ВІДПОВІДІ

(для завдань для самостійного розв'язування)

1. 1. $y=-x^3$. 2. $y=C_2\sin x+x\sin x$. 3. Екстремалей немає. Рівняння Ейлера не має розв'язків. 4. Інтеграл не залежить від шляху інтегрування. Варіаційна задача не має сенсу. 5. $y=x-1$. 6. $y=\frac{5}{4}x-\frac{x^2}{4}$. 7. $x=C_1t+C_2$, $y=C_1cht$. 8. $x=\frac{C_1}{2}(2t-\sin 2t)+C_2$, $y=\frac{C_1}{2}(1-\cos 2t)$. 9. $y_1=x$, $y_2=\frac{sh(x-1)}{sh1}$. 10. $y_1=C_2\sin x-\frac{x}{\pi}\cos x$, $y_2=C_2\sin x+\frac{1}{\pi}(2\sin x-x\cos x)$. 11. $y_1=\sin 2x$, $y_2=-\frac{x^2}{2}+$ $+\frac{32+\pi^2}{8\pi}x$. 12. $y_1=-\frac{1}{6}\left(x^3+5x-6\right)$, $y_2=x$. 13. $y=C_1e^{2x}+$ $+C_2e^{-2x}+C_3\cos 2x+C_4\sin 2x$ 14. $y=shx$. 15. $y=(1-x)shx$. 16. $y=\frac{x^3}{6}\left(x^3+6x+1\right)$. 17. $\Delta\Delta z=f(x,y)$. 18. $\frac{\left(1+q^2\right)r-2pqs+\left(1+p^2\right)t}{\left(1+p^2+q^2\right)^{3/2}}=$ $=0$, де $r=\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$, $s=\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$, $t=\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$.

2. 1. Функціонал може мати екстремум на відрізку [0, 3] осі абсцис $y=0$ і на дузі параболи $y^2=-4x$. 2. $y=\pm\sqrt{10x-x^2}$. 3. $y=-\frac{x^2}{4}+1$. 4. $\frac{4}{\sqrt{5}}$. 5. $2\sqrt{2}-1$. 6. $y=\frac{y_1}{\sin x_1}\sin x$, $x_1\approx 1{,}83$, $y_1\approx 1{,}05$. 7. $\sqrt{20}$. 8. $\frac{\sqrt{10}}{10}$. 10. $\sqrt{17+4\sqrt{6}}\left(\frac{5}{2}-\sqrt{6}\right)$. 11. $\frac{\sqrt{11}}{2}$. 12. Якщо $\cos x_1\neq 0$, то екстремум може досягатися лише на прямій $\begin{cases}y=0\\ z=0\end{cases}$. Якщо $\cos x_1=0$, тобто $x_1=\frac{\pi}{2}+n\pi$, де $n-$ ціле число, то $\begin{cases}y=C_4\sin x\\ z=-C_4\sin x\end{cases}$. 13. 1.

3. 1. $y=\begin{cases}x, & 0\le x\le 3\\ 6-x, & 3\le x\le 4\end{cases}$ і $y=\begin{cases}-x, & 0\le x\le 1\\ x-2, & 1\le x\le 4\end{cases}$. 2. Ломаних екстремалей не існує. 3. $y=\begin{cases}x, 0\le x\le 1\\ 1, 1\le x\le 2\end{cases}$ і $y=\begin{cases}x, & 0\le x\le 1\\ x-1, & 1\le x\le 2\end{cases}$. 4. $y=\begin{cases}-x, & 0\le x\le 1\\ x-2, & 1\le x\le 4\end{cases}$ і $y=\begin{cases}x, & 0\le x\le 3\\ -x+6, & 3\le x\le 4\end{cases}$. 5. Ломаних екстремалей не існує. 6. $y=\begin{cases}0, -1\le x\le 0\\ x, 0\le x\le 1\end{cases}$. 7. Екстремум може досягатися на гладких кривих. 8. $y=\begin{cases}0, & 3\le x\le \frac{19}{5}\\ \frac{(5x-17)^2}{4}-\frac{y^2}{4}=1, & \frac{19}{5}\le x\le 4\end{cases}$. 9. Ломаних екстремалей не існує.

4. 1. $y=-\frac{x^2}{4}+1$, сильний мінімум. 2. $y=0$, сильний мінімум. 3. $y=-\frac{4}{x}+7$, сильний мінімум. 4. $y=\sin 2x-1$, сильний максимум. 5. $y=x^3$, сильний мінімум. 6. $y=\frac{\ln(1+x)}{\ln 2}$, сильний мінімум. 7. $y=\frac{b}{a}x$, слабкий мінімум. 8. $y=x-1$, слабкий мінімум. 9. Слабкий мінімум на $y=\frac{b}{a}x$ при $|b|\langle\frac{a}{\sqrt{2}}$; слабкий максимум на $y=\frac{b}{a}x$ при $|b|\rangle\frac{a}{\sqrt{2}}$; при $|b|=\frac{a}{\sqrt{2}}$ екстремум не досягається. 10. Сильний мінімум на циклоїді $x=R(t-\sin t)$, $y=R(1-\cos t)$ для $a\langle 2\pi R$. 11. Екстремум на неперервних кривих не досягається.

5. 1. $3\sqrt{2}$, 2. $\sqrt{6}$, 3. $2\sqrt{10}$, 4. $y=e^x$, $z=e^{2x}+x$, 5. $y=\frac{x^2}{4}+\frac{3}{4}x$,

$z=\sqrt{\frac{x^2}{4}+\frac{3}{4}x+1}$. 6. $y=2+\cos^2 x$, $z=\cos x$. 7. $y=\frac{e^2}{e^2-1}\left(e^x-e^{-x}\right)$,

$z=\sqrt{\left(\frac{e^2}{e^2-1}\left(e^x-e^{-x}\right)\right)^2+1}$. 9. $y=3x^2+2x+1$. 10. $y=\pm 2\sin n\pi x$, $n\in Z$. 11. $y=\frac{1}{4}\left(2x-x^2\right)$.

6. 3. Ланцюгова лінія.

4. Вказівка. Інтеграл дії $J=\int\sqrt{k/\rho^4+2h}\sqrt{\rho^2+\rho'^2}\,d\varphi$.

5. Траєкторії – еліпси $\frac{x^2}{C}+\frac{2y^2}{2h-C}-\frac{2\cos\beta}{\sqrt{C(2h-C)}}xy=\frac{\sin^2\beta}{k}$.