієї осі і спрямованої паралельно осі OY за умови, що інтеграл живої сили має вигляд

$$\frac{v^2}{2} - \frac{y^2}{2} = 0,$$

а інтеграл дії дорівнює

$$\int_{x_1}^{x_2} y \sqrt{1+y'^2} dx, \quad y > 0.$$

4. Матеріальна точка описує коло $\rho = 2R \cos \varphi$ (ρ, φ – полярні координати) радіуса R під дією центральної сили k/ρ^5 . Показати, що на будь-якій дузі кола $(-\pi/2 < \varphi_1 \leq \varphi \leq \varphi_2 < \pi/2)$ інтеграл дії досягає сильного мінімуму.
5. Визначити траєкторію руху матеріальної точки під дією центральної сили притягання, що пропорційна відстані від центра, виходячи з принципу найменшої дії та застосовуючи метод Гамільтона-Якобі.

Питання для самоконтролю

1. Сформулювати принцип Гамільтона-Остроградського.
Сформулювати принцип найменшої дії у формі Лагранжа.