УМОВИ ТА ВАРІАНТИ ІНДИВІДУАЛЬНОГО ЗАВДАННЯ

Умови індивідуального завдання.

1,2.– Розв'язати найпростішу задачу варіаційного числення.

3. – Визначити допустимі екстремалі функціонала, що залежить від n функцій однієї змінної (В.1–12), та функціонала, що залежить від похідних вищого порядку (В.13–20).

4. – Використовуючи умови Вейєрштрасса та Лежандра, дослідити функціонал на екстремум.

5. – Відшукати допустимі екстремалі у варіаційній задачі з рухомими границями.

6. – Відшукати ломані екстремалі функціонала (В.1–12); розв'язати задачу Лагранжа (В.13–20). У варіантах 13–15, 20 задачу розв'язати двома способами: за допомогою методів варіаційного числення та методів аналітичної геометрії.

7. – Розв'язати ізопериметричну задачу.

Варіант 1

1. $\int\limits_0^1 y'^2 dx \to extr;\ \ y(0)=1,\ \ y(1)=0.$

2. $\int\limits_0^{1/2} \frac{\sqrt{1+y'^2}}{y} dx \to extr;\ \ y(0)=1,\ \ y(1/2)=\sqrt{3}/2.$

3. $\int\limits_1^2 \left(y_1'^2 + y_2^2 + y_2'^2\right) dx \to extr;\ \ y_1(1)=1,\ y_1(2)=2,\ \ y_2(1)=0,\ y_2(2)=1.$

4. $J[y(x)] = \int\limits_0^2 \left(xy' + y'^2\right) dx \to extr,\quad y(0)=1,\quad y(2)=0.$

5. Дослідити на екстремум функціонал $J[y(x)] = \int\limits_0^{x_1} y^2 y'^2 dx$ при умові, що один кінець допустимих кривих є зафіксованим у точці $(0,0)$, а другий кінець

   рухається по прямій $y = \frac{1}{2}(3-x)$.

6. $J[y(x)] = \int\limits_0^4 \left(y'^4 - 2y'^2\right) dx \to extr,\quad y(0)=0,\quad y(4)=2.$

7. $\int\limits_0^1 y'^2 dx \to extr;\ \int\limits_0^1 y dx = 3,\ y(0)=1,\ y(1)=0.$

Варіант 2

1. $\int\limits_0^a y'^2 dx \to extr;\ \ y(0)=0,\ \ y(a)=b.$

2. $\int\limits_{1/2}^1 \frac{\sqrt{1+y'^2}}{y} dx \to extr;\ \ y(1/2)=\sqrt{3}/2,\ \ y(1)=1.$

3. $\int\limits_0^\pi \left(2y_1y_2 - 2y_1^2 + y_1'^2 - y_2'^2\right) dx \to extr;\ \ y_1(0)=0,\ y_1(\pi)=1,\ \ y_2(0)=0,$
$y_2(\pi)=-1.$

4. $J[y(x)] = \int\limits_0^a \left(y'^2 + 2yy' - 16y^2\right) dx \to extr,\ a>0,\ \ y(0)=0,\ \ \ y(a)=0.$

5. Знайти найкоротшу відстань від точки $M(2,0,5)$ до поверхні $z = x^2 + y^2$.

6. $J[y(x)] = \int\limits_{x_0}^{x_1} \left(y'^2 + 2xy - y^2\right) dx \to extr,\ \ \ y(x_0)=y_0,\ \ \ y(x_1)=y_1.$

7. $\int\limits_0^1 x(y_1 - y_2)\, dx \to extr;\ \int\limits_0^1 y_1' y_2' dx = -4/5,\ y_1(0)=y_2(0)=y_2(1)=0,\ y_1(1)=2.$

Варіант 3

1. $\int\limits_0^1 \left(y - y'^2\right) dx \to extr;\ \ y(0)=y(1)=0.$

2. $\int\limits_{x_0}^{x_1} \frac{\sqrt{1+y'^2}}{y} dx \to extr;\ \ y(x_0)=y_0,\ \ y(x_1)=y_1.$

3. $\int\limits_0^{\pi/4} \left(2y_2 - 4y_1^2 + y_1'^2 - y_2'^2\right) dx \to extr;\ \ y_1(0)=0,\ y_1(\pi/4)=1,\ \ y_2(0)=0,$
$y_2(\pi/4)=1.$

4. $J[y(x)] = \int\limits_1^2 y'\left(1 + x^2 y'\right) dx \to extr,\ \ \ y(1)=3,\ \ \ y(2)=5.$

5. Дослідити на екстремум функціонал

$$J[y(x)] = \int_0^{x_1} \frac{\sqrt{1+y'^2}}{y} dx \to extr; \quad y(0)=0, \quad y_1 = x_1 - 5.$$

6. $J[y(x)] = \int_0^2 y'^2 (y'-1)^2 \, dx \to extr, \quad y(0)=0, \quad y(2)=1.$

7. $\int_0^1 (y_1 + y_2) dx \to extr;\ \int_0^1 y_1' y_2' dx = 0,\ y_1(0) = y_2(0) = 0,\ y_1(1) = 1,\ y_2(1) = -3.$

Варіант 4

1. $\int_0^a \left(y'^2 - y\right) dx \to extr;\ \ y(0)=0,\ \ y(a)=b.$

2. $\int_0^{\pi/2} \left(y'^2 - y^2 + 4y\cos x\right) dx \to extr;\ \ y(0)=0,\ \ y(\pi/2) = \pi/2.$

3. $\int_{-1}^1 \left(2xy_1 - y_1'^2 + y_2'^3/3\right) dx \to extr;\ \ y_1(1)=0,\ y_1(-1)=2,\ \ y_2(1)=1,$ $y_2(-1) = -1.$

4. $J[y(x)] = \int_{-1}^2 y'\left(1 + x^2 y'\right) dx \to extr, \quad y(-1)=1, \quad y(2)=1.$

5. Знайти криву, на якій реалізується екстремум функціонала $J[y(x)] = \int_0^2 \left(xy' + y'^2\right) dx$ при умові, що лівий кінець її знаходиться у точці $A(0,1)$, а правий – на прямій $x = 2$.

6. $J[y(x)] = \int_0^4 (y'-1)^2 (y'+1)^2 \, dx \to extr, \quad y(0)=0, \quad y(4)=2.$

7. $\int_0^1 y_1' y_2' dx \to extr;\ \int_0^1 x y_1 dx = \int_0^1 x y_2 dx = 0,\ y_1(0) = y_1(1) = y_2(0) = 0,\ y_2(1) = 1.$

Варіант 5

1. $\int_0^1 \left(y'^2 + xy\right) dx \to extr;\ \ y(0) = y(1) = 0.$

2. $\int_0^{\pi/2} \left(y'^2 - y^2 + 4y\cos x\right) dx \to extr;\ \ y(0) = y(\pi/2) = 0.$

3. $\int\limits_0^1 \left(y_1'^2 + y_2'^2 + 2y_1\right)dx \to extr;\ \ y_1(0)=1,\ y_1(1)=3/2,\ \ y_2(0)=0,\ y_2(1)=1.$

4. $J[y(x)] = \int\limits_0^{\pi/4} \left(4y^2 - y'^2 + 8y\right)dx \to extr,\quad y(0)=-1,\quad y(\pi/4)=0.$

5. Знайти найкоротшу відстань від точки $A(1,0)$ до еліпсу $4x^2 + 9y^2 = 36$.

6. $J[y(x)] = \int\limits_{x_0}^{x_1} \left(y'^2 + 4x^2 y - 3y^2\right)dx \to extr,\quad y(x_0)=y_0,\quad y(x_1)=y_1.$

7. $\int\limits_0^1 y_1' y_2' dx \to extr;\ \int\limits_0^1 y_1 dx = 1,\ y_1(0)=y_1(1)=0,\ \int\limits_0^1 y_2 dx = 0,\ y_2(0)=0,$
$y_2(1)=1.$

Варіант 6

1. $\int\limits_0^1 \left(x^2 y - y'^2\right)dx \to extr;\ \ y(0)=y(1)=0.$

2. $\int\limits_0^{\pi/2} \left(4y\sin x + y^2 - y'^2\right)dx \to extr;\ \ y(0)=y(\pi/2)=0.$

3. $\int\limits_a^b \left(2y_1\cos x + 2y_2^2 + 2y_1' y_2' + y_1'^2 + y_2'^2\right)dx \to extr.$

4. $J[y(x)] = \int\limits_1^2 \left(x^2 y'^2 + 12y^2\right)dx \to extr,\quad y(1)=1,\quad y(2)=8.$

5. Знайти найкоротшу відстань між колом $x^2 + y^2 = 1$ та прямою $x + y = 4$.

6. $J[y(x)] = \int\limits_3^4 \frac{(yy')^2}{4+y^2}dx \to extr,\quad y(3)=0,\quad y(4)=\sqrt{5}.$

7. $\int\limits_0^1 y'^2 dx \to extr;\ \int\limits_0^1 (y - y')^2 dx = 1/12,\ y(0)=0,\ y(1)=1/4.$

Варіант 7

1. $\int\limits_0^a y'^3 dx \to extr;\ \ y(0)=0,\ \ y(a)=b.$

2. $\int\limits_0^{\pi/2} \left(6y\sin 2x + y^2 - y'^2\right)dx \to extr;\ \ y(0)=y(\pi/2)=0.$

3. $\int\limits_0^1 \left(y_1'^2 + y_2'^2 - 2y_1y_2\right)dx \to extr;\ \ y_1(0)=0,\ y_1(1)=sh1,\ \ y_2(0)=0,$
$y_2(1)=-sh1.$

4. $J[y(x)] = \int\limits_0^1 \left(y'^2 + y^2 + 2ye^{2x}\right)dx \to extr,\quad y(0)=1/3,\quad y(1)=e^2/3.$

5. Знайти найкоротшу відстань від точки $M(0,0,3)$ до поверхні $z = x^2 + y^2$.

6. $J[y(x)] = \int\limits_{-1}^1 y^2\left(1-y'^2\right)dx \to extr,\quad y(-1)=0,\quad y(1)=1.$

7. $\int\limits_0^{\pi/2} \left(y'^2 - y^2\right)dx \to extr;\ \ \int\limits_0^{\pi/2} y\sin x\,dx = 1,\ y(0)=y(\pi/2)=0.$

Варіант 8

1. $\int\limits_0^{3/2} \left(y'^3 + 2y\right)dx \to extr;\ \ y(0)=0,\ \ y(3/2)=1.$

2. $\int\limits_0^{\pi/2} \left(y'^2 - y^2 + 4y\,sh\,x\right)dx \to extr;\ \ y(0)=y(\pi/2)=0.$

3. $\int\limits_0^1 \left(y_1^2 + y_2^2 + 2y_1'y_2'\right)dx \to extr;\ \ y_1(0)=y_2(0)=0,\ \ y_1(1)=y_2(1)=sh1.$

4. $J[y(x)] = \int\limits_0^{\pi/4} \left(y^2 - y'^2 + 6y\sin 2x\right)dx \to extr,\quad y(0)=0,\quad y(\pi/4)=1.$

5. Знайти криву, на якій реалізується екстремум функціонала $J[y(x)] = \int\limits_0^2 \left(2xy + yy' + y'^2\right)dx$ при умові, що лівий кінець її знаходиться у точці $O(0,0)$, а правий – на прямій $x=2$.

6. $\int\limits_0^a \sin y'dx \to extr,\ \ y(0)=0,\quad y(a)=b.$

7. $\int\limits_0^{\pi} \left(y'^2 - y^2\right)dx \to extr;\ \ \int\limits_0^{\pi} y\cos x\,dx = 1,\ y(0)=y(\pi)=0.$

Варіант 9

1. $\int\limits_0^a \left(y'^3 - y'^2\right)dx \to extr;\ \ y(0)=0,\ \ y(a)=b.$

2. $\int\limits_0^{\pi/2} \left(y'^2 - y^2 - xy\right) dx \to extr;\ \ y(0) = y(\pi/2) = 0.$

3. $\int\limits_0^1 \left(y_1' y_2' + y_1 y_2\right) dx \to extr;\ \ y_1(0) = y_2(0) = 1,\ \ y_1(1) = e,\ y_2(1) = 1/e.$

4. $J[y(x)] = \int\limits_1^2 \frac{x^3}{y'^2} dx \to extr,\ \ \ y(1) = 1,\ \ \ y(2) = 4.$

5. Серед ліній, що з’єднують точку $O(0,0)$ з кривою $y^3 = 2 - x$ знайти ту, яка дає мінімум функціонала $J[y(x)] = \frac{1}{2}\int\limits_0^{x_1} \left(y'^2 - y^2\right) dx.$

6. Відшукати функції, на яких може досягати екстремуму функціонал $J[y(x)] = \int\limits_0^{10} y'^3 dx,\ \ y(0) = 0,\ \ y(10) = 0$ за умови, що допустимі криві не можуть потрапити всередину кола $(x-5)^2 + y^2 = 9.$

7. $\int\limits_1^2 x^3 y'^2 dx \to extr;\ \int\limits_1^2 y\, dx = 2,\ y(1) = 4,\ y(2) = 1.$

Варіант 10

1. $\int\limits_0^a \left(y'^3 + y'^2\right) dx \to extr;\ \ y(0) = 0,\ \ y(a) = b.$

2. $\int\limits_0^{\pi/2} \left(2y + y^2 - y'^2\right) dx \to extr;\ \ y(0) = y(\pi/2) = 0.$

3. $\int\limits_0^{\pi/2} \left(y_1' y_2' - y_1 y_2\right) dx \to extr;\ \ y_1(0) = y_2(0) = 0,\ \ y_1(\pi/2) = 1,\ y_2(\pi/2) = -1.$

4. $J[y(x)] = \int\limits_1^3 \left(12xy + y'^2\right) dx \to extr,\ \ \ y(1) = 0,\ \ \ y(3) = 26.$

5. Знайти найкоротшу відстань від точки $A(-1,5)$ до параболи $y^2 = x$.

6. Серед кривих, які з’єднують точки $A(x_0, y_0)$, $B(x_1, y_1)$, визначити таку, що дає екстремум функціонала $J[y(x)] = \int\limits_{x_0}^{x_1} y\sqrt{1 - y^2 y'^2}\, dx$ за умов $y \ge 0$, $1 - y^2 y'^2 \ge 0.$

7. $\int_0^1 \left(y'^2 + y^2\right)dx \to extr;\ \int_0^1 ye^{-x}dx = \left(1-3e^{-2}\right)/4,\ y(0)=0,\ y(1)=e^{-1}.$

Варіант 11

1. $\int_1^e xy'^2 dx \to extr;\ \ y(1)=0,\ \ y(e)=1.$
2. $\int_0^{\pi/4} \left(y'^2 - 4y^2\right)dx \to extr;\ \ y(0)=0,\ \ y(\pi/4)=1.$
3. $\int_0^1 \left(y_1' y_2' + 6xy_1 + 12x^2 y_2\right)dx \to extr;\ \ y_1(0)=y_2(0)=0,\ \ y_1(1)=y_2(1)=1.$
4. $J[y(x)] = \int_0^2 \left(y^2 + y'^2 - 2xy\right)dx \to extr,\ \ \ y(0)=0,\ \ \ y(2)=3.$
5. Знайти найкоротшу відстань від точки $A(-1,3)$ до прямої $y = 1-3x$.
6. Визначити умову відбиття променя світла, що йде з точки $A(x_0, y_0)$ в точку $B(x_2, y_2)$ зі швидкістю $v(x,y)$.
7. $\int_0^1 y'^2 dx \to extr;\ \int_0^1 ye^x dx = 0,\ y(0)=0,\ y(1)=1.$

Варіант 12

1. $\int_0^1 (1+x)y'^2 dx \to extr;\ \ y(0)=0,\ \ y(1)=1.$
2. $\int_0^{\pi/4} \left(4y^2 - y'^2\right)dx \to extr;\ \ y(0)=1,\ \ y(\pi/4)=0.$
3. $\int_1^{\pi/2} \left(y_1'^2 + y_3'^2 + 2y_1y_2 + 2y_2y_3\right)dx \to extr;\ \ y_1(0)=y_3(0)=1,\ \ y_2(0)=-1,$
   $y_1(\pi/2)=\pi/2,\ y_2(\pi/2)=0,\ y_3(\pi/2)=-\pi/2.$
4. $J[y(x)] = \int_0^1 e^x\left(y^2 + \frac{1}{2}y'^2\right)dx \to extr,\ \ \ y(0)=1,\ \ \ y(1)=e.$
5. Знайти найкоротшу відстань від точки $O(0,0,0)$ до сфери $x^2 + y^2 + z^2 = 1$.
6. У середовищі I швидкість поширення світла $v_1(x,y)$, а в середовищі II $-v_2(x,y)$. Середовища розділені кривою $y=\varphi(x)$. Відшукати умову заломлення променя світла, що йде з точки $A(x_0, y_0)$ середовища I в

точку $B(x_2, y_2)$ середовища II, знаючи, що промінь проходить шлях AB за найкоротший відрізок часу.

7. $\int\limits_0^1 y'^2 dx \to extr;\ \int\limits_0^1 ye^{-x}dx = e,\ y(1) = 2,\ y(0) = 2e+1.$

Варіант 13

1. $\int\limits_1^e \left(xy'^2 + 2y\right)dx \to extr;\ \ y(1) = 1,\ \ y(e) = 0.$

2. $\int\limits_0^{\pi/2} \left(y'^2 - y^2\right)dx \to extr;\ \ y(0) = 1,\ \ y(\pi/2) = 0.$

3. $\int\limits_0^{\pi} \left(y''^2 - y'^2\right)dx \to extr;\ \ y(0) = y'(0) = y'(\pi) = 0,\ y(\pi) = 1.$

4. $J[y(x)] = \int\limits_0^2 \left(e^{y'} + 3\right)dx \to extr,\ \ \ y(0) = 0,\ \ \ \ y(2) = 1.$

5. Дослідити на екстремум функціонал $J[y,z] = \int\limits_{x_0}^{x_1} \left(y'^2 + z'^2 + 2yz\right)dx$, $y(0) = 0$, $z(0) = 0$ і (x_1, y_1, z_1) може рухатися по площині $x = x_1$.

6. Відшукати найкоротшу відстань між точками $A(0,0,3)$ і $B(1,1,1)$ на поверхні $2x + 2y + z - 3 = 0$.

7. $\int\limits_0^{\pi} y'^2 dx \to extr;\ \int\limits_0^{\pi} y\cos x\, dx = \pi/2,\ \int\limits_0^{\pi} y\sin x\, dx = \pi + 2,\ y(0) = 2,\ y(\pi) = 0.$

Варіант 14

1. $\int\limits_1^e \left(y - xy'^2\right)dx \to extr;\ \ y(1) = 1,\ \ y(e) = 2.$

2. $\int\limits_0^a \left(y'^2 + y^2 + 4y\, ch\, x\right)dx \to extr;\ \ y(0) = 0,\ \ y(a) = b.$

3. $\int\limits_0^1 \left(y''^2 + y'^2\right)dx \to extr;\ \ y(0) = 1,\ y'(0) = 0,\ y(1) = ch1,\ y'(1) = sh1.$

4. $J[y(x)] = \int\limits_0^1 \left(y'^3 + y'\right)dx \to extr,\ \ \ y(0) = 0,\ \ \ \ y(1) = 2.$

5. Знайти найкоротшу відстань між поверхнями $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}+\frac{z^2}{9}=1$ і $x^2+y^2+z^2=4$.
6. Відшукати найкоротшу відстань між точками $A(1,0,-1)$ і $B(0,-1,1)$ на поверхні $x+y+z=0$.
7. $\int_0^{\pi} y\sin x\,dx \to extr;\ \int_0^{\pi} y'^2 dx = 3\pi/2,\ y(0)=0,\ y(\pi)=\pi.$

Варіант 15

1. $\int_1^2 x^2 y'^2 dx \to extr;\ \ y(1)=3,\ \ y(2)=1.$
2. $\int_0^1 \left(y'^2+y^2+4y\,ch\,x\right)dx \to extr;\ \ y(0)=y(1)=0.$
3. $\int_0^1 \left(y''^2+y'^2\right)dx \to extr;\ \ y(0)=0,\ y'(0)=1,\ y(1)=sh1,\ y'(1)=ch1.$
4. $J[y(x)]=\int_1^2 \left(xy'^4-2yy'^3\right)dx \to extr,\ \ y(1)=0,\ \ \ y(2)=1.$
5. Серед усіх гладких ліній, що з’єднують точку $O(0,0)$ з прямою $y=-1$, знайти ту, на якій функціонал $J[y(x)]=\int_0^{x_1}\left(y'^2-y^2\right)dx$ може досягти екстремуму.
6. Відшукати найкоротшу відстань між точками $A(-5,1,1)$ і $B(1,1,-1)$ на поверхні $x+2y+3z=0$.
7. $\int_0^{\pi} y'^2 dx \to extr;\ \int_0^{\pi} y\sin x\,dx=0,\ y(0)=0,\ y(\pi)=1.$

Варіант 16

1. $\int_2^3 \left(x^2-1\right)y'^2 dx \to extr;\ \ y(2)=0,\ \ y(3)=1.$
2. $\int_0^a \left(y'^2+y^2+4y\,sh\,x\right)dx \to extr;\ \ y(0)=0,\ \ y(a)=b.$
3. $\int_0^a \left(y''^2+y'^2\right)dx \to extr;\ \ y(0)=y'(0)=y(a)=y'(a)=0.$

4. $J[y(x)]=\int\limits_0^1 \left(y'+x^2\right)dx \to extr, \quad y(0)=-1, \quad y(1)=1.$

5. Знайти криву, на якій реалізується екстремум функціонала $J[y(x)]=\int\limits_{-1}^1 \left(xy'^4-2yy'^3\right)dx$ при умові, що правий кінець її знаходиться у точці $A(1,1)$, а лівий – на прямій $x=-1$.

6. Знайти екстремаль задачі Лагранжа: $J[y,z]=\int\limits_0^1 \left(y'^2+z\right)dx \to extr,$ $y(0)=1,\ z(0)=1,\ y(1)=e,\ \ z(1)=e^2+1$, якщо $z-y^2-x=0$.

7. $\int\limits_0^\pi y'^2 dx \to extr;\ \int\limits_0^\pi y\cos x\, dx=\pi/2,\ y(0)=1,\ y(\pi)=-1.$

Варіант 17

1. $\int\limits_1^e \left(2y-x^2y'^2\right)dx \to extr;\ \ y(1)=e,\ \ y(e)=0.$

2. $\int\limits_0^1 \left(y'^2+y^2+4y\, sh\, x\right)dx \to extr;\ \ y(0)=-1,\ \ y(1)=0.$

3. $\int\limits_0^1 e^{-x}y''^2 dx \to extr;\ \ y(0)=0,\ y'(0)=1,\ y(1)=e,\ y'(1)=2e.$

4. $J[y(x)]=\int\limits_{-1}^1 \left(y'^3+y'^2\right)dx \to extr, \quad y(-1)=-1, \quad y(1)=3.$

5. Зайти криву, на якій реалізується екстремум функціонала $J[y(x)]=\int\limits_{x_0}^0 \frac{\sqrt{1+y'^2}}{x+1}dx$, при умові, що лівий кінець рухається по прямій $3x+2y=-7$, а правий знаходиться у точці $O(0,0)$.

6. Знайти екстремаль задачі Лагранжа: $J[y,z]=\int\limits_0^1 \left(y'^2+z^2\right)dx \to extr,$ $y(0)=0,\ z(0)=1,\ y(1)=1,\ \ z(1)=\sqrt{2}$, якщо $y-z^2+1=0$.

7. $\int\limits_0^1 y'^2 dx \to extr;\ \int\limits_0^1 y\, dx=-3/2,\ \int\limits_0^1 xy\, dx=-2,\ y(0)=2,\ y(1)=-14.$

Варіант 18

1. $\int_0^1 y^2 y'^2 dx \to extr;\ \ y(0)=1,\ \ y(1)=\sqrt{2}.$

2. $\int_0^a \left(y'^2+y^2+6y\,sh\,2x\right)dx \to extr;\ \ y(0)=0,\ \ y(a)=b.$

3. $\int_0^1 e^{-x} y''^2 dx \to extr;\ \ y(0)=1,\ y'(0)=1,\ y(1)=y'(1)=e.$

4. $J[y(x)]=\int_0^{\pi/2} \left(y^2-y'^2\right)dx \to extr,\ \ \ y(0)=1,\ \ \ y(\pi/2)=1.$

5. Знайти найкоротшу відстань між двома півколами $y=2-\sqrt{3-x^2+2x}$ і $y=-3+\sqrt{10x-x^2-24}$.

6. Знайти екстремаль задачі Лагранжа: $J[y,z]=\int_0^{\pi/2} \left(y-z'^2\right)dx \to extr$, $y(0)=3$, $z(0)=1$, $y(\pi/2)=2$, $z(\pi/2)=0$, якщо $y-z^2+2=0$.

7. $\int_0^1 y'^2 dx \to extr;\ \int_0^1 y\,dx=1,\ \int_0^1 xy\,dx=0,\ y(0)=y(1)=0.$

Варіант 19

1. $\int_0^1 e^y y'^2 dx \to extr;\ \ y(0)=0,\ \ y(1)=\ln 4.$

2. $\int_0^a \left(y'^2+y^2-4y\sin x\right)dx \to extr;\ \ y(0)=0,\ \ y(a)=b.$

3. $\int_0^1 (x+1)y''^2 dx \to extr;\ \ y(0)=y'(0)=0,\ y(1)=1,\ y'(1)=2.$

4. $J[y(x)]=\int_0^1 (1+x)y'^2 dx \to extr,\ \ \ y(0)=0,\ \ \ y(1)=1.$

5. Серед усіх гладких ліній, що з'єднують точку $A(\pi/2,1)$ із прямою $x=\pi/4$, знайти ту, на якій функціонал $J[y(x)]=\int_{\pi/4}^{\pi/2} \left(y'^2-y^2\right)dx$ може досягти екстремуму.

6. Знайти екстремаль задачі Лагранжа: $J[y,z]=\int_0^1 \left(y'^2+z^2+x\right)dx \to extr$, $y(0)=0$, $z(0)=\sqrt{2}$, $y(1)=e$, $z(1)=\sqrt{e^2+1}$, якщо $y^2-z^2+1=0$.

7. $\int_0^1 y'^2 dx \to extr;\ \int_0^1 xy\,dx = 0,\ y(0) = -4,\ y(1) = 4.$

Варіант 20

1. $\int_0^1 \left(y'^2 + yy' + 12xy\right) dx \to extr;\ \ y(0) = y(1) = 0.$
2. $\int_0^1 \left(y'^2 + y^2 + 6y\, sh\, 2x\right) dx \to extr;\ \ y(0) = y(1) = 0.$
3. $\int_0^1 (x+1) y''^2 dx \to extr;\ \ y(0) = 0,\ y(1) = \ln 2,\ y'(0) = 1,\ y'(1) = 1/2.$
4. $J[y(x)] = \int_0^1 e^y y'^2 dx \to extr,\ \ \ y(0) = 0,\ \ \ y(1) = \ln 4.$
5. Серед гладких кривих, ліві кінці яких рухаються по прямій $x = 0$, праві – по прямій $x = 1$, визначити ту, на якій може досягатися екстремум функціонала $J[y(x)] = \int_0^1 y'(y' - x)\, dx$.
6. Знайти найкоротшу відстань між двома точками $A(x_0, y_0, z_0)$ і $B(x_1, y_1, z_1)$ на поверхні $\varphi(x, y, z) = 0$ (у загальному вигляді).

$\int_0^1 y'^2 dx \to extr;\ \int_0^1 xy\,dx = 0,\ y(0) = 0,\ y(1) = 1.$