16 ФУНКЦІЇ БАГАТЬОХ ЗМІННИХ

16.1 Метричні простори

Багато прикладних задач залежать від декількох факторів, залежність між якими утворює функції багатьох змінних. Такі функції задаються на множинах, що містяться на площині, в тривимірному просторі, в скінченновимірному просторі. Для того, щоб увести поняття границі послідовності в такому просторі, границі і неперервності функцій багатьох змінних треба знати, як можна задавати відстані в цих просторах. Питання означення найбільшого і найменшого значень функції багатьох змінних дуже суттєве в економіці. Для вирішення цього питання потрібно знати на якій множині задана функція, а також, чи є вона неперервною на цій множині. Множини в скінченновимірних просторах можуть бути різноманітної природи, мати різні властивості. Так, на замкнених, обмежених множинах неперервна функція буде обмеженою і досягати свого найбільшого і найменшого значень, а на відкритій – не обов'язково. Вирішенню деяких з цих питанням буде присвячений цей розділ.

🗀**Означення.** Множина X разом з функцією $\rho(x,y)$, яка будь-яким елементам x і y із X ставить у відповідність дійсне число, , що задовольняє аксіомам

1^0 $\rho(x,y)\geq 0\ \forall x,y\in X;\quad \rho(x,y)=0 \Leftrightarrow x=y$;

2^0 $\rho(x,y)=\rho(y,x)\ \forall x,y\in X$;

3^0 $\rho(x,y)\leq\rho(x,z)+\rho(z,y)\ \forall x,y,z\in X$ – *аксіома трикутника*.

називається *метричним простором* Таким чином задана функція $\rho(x,y)$ називається *метрикою* або відстанню між x та y. Елемент x метричного простору часто називають точкою цього простору. Метричний простір, що задається на множині X з метрикою $\rho(x,y)$ позначається (X,ρ).

Твердження. ЕП$\Rightarrow$НП$\Rightarrow$МП (евклідовий простір $\Rightarrow$ нормовий простір $\Rightarrow$метричний простір)

Доведення. В темі «Евклідові простори» було вже доведено, що ЕП $\Rightarrow$НП, в якому норма визначається як $\|x\|=\sqrt{(x,x)}$.

Доведемо, що НП$\Rightarrow$МП, в якому метрика визначається як $\rho(x,y)=\|x-y\|$. Для цього доведемо, що функція $\rho(x,y)=\|x-y\|$ задовольняє аксіомам метрики, знаючи, що справедливими є аксіоми норми:

1)" $\forall x \in X \, \|x\| \geq 0; \|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$,

2)" $\forall x \in X \quad \forall \lambda \in R \, \|\lambda x\| = |\lambda| \cdot \|x\|$,

3)" $\forall x, y, z \in X \; \|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$.

Маємо:

1) $\rho(x, y) = \|x - y\| \geq 0$ (із 1"),

$\rho(x, y) = \|x - y\|$=0 (із 1") $\Leftrightarrow$ *x*-*y*=0 $\Leftrightarrow$ *x*=*y*;

2) $\rho(x, y) = \|x - y\| = \|-(y - x)\|$=(із 2^{i}) $= |-1| \cdot \|(y - x)\| = \rho(y, x)$;

3) $\rho(x, y) = \|x - y\| = \|x - z + z - y\| \overset{3''}{\leq} \|x - z\| + \|z - y\| = \rho(x, z) + \rho(z, y)$. ■

Приклад. Функція $\rho(x, y) = |x - y|$ на множині $\mathbb{R}$ задовольняє аксіомам метрики (перевірити!), тому $\mathbb{R}^1 = \left(\mathbb{R}, |x - y|\right)$ - метричний простір.

Приклад а) *арифметичним* m *-вимірним простором* $\mathbb{R}^m$ називається множина усіх упорядкованих скінченних сукупностей, що складаються із m дійсних чисел $(x_1, x_2, ..., x_m)$, на яких уведено операції додавання і множення на скаляр $\lambda \in \mathbb{R}$ за правилами:

$$(x_1, x_2, ..., x_m) + (y_1, y_2, ..., y_m) \overset{def}{=} (x_1 + y_1, x_2 + y_2, ..., x_m + y_m);$$

$$\lambda(x_1, x_2, ..., x_m) \overset{def}{=} (\lambda x_1, \lambda x_2, ..., \lambda x_m).$$

Сукупність $(x_1, x_2, ..., x_m)$ називається точкою, вектором або елементом $\mathbb{R}^m$, будемо його позначати $\overline{x} = (x_1, x_2, ..., x_m)$, а числа $x_i \, (i = 1, ..., m)$ називаються координатами точки $\overline{x}$.

Як відомо із лінійної алгебри, $\mathbb{R}^m$ – є лінійним простором. Уведемо на ньому функції

$$\rho_1(\overline{x}, \overline{y}) = \sum_{i=1}^{m} |x_i - y_i|; \;\; \rho_2(\overline{x}, \overline{y}) = \sqrt{\sum_{i=1}^{m} (x_i - y_i)^2}; \;\; \rho_\infty(\overline{x}, \overline{y}) = \max_{i=1,...,m} |x_i - y_i|.$$

Кожна із заданих функцій визначає метрику, оскільки задовольняє аксіомам метрики. Відповідні простори позначаються таким чином:

$$\mathbb{R}^m_1 \overset{def}{=} \left(\mathbb{R}^m, \rho_1\right); \quad \mathbb{R}^m_2 \overset{def}{=} \left(\mathbb{R}^m, \rho_2\right); \quad \mathbb{R}^m_\infty \overset{def}{=} \left(\mathbb{R}^m, \rho_\infty\right).$$

16 ФУНКЦІЇ БАГАТЬОХ ЗМІННИХ

Метричний простір $\mathbb{R}_2^m$ називається *евклідовим* m*-вимірним простором.* Скалярний добуток на ньому задається формулою $(\overline{x},\overline{y})=\sum_{i=1}^{m}x_i y_i$.

Відповідно до твердження, норма задається формулою $\|\overline{x}\|=\sqrt{\sum_{k=1}^{m}x_n^2}$, а метрика -

$$\rho(\overline{x},\overline{y})=\|x-y\|=\sqrt{(x_1-y_1)^2+(x_2-y_2)^2+\ldots+(x_m-y_m)^2}=\sqrt{\sum_{k=1}^{m}(x_k-y_k)^2}\ .$$

Доведемо, що $\mathbb{R}_1^m$ - метричний простір. $\rho\left(\overline{x},\overline{y}\right)=\sum_{i=1}^{m}|x_i-y_i|$:

1) $\rho(x,y)\geq 0$ - із означення модуля;

$\rho(x,y)=0\Leftrightarrow\sum_{k=1}^{m}|x_k-y_k|=0\Leftrightarrow|x_k-y_k|=0\ \forall k=\overline{1,m}\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x_k=y_k\forall k=\overline{1,m}\Leftrightarrow x=y$;

2) $\rho(x,y)=\sum_{k=1}^{m}|x_k-y_k|=\rho(y,x)=\sum_{k=1}^{m}|y_k-x_k|$;

3) $\rho(x,y)=\sum_{k=1}^{m}|x_k-y_k|=\sum_{k=1}^{m}|x_k-z_k+z_k-y_k|\leq\sum_{k=1}^{m}|x_k-z_k|+\sum_{k=1}^{m}|z_k-y_k|$.

Самостійно ✍ *перевірити* аксіоми норми для простору $\mathbb{R}_\infty^m$. При доведенні застосувати нерівність

$$\rho(x,y)=\max_{k=\overline{1,m}}|x_k-z_k+z_k-y_k|\leq\max_{k=\overline{1,m}}|x_k-z_k|+\max_{k=\overline{1,m}}|z_k-y_k|\ .$$

б) $R_0\left[a,b\right]$- простір кусково неперервних на $\left[a,b\right]$ функцій з регулярними точками розриву:

$(f,g)=\int_a^b f(x)g(x)dx$ - скалярний добуток в $R_0\left[a,b\right]$ (аксіоми скалярного добутку перевірено в темі «Евклідові простори»);

$\rho(f,g)=\sqrt{\int_a^b(f(x)-g(x))^2dx}$ - метрика в $R_0\left[a,b\right]$ (за твердженням).

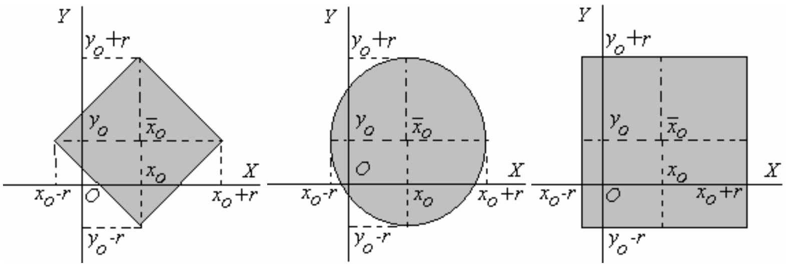
в) Простір $\mathbb{R}^m$ разом з функцією $\rho(x,y)=\left(\sum_{n=1}^{m}|x_k-y_k|^p\right)^{1/p}$ утворює метричний простір $\mathbb{R}_p^m$ ($1\leq p<\infty$). Цей факт буде доведено в курсі функціонального аналізу.

16 ФУНКЦІЇ БАГАТЬОХ ЗМІННИХ

🗁**Означення.** *Відкритою, замкненою кулею і сферою* радіусу r з центром в точці x_0 в метричному просторі (X,ρ) називаються відповідно множини

$$B_r(x_0)=\{x\in X:\rho(x,x_0)<\varepsilon\}$$
$$B_r[x_0]=\{x\in X:\rho(x,x_0)\le\varepsilon\}$$
$$S_r(x_0)=\{x\in X:\rho(x,x_0)=\varepsilon\}$$

Приклад а) на рис. 1.1 а, б, в зображені замкнені кулі в просторах $\mathbb{R}_1^2$, $\mathbb{R}_2^2$ і $\mathbb{R}_\infty^2$ відповідно.



а б в

Рис 16.1.

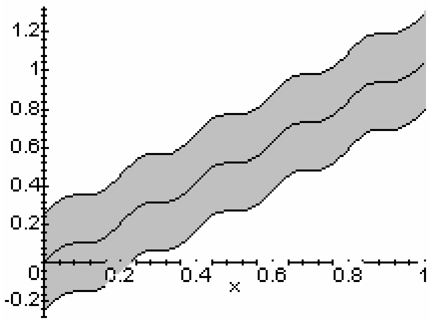


Рис. 16.1 г

б) Розглянемо $C[a,b]$ - простір неперев. на $[a,b]$ функції з метрикою $\rho(f,g)=\max\limits_{t\in[a,b]}|f(t)-g(t)|\le r$. Замкнена куля $B_r[f]$ в ньому утворюється із функцій, що задовольняють нерівності $f(t)-r\le g(t)\le f(t)+r\ \forall t\in[a,b]$. Графіки функцій $f(x)-\varepsilon$ *і* $f(x)+\varepsilon$ можна отримати зсувом графіка функції $f(x)$ відповідно на ε вгору і вниз, що зображено на рис. 12.4. Геометрично на декартовій площині отримано об'єкт, який має назву *«ε-труби»* функції $f(x)$.

в) Розглянемо дискретний метричний простір (X,d), де X - довільна множина, метрика на якій (перевірте аксіоми метрики!) визначається формулою $d(x,y)=\begin{cases}0, x=y\\ 1, x\neq y\end{cases}$. Околами в цьому просторі будуть такі множини: $B_r\left[x_0\right]=\{x_0\}$, якщо $r<1$, $B_r\left[x_0\right]=X$, якщо $r\geq 1$.

🗁**Означення.** ε*-околом точки* x_0 називається відкрита куля $B_\varepsilon(x_0)$, будемо його позначати $O_\varepsilon(x_0)$. У випадку метричного простору $\mathbb{R}_2^m$ такий ε-окіл називається *кульовим.*

🗁**Означення.** *Прямокутним* ε*-околом точки* $\overline{x}_0=(x_1^{(0)},x_2^{(0)},...,x_i^{(0)},...,x_m^{(0)})$ в просторі IR_2^m називається множина вигляду

$$V_\varepsilon(x_0)=\left\{(x_1,x_2,...,x_m)\in IR^m:\left|x_i-x_i^{(0)}\right|<\varepsilon, i=1,...,m\right\}.$$

🗁**Означення.** Множина M метричного простору (X,ρ) називається *обмеженою*, якщо її можна цілком помістити в деяку кулю $B_r[x_0]$.

🗁**Означення.** Послідовність $\{x_n\}$ елементів метричного простору (X,ρ) називається *збіжною до елемента* x_0 цього простору, якщо

$$\forall\varepsilon>0\exists N\in\mathbb{N}\forall n\geq N\ \rho\left(x_n,x_0\right)<\varepsilon\right).$$

Точка x_0 називається *границею послідовності* $\{x_n\}$. Позначення:

$$x_n\underset{n\to\infty}{\overset{(X,\rho)}{\longrightarrow}}x_0;\quad \lim_{n\to\infty}x_n=x_0.$$

На мові ε-околів збіжність послідовності до x_0 означає, що для будь-якого $\varepsilon>0$ знайдеться такий номер, що усі члени послідовності, починаючи з цього номера, будуть міститися в ε-околі точки x_0.

Теорема 1 *(критерій збіжності послідовності в $\mathbb{R}_2^m$).* Для того, щоб послідовність в $\mathbb{R}_2^m$ збігалась, необхідно і достатньо, щоб вона *збігалась покоординатно*, тобто

$$\overline{x}_n=\left(x_1^{(n)},x_2^{(n)},...,x_i^{(n)},...,x_m^{(n)}\right)\underset{n\to\infty}{\overset{IR_2^m}{\longrightarrow}}\overline{x}_0=(x_1^{(0)},x_2^{(0)},...,x_i^{(0)},...,x_m^{(0)})\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\lim_{n\to\infty}x_i^{(n)}=x_i^{(0)}\forall i=1,...,m.$$

Дійсно, якщо

$\forall\varepsilon>0\exists N\in\mathbb{N}\forall n\geq N$

$$\rho(x_n,x_0)=\sqrt{(x_1^{(n)}-x_1^{(0)})^2+(x_2^{(n)}-x_2^{(0)})^2+...+(x_i^{(n)}-x_i^{(0)})^2+...+(x_m^{(n)}-x_m^{(0)})^2}<\varepsilon,$$

то $\left|x_i^{(n)}-x_i^{(0)}\right|<\varepsilon\ \forall n\ge N\ \forall i=1,...,m$, тому $\lim\limits_{n\to\infty}x_i^{(n)}=x_i^{(0)}\forall i=1,...,m$.

Якщо, навпаки, $\lim\limits_{n\to\infty}x_i^{(n)}=x_i^{(0)}\forall i=1,...,m$, тоді

$\forall i=1,...,m\ \exists N_i\in\mathbb{N}\ \forall n\ge N_i\ \left|x_i^{(n)}-x_i^{(0)}\right|<\dfrac{\varepsilon}{\sqrt{m}}$.

Тому при $N^*=\max\limits_{i=1,m}N_i\quad\forall n\ge N^*\ \left|x_i^{(n)}-x_i^{(0)}\right|<\dfrac{\varepsilon}{\sqrt{m}}$, звідки

$$\rho(x_n,x_0)=\sqrt{(x_1^{(n)}-x_1^{(0)})^2+(x_2^{(n)}-x_2^{(0)})^2+\ldots+(x_i^{(n)}-x_i^{(0)})^2+\ldots+(x_m^{(n)}-x_m^{(0)})^2}<$$

$$<\sqrt{m\cdot\left(\frac{\varepsilon}{\sqrt{m}}\right)^2}=\varepsilon\quad\forall n\ge N^*\Leftrightarrow\quad x_n\xrightarrow[n\to\infty]{(X,\rho)}x_0;\quad\lim_{n\to\infty}x_n=x_0.$$ ■

Властивості збіжних послідовностей у метричних просторах.

1. Границя послідовності єдина.

► $\{x_n\}$-збіг. $\Leftrightarrow\exists x_0':\rho(x_n,x_0')\to 0$

Пп. $\exists x_0'':\rho(x_n,x_0'')\to 0$ і $x_0''\ne x_0'$.

Тоді

$0\le\rho(x_0',x_0'')\le\rho(x_n,x_0')+\rho(x_n,x_0'')\Rightarrow\rho(x_0',x_0'')=0\Leftrightarrow x_0'=x_0''\ \not\to$. ◄

2. Якщо послідовність збігається, то вона утворює обмежену множину.

► $\{x_n\}$-збіг. $\Leftrightarrow\ \exists x_0\in X:\forall\varepsilon>0\ \exists n_0\in\mathbb{N}\ \forall n\ge n_0\ \ x_n\in O_\varepsilon(x_0)$.

Нехай $\varepsilon=1\Rightarrow\exists n_0\in N:\forall n\ge n_0\ x_n\in O_1(x_0)$, тоді для

$r=\max\left\{\rho(x_0,x_1),\rho(x_0,x_2),...,\rho(x_0,x_{n_0-1})\right\}$ маємо $x_n\in B_r(x_0)\quad\forall n\in\mathbb{N}$. ◄

🗁**Означення.** Точка x_0 називається *граничною точкою множини M метричного простору* (X,ρ), якщо будь-який її ε-окіл містить хоча б одну точку множини M, відмінну від x_0, тобто

x_0 - г.т. М$\Leftrightarrow\forall\varepsilon>0\exists x_\varepsilon\in M:x_\varepsilon\subset O_\varepsilon(x_0)\setminus\{x_0\}$.

Теорема. Для того, щоб точка x_0 була граничною точкою множини M, необхідно і достатньо, щоб існувала послідовність $\{x_n\}$ елементів цієї множини, що збігається до x_0, тобто

$$\left.\begin{array}{l}\{x_n\}-зб.\ до.\ x_0\\ \{x_n\}\subset M\end{array}\right\}\Rightarrow x_0 \text{ - гранична точка множини М.}$$

Дійсно, для $\varepsilon=\dfrac{1}{n}\ \ \exists x_n\in M:x_n\in O_{\frac{1}{n}}(x_0)\setminus\{x_0\}$, Тоді $0 \le \rho(x_n, x_0\ ) < \dfrac{1}{n} \quad \Rightarrow \{x_n\}$ -збіг. до x_0. $\{x_n\} \subset M$.■

🗀**Означення.** Множина M, називається *замкненою*, якщо будь-яка її гранична точка належить множині M.

Виходячи з наведених означення і теореми, можна сформулювати критерій замкненості множина M метричного простору (X,ρ):

$$M \text{ – замкнена в } (X,\rho) \;\Leftrightarrow\; \left(\left. \begin{matrix} \{x_n\} \subset M \\ x_n \xrightarrow[n\to\infty]{(X,\rho)} x_0 \end{matrix} \right\} \Rightarrow x_0 \in M \right).$$

Наприклад, множина М$=(0,1] \cup \{2\}$ має 0-гр.т.,але 0 $\notin$ М $\Rightarrow$М-незамкнена.

🗀**Означення.** Точка x_0 називається *внутрішньою точкою множини*, якщо вона належить множині M разом із деяким своїм ε-околом, тобто

x_0 - внутрішня множина точки М $\Leftrightarrow \exists \varepsilon > 0 : O_\varepsilon(x_0) \subset M$.

M^0 - позначення множини внутрішніх точок множини М.

Наприклад, для множини М$=(0,1] \cup \{2\}$ маємо $M^0 = (0,1)$, оскільки $\forall x_0 \in (0,1)$ для $\varepsilon = \min\left\{\dfrac{x_0 - 0}{2}; \dfrac{1 - x_0}{2}\right\}$ вірним є включення $O_\varepsilon(x_0) \subset M$.

🗀**Означення.** Множина M називається *відкритою*, якщо кожна її точка є внутрішньою, тобто

М-відкрита$\Leftrightarrow M = M^0$.

Розглянута вище множина не є відкритою.

Приклади. 1. Відкрита куля $B_r(x_0)$ є множиною відкритою.

► Розглянемо довільне $y \in B_r(x_0)$. Покладемо $\varepsilon = r - \rho(x_0, y)$, тоді доведемо, що $O_\varepsilon(y) \subset B_r(x_0)$.

Нехай $z \in O_\varepsilon(y) \Rightarrow \rho(z,y) < \varepsilon$, тоді

$\rho(z,x_0) \le \rho(z,y) + |\ \rho(y,x_0) < \varepsilon + \rho(y,x_0) = r - \rho(x_0,y) + \rho(y,x_0) = r$.

Отже, для довільного $y \in B_r(x_0)$ знайдено ε таке, що $O_\varepsilon(y) \subset B_r(x_0)$, тому будь-яка точка множини $B_r(x_0)$ є внутрішньою, тому ця множина є відкритою. ◄

2. Розглянемо множину $\{(x,y) : x^2 + y^2 < 1\}$ в просторі $\mathbb{R}_2^2$. Вона визначає кулю $B_1(0,0)$, яка за доведеним є відкритою.

3. Множина $\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2_\infty : \max\left\{|x|,|y|\right\}<1\right\}$ - є відкритою, оскільки вона є відкритою кулею $B_1(0,0)$ в МП $\mathbb{R}^2_\infty$.

Властивості відкритих і замкнених множин.

1. *Множина є відкритою тоді і лише тоді, коли її доповнення э множиною замкненою.*

►**Необхідність.** Дано: M-відкрита. Припустимо M^c - не є замкненою, тобто $x\notin M^c$,але x є граничною точкою M^c.

Маємо: $x\notin M^c \Leftrightarrow x\in M \Rightarrow x$ -внутр. т. $M \Rightarrow$

$\Rightarrow \exists\varepsilon>0: O_\varepsilon(x_0)\subset M \Rightarrow O_\varepsilon(x)\cap M^c=\varnothing \Rightarrow x$- не є граничною точкою. $\not\to$

Достатність. M^c - замкнена $(x$ - гранична точка $M^c \Rightarrow x\in M^c)$.

Довести, що M-відкрита.

Нехай $x\in M \Rightarrow x\notin M^c \Rightarrow x$ -не є граничною точкою M^c $\Rightarrow$ $\Rightarrow \exists\varepsilon>0: O_\varepsilon(x)\cap M=\varnothing \Rightarrow O_\varepsilon(x\ )\subset M \Rightarrow x$ -є внутрішньою т. M. Оскільки $x\in M$ - довільний, то множина M – відкрита. ◄

2. *Множина є замкненою тоді і лише тоді, коли її доповнення э множиною відкритою.*
3. *Будь-яке об'єднання відкритих множин є множиною відкритою, тобто*

G_α *- відкрита множина* $\forall\alpha\in I \Rightarrow \bigcup\limits_{\alpha\in I} G_\alpha$ *-відкрита множина.*

►Нехай $x\in\bigcup\limits_{\alpha\in I} G_\alpha$, тоді доведемо, що x - внутр. точка $\bigcup\limits_{\alpha\in I} G_\alpha$.

Маємо:

$$\left.\begin{array}{r} x\in\bigcup\limits_{\alpha\in I} G_\alpha \Rightarrow \exists\alpha\in I: x\in G_{\alpha_0} \\ G_{\alpha_0} - відкрита \end{array}\right\}\Rightarrow x \text{ - внутр. точка } G_{\alpha_0} \Rightarrow$$

$\Rightarrow \exists\varepsilon>0: O_\varepsilon(x)\subset G_{\alpha_0} \Rightarrow O_\varepsilon(x)\subset\bigcup\limits_{\alpha\in I} G_\alpha \Rightarrow x$ -внутрішня точка $\bigcup\limits_{\alpha\in I} G_\alpha$.◄

4. *Скінченний перетин відкритих множин є множиною відкритою, тобто* G_i *- відкрита* $\forall i=\overline{1,n} \Rightarrow \bigcap\limits_{i=1}^{n} G_i$ *- відкрита множина.*

$$► \left.\begin{array}{r} x\in\bigcap\limits_{i=1}^{n} G_i \Rightarrow \forall i=\overline{1,n}\ \ x\in G_i \\ G_i - відкрита \end{array}\right\}\Rightarrow \forall i=\overline{1,n}\ \ x \text{ - вн.т. } G_i \Rightarrow$$

$\Rightarrow \forall i=\overline{1,n}\ \ \exists\delta_i>0: O_{\delta_i}(x)\subset G_i$.

Нехай $\delta = \min \delta_i \Rightarrow O_\delta(x) \subset G_i \; \forall i = \overline{1,n} \Rightarrow O_\delta(x) \subset \bigcap\limits_{i=1}^{n} G_i \Rightarrow x$-внутрішня точка $\bigcap\limits_{i=1}^{n} G_i$.◄

5. *Будь-який перетин замкнених множин є множиною замкненою, тобто F_α - замкнені множини $\forall \alpha \in I \Rightarrow \bigcap\limits_{\alpha \in I} F_\alpha$ - замкнена.*

►Нехай F_α - замкнені множини $\forall \alpha \in I$, тоді $G_\alpha = X \setminus F_\alpha$ - відкриті, як доповнення до замкнених $\forall \alpha \in I$. За вл. 3 множина $\bigcup\limits_{\alpha \in I} G_\alpha$ - відкрита, тому доповнення до неї $X \setminus \bigcup\limits_{\alpha \in I} G_\alpha$ - множина замкнена. За законом двоїстості

$$X \setminus \bigcup_{\alpha \in I} G_\alpha = \bigcap_{\alpha \in I} \left(X \setminus G_\alpha \right) = \bigcap_{\alpha \in I} F_\alpha ,$$

Тому множина $\bigcap\limits_{\alpha \in I} F_\alpha$ - замкнена.◄

6. Скінченне об'єднання замкнених множин є множиною замкненою,*тобто F_i - замкнені множини $\forall i = \overline{1,n} \Rightarrow \bigcup\limits_{i=1}^{n} F_i$ - замкнена.*

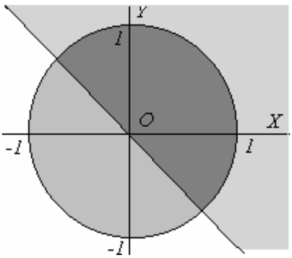


Рис 16.2

Доведення аналогічне попередньому (довести самостійно!)

Розглянемо **приклади** деяких множин.

1. Множина $B_r(x_0)$ – є відкритою, а множина $B_r[x_0]$ – є замкненою в будь-якому метричному просторі. Множина $V_\varepsilon(x_0)$ – відкрита в $\mathbb{R}_2^m$.
2. Множина $M = [0,1] \cup [2,3] \cup \{4\}$ – замкнена в IR^1 .
3. Множина $M = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \le 1 \wedge x + y \ge 0 \right\}$ – замкнена в $\mathbb{R}_2^2$ (вона зображена на рис 2).
4. При цьому множина $M_1 = [0,1) \cup (2,3] \cup \{4\}$ – ні замкнена ні відкрита в $\mathbb{R}^1$, а $M_2 = \left\{ (x,y) \in IR^2 : x^2 + y^2 \le 1 \wedge x + y > 0 \right\}$ – ні замкнена ні відкрита в $\mathbb{R}_2^2$.

16 ФУНКЦІЇ БАГАТЬОХ ЗМІННИХ

Означення. Точка $x_0 \in M$ називається ізольованою точкою множини М, якщо існує такий ε - окіл точки x_0, який не містить жодної точки множини М окрім x_0, тобто

$$x_0 \in M \text{ - ізольована } \Leftrightarrow \exists \varepsilon > 0 : O_\varepsilon(x_0) \cap (M \setminus \{x_0\}) = \varnothing .$$

Означення. Точка x_0 - зовнішня точка множини М $\Leftrightarrow$ x_0 - внутрішня т M^c, $\Leftrightarrow \exists \varepsilon > 0 : O_\varepsilon(x) \subset M^c$

Означення. Точка x_0 –межова точки множини М $\Leftrightarrow$ у будь-якому її ε-околі лежать як точки множини М ,так і точки доповнення цієї множини, $\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \quad O_\varepsilon(x_0) \cap M \neq \varnothing \wedge O_\varepsilon(x_0) \cap M^c \neq \varnothing$. позначення $x_0 \in \partial M$.

Із означення межової і граничної точок випливає, що будь-яка межова точка є граничною точкою як множини М, так і доповненя до неї.

$x \in X$ →
- внутрішня точка М, тобто $x \in M^0$
- зовнішня точка М, тобто $x \in (M^c)^0$
- межева точка М, тобто $x \in \partial M$

Приклад. Для множини $M = [-1,1) \cup \{2\}$ маємо:

множина внутрішніх точок M^0=(-1,1),
множина зовнішніх точка $(M^c)^0 = (-\infty,-1) \cup (1,2) \cup (2,+\infty)$,
множина межових точок $\partial M = \{-1,1,2\}$.

Означення. *Замикання* множини M - це множина M разом з множиною M' своїм граничних точок, позначення замикання M : $\overline{M}$. Тобто $\overline{M} = M \cup M'$.

Наприклад, для множини $M = [-1,1) \cup \{2\}$ маємо $\overline{M} = [-1,1] \cup \{2\}$.

Із визначень граничної, внутрішньої, межової точок випливає, що для замикання М можна дати інші формули:

$$\overline{M} = M \cup \partial M , \quad \overline{M} = M^0 \cup \partial M .$$

Пряма L в $\mathbb{R}^m$:

$\sphericalangle m = 2$, тобто пряма в $\mathbb{R}^2$ задається канонічним рівнянням $\frac{x_1 - x_1^{(1)}}{x_1^{(2)} - x_1^{(1)}} = \frac{x - x_2^{(1)}}{x_2^{(2)} - x_2^{(1)}}$, де $M_i(x_1^{(i)}, x_2^{(i)}) \in L, \quad i = 1,2$.

$\sphericalangle m = 3$, в $\mathbb{R}^3$: канонічне рівняння прямої

$$L: \frac{x_1 - x_1^{(1)}}{x_1^{(2)} - x_1^{(1)}} = \frac{x - x_2^{(1)}}{x_2^{(2)} - x_2^{(1)}} = \frac{x_3 - x_3^{(1)}}{x_3^{(2)} - x_3^{(1)}} = t\,,\ M_i(x_1^{(i)}, x_2^{(i)}, x_3^{(i)}) \in L, \quad i = 1,2\,,$$

параметричне рівняння прямої в $\mathbb{R}^3$:

$$x_i = x_i^{(0)} + \left(x_i^{(2)} - x_i^{(1)}\right)t, \quad i = 1,2.3\,.$$

Узагальнюємо на $\mathbb{R}^m$: канонічне рівнянням прямої

$$L: \frac{x_1 - x_1^{(1)}}{x_1^{(2)} - x_1^{(1)}} = \ldots = \frac{x_m - x_m^{(1)}}{x_m^{(2)} - x_m^{(1)}} = t\,, \quad \overline{x_1} = M_i(x_1^{(i)}, \ldots, x_m^{(i)}) \in L, \quad i = 1,2\,,$$

параметричне рівняння:

$$\begin{cases} x_1 = x_1^{(1)} + \left(x_1^{(2)} - x_1^{(1)}\right)t \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_i = x_i^{(1)} + \left(x_i^{(2)} - x_i^{(1)}\right)t \quad , \quad t \in \mathbb{R}\,, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_m = x_m^{(1)} + \left(x_m^{(2)} - x_m^{(1)}\right)t \end{cases}$$

векторне рівняння:

$$L: \quad \overline{x} = \overline{x_1} + \left(\overline{x_2} - \overline{x_1}\right)t \quad , t \in \mathbb{R}$$

Під *ламаною* розуміють сукупність відрізків таких, що при їх упорядкуванні кінець кожного попереднього відрізку співпадає з початком наступного.

Нехай ламана сполучає точки $M_i(x_1^{(i)}, \ldots, x_m^{(i)}) = \overline{x_i}, \quad i = 1, \ldots, n$, тоді вона задається рівняннями

$$M_1M_2: \quad \overline{x} = \overline{x_1} + \left(\overline{x_2} - \overline{x_1}\right)t, \quad t \in [0,1];$$

$$M_2M_3: \quad \overline{x} = \overline{x_2} + \left(\overline{x_3} - \overline{x_2}\right)t, \quad t \in [0,1];$$

...

$$M_{i-1}M_i: \quad \overline{x} = \overline{x_{i-1}} + \left(\overline{x_i} - \overline{x_{i-1}}\right)t, \quad t \in [0,1];$$

...

$$M_{n-1}M_n: \quad \overline{x} = \overline{x_{n-1}} + \left(\overline{x_n} - \overline{x_{n-1}}\right)t, \quad t \in [0,1];$$

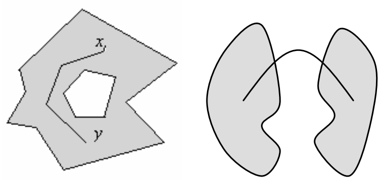
🗀**Означення 1.** Множина М в $\mathbb{R}^m$ називається зв'язною, якщо будь-які дві її точки можна сполучити ламаною, яка цілком буде лежати в середині множини М.

Параметрично задана лінія в просторі $\mathbb{R}^m$

$$\begin{cases} x_1 = \varphi_1(t) \\ x_2 = \varphi_2(t) \\ \dots\dots\dots\dots\dots \\ x_m = \varphi_m(t) \end{cases}, \ t \in [a,b]$$

є неперервною на $[a,b]$, якщо кожна функція $\varphi_i(t), i = 1,...m$ неперервна на $[a,b]$.

Означення 2. Множина M називається *зв'язною* в $\mathbb{R}^m$, якщо будь-які дві її точки x і y можна сполучити неперервною лінією, яка цілком лежить в середині цієї множини.



а б

Рис 16.3.

На рис 16.3 а зображена зв'язна множина, а на рис. 16.3. б – незв'язна.

Означення. Будь-яка відкрита чи замкнена, зв'язна множина називається *областю*.

Означення. Кажуть, що $\overline{x_n}$ збігається до $\overline{x_0}$ в $\mathbb{R}^m$ за напрямком неперервної кривої $x_i = \varphi_i(t)$, $i = \overline{1,m}$, $t \in [a,b]$, якщо

$\exists \{t_n\} \subset [a,b]: \ \lim\limits_{n\to\infty} \varphi_i(t_n) = x_i^{(0)}$.

16.2. Поняття функції багатьох змінних

Нехай X і Y метричні простори.

Якщо відображення f кожному елементу $x \in X$, де $E \subset X$ ставить у відповідність єдиний елемент $y \in Y$, то це відображення $f : X \to Y$ називається функцією, що переводить МП X в МП Y .При цьому E- називається множиною визначення функції f .

Якщо $X = \mathbb{R}_2^m$ - m -вимірний евклідовий простір, а $Y = \mathbb{R}^1$, то функція $f : X \to Y$ називається функцією m змінних.

Тобто, якщо відображення f кожній точці $\overline{x}$ множини M метричного простору $\mathbb{R}_2^m$ ставить у відповідність єдине число $y \in \mathbb{R}^1$, то кажуть, що на множині M задана *функція m змінних*, а множину M називають *множиною визначення функції* f і позначається $D(f)$.

16 ФУНКЦІЇ БАГАТЬОХ ЗМІННИХ

Приклад. Знайти множину визначення функцій а) $f(x,y)=\dfrac{1}{\sqrt{\cos(x^2+y^2)}}$; б) $f(x,y)=\sqrt{1-x^2-y^2}+\ln\left(1+\sqrt{x+y}\right)$.

Розв'язання а) Множина визначення визначається із нерівності $\cos(x^2+y^2)>0$.

Розв'яжемо її:

$$-\frac{\pi}{2}+2\pi n<x^2+y^2<\frac{\pi}{2}+2\pi n,\quad n\in\mathbb{Z},$$

тоді

$n=0$: $x^2+y^2<\dfrac{\pi}{2}$ - визначає відкрите коло

$n=1$: $\dfrac{3\pi}{2}<x^2+y^2<\dfrac{5\pi}{2}$, визначає відкрите кільце,

$n=2,..3,.-\dfrac{\pi}{2}+2\pi n<x^2+y^2<\dfrac{\pi}{2}+2\pi n$ - визначає систему відкритих концентричних кілець.

Множина визначення не є областю, оскільки незв'язна.

б) Множина визначення даної функції двох змінних визначається системою нерівностей

$$\begin{cases}1-x^2-y^2\ge 0\\ 1+\sqrt{x+y}>0\\ x+y\ge 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x^2+y^2\le 1\\ x+y\ge 0\end{cases}.$$

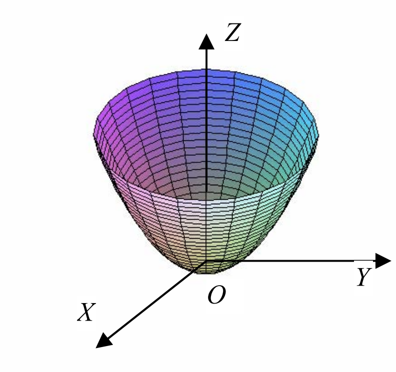


Рис. 16.4.

Таким чином, область визначення задається геометричним, місцем точок, що зображені на рис. 16.2. Ця множина є замкненою, зв'язною, обмеженою, тому є областю.

Пригадаємо, що графіком функції називається множина $G=\{(x,y)\in X\times Y: y=f(x)\}$.

У випадку функції m змінних, графіком буде множина в m+1 – вимірному просторі:

$G=\{(x,y)\in R^m\times R, y=f(x)\}$,

зокрема, для функції двох змінних графіком буде множина

$G = \left\{(x, y) = (x_1, x_2, y) \in \mathbb{R}^3, y = f(\overline{x}) = f(x_1, x_2)\right\}$.

У випадку функції двох змінних геометричною інтерпретацією графіка функції є поверхня в тривимірному просторі. На рис 16.4 зображено графік функції $z = x^2 + y^2$.

🗀**Означення.** Переріз графіка функції $z = f(x, y)$ площиною $z = z_0$ називається *лінією рівня* цієї функції. Частіше під лінією рівня розуміють проекцію зазначеного перерізу. В будь-якому випадку її зображують на площині XOY.

У випадку функцій трьох і більше змінних можна аналогічно ввести поняття *поверхні рівня*, як перерізу графіка функції $z = f(\overline{x})$ площиною $z = z_0$.

Приклад. Лінією рівня функції $z = x^2 + y^2$ при $z_0 = 1$ в проекції на площину XOY буде коло з центром в точці О радіуса 1 (див. рис. 16.5). На рис. 16.4 різні лінії рівня цієї функції – кола, паралельні площині XOY, розташовані в просторі. Вони роблять рисунок більш наглядним. Зокрема, зрозуміло, що при $z_0 < 0$ ліній рівня не існує.

Наведемо поняття *складеної функції багатьох змінних*.

1) Нехай функція g переводить деяку множину $E_1 \subset IR^m$ в множину $E \subset IR^n$ за правилом $\overline{x} = \overline{g}(\overline{t})$, тобто

$$(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \left(g_1(t_1, t_2, \ldots, t_m), g_2(t_1, t_2, \ldots, t_m), \ldots, g_n(t_1, t_2, \ldots, t_m)\right),$$

або

$$\begin{cases} x_1 = g_1(t_1, t_2, \ldots, t_m) \\ x_2 = g_2(t_1, t_2, \ldots, t_m) \\ \ldots \\ x_n = g_n(t_1, t_2, \ldots, t_m) \end{cases}.$$

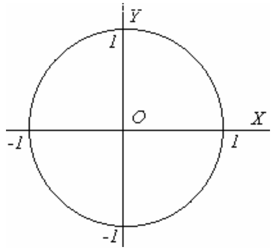


Рис. 16.5.

2) Тепер нехай функція $f(\overline{x})$ переводить $E \subset IR^n$ в IR^1.

3) Отримаємо функцію $\varphi(\overline{t}) = f(\overline{g}(\overline{t}))$, яка переводить $E_1 \subset IR^m$ в IR^1:

$$\begin{tikzcd} IR^m \arrow[r, "\overline{g}"] \arrow[d] & IR^n \arrow[r, "f"] & IR^1 \\ {} \arrow[rr, "\varphi = f\circ\overline{g}"] & & {} \arrow[u] \end{tikzcd}.$$

16.4. Границя функції багатьох змінних

16 ФУНКЦІЇ БАГАТЬОХ ЗМІННИХ

🗀**Означення (за Коші 1).** Число b називається *границею функції* $f(\overline{x})$ *в точці* $\overline{x}_0 \in IR_2^m$, якщо

$$\forall\varepsilon > 0 \exists\delta > 0 \forall\overline{x} \in D(f)\ 0 < \rho(x, x_0) < \delta \Rightarrow \left|f(\overline{x}) - b\right| < \varepsilon .$$

Позначення: $\lim\limits_{\overline{x}\to\overline{x}_0} f(\overline{x}) = b$ або $\lim\limits_{\substack{x_1\to x_1^{(0)}\\ \dots\\ x_m\to x_m^{(0)}}} f(x_1, x_2, \dots, x_m) = b$. Ця границя називається *кратною*. У випадку функції двох змінних вона називається *подвійною*.

Це означення можна переписати в розгорнутому вигляді:

$$\lim_{\substack{x_1\to x_1^{(0)}\\ \dots\\ x_m\to x_m^{(0)}}} f(x_1, x_2, \dots, x_m) = b \quad \overset{def}{\Leftrightarrow}$$

$$\begin{gathered}\forall\varepsilon > 0 \exists\delta > 0 \forall\overline{x} \in D(f)\\ 0 < \sqrt{\left(x_1 - x_1^{(0)}\right)^2 + \left(x_2 - x_2^{(0)}\right)^2 + \dots + \left(x_m - x_m^{(0)}\right)^2} < \delta \Rightarrow \left|f(x_1, x_2, \dots, x_m) - b\right| < \varepsilon\end{gathered} .$$

В термінах околів означення кратної границі означає той факт, що для будь якого $\varepsilon > 0$ можна знайти таке $\delta > 0$, що, як тільки $\overline{x} \in O_\delta(\overline{x}_0) \setminus \{\overline{x}_0\}$ (тобто $\overline{x}$ належить проколотому кульовому δ-околу), так $\left|f(\overline{x}) - b\right| < \varepsilon$.

Наведене означення еквівалентне наступному.

🗀**Означення (за Коші 2).** $\lim\limits_{\substack{x_1\to x_1^{(0)}\\ \dots\\ x_m\to x_m^{(0)}}} f(x_1, x_2, \dots, x_m) = b \quad \overset{def}{\Leftrightarrow}$

$$\overset{def}{\Leftrightarrow} \quad \begin{gathered}\forall\varepsilon > 0 \exists\delta > 0 \forall\overline{x} \in D(f)\\ 0 < \left|x_1 - x_1^{(0)}\right| < \delta \wedge 0 < \left|x_2 - x_2^{(0)}\right| < \delta \wedge \dots \wedge 0 < \left|x_m - x_m^{(0)}\right| < \delta \Rightarrow\\ \left|f(x_1, x_2, \dots, x_m) - b\right| < \varepsilon\end{gathered} .$$

Або в термінах околів: для будь якого $\varepsilon > 0$ можна знайти таке $\delta > 0$, що, як тільки $\overline{x} \in V_\delta(\overline{x}_0) \setminus \{\overline{x}_0\}$ (тобто $\overline{x}$ належить проколотому прямокутному δ-околу), так $\left|f(\overline{x}) - b\right| < \varepsilon$.

Твердження. def за Коші 1 $\Leftrightarrow$ def за Коші 2.

► Довести: def за Коші 1 $\Rightarrow$ def за Коші 2.

Дано: $\lim\limits_{x\to\overline{a}} f(\overline{x}) = b \quad \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \forall\varepsilon > 0 \exists\delta > 0 : \overline{x} \in D(f) \setminus \left\{\overline{a}\right\} \vdots \sqrt{\sum_{i=1}^{m} (x_i - a_i)^2} < \delta\sqrt{m} \Rightarrow \left|f(\overline{x}) - b\right| < \varepsilon .$$

Тоді

$$|x_1 - a_1| < \delta \wedge \ \ldots \wedge |x_m - a_m| < \delta \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sqrt{\sum_{i=1}^{m}(x_i - a_i)^2} < \sqrt{m\delta^2} = \delta\sqrt{m} \ \Rightarrow \ \left|f(\overline{x}) - b\right| < \varepsilon .$$

Довести: def за Коші 2 $\Rightarrow$ def за Коші 1

Дано: $\lim\limits_{\overline{x}\to\overline{a}} f(\overline{x}) = b \quad \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \ \forall\varepsilon > 0 \exists\delta > 0 : \forall\overline{x} \in D(f) \setminus \left\{\overline{a}\right\} \ |x_1 - a_1| < \delta \wedge \ldots \wedge |x_m - a_m| < \delta \Rightarrow \left|f(\overline{x}) - b\right| < \varepsilon .$$

Тоді

$$\sqrt{\sum_{i=1}^{m}(x_i - a_i)^2} < \delta \Rightarrow \sum_{i=1}^{m}(x_i - a_i)^2 < \delta^2 \ \forall i = \overline{1,m} \quad \Rightarrow$$

$$(x_i - a_i)^2 < \delta^2 \ \forall i = \overline{1,m} \quad \Rightarrow |x_i - a_i| < \delta \ \forall i = \overline{1,m} \Rightarrow \left|f(\overline{x}) - b\right| < \varepsilon . \blacktriangleleft$$

🗁**Означення (за Гейне 1).**

$$\lim_{\overline{x}\to\overline{x}_0} f(\overline{x}) = b \overset{def}{\Leftrightarrow} \ \forall\left\{\overline{x}_n\right\} \in D(f) \setminus \{\overline{x}_0\} \quad \overline{x}_n \xrightarrow[n\to\infty]{\mathbb{R}_2^m} \overline{x}_0 \Rightarrow f\left(\overline{x}_n\right) \xrightarrow[n\to\infty]{\mathbb{R}^1} b .$$

Воно еквівалентне наступному (згідно до критерію збіжності в скінченновимірному просторі)

🗁**Означення (за Гейне 2).** $\lim\limits_{\substack{x_1\to x_1^{(0)} \\ \ldots. \\ x_m\to x_m^{(0)}}} f(x_1, x_2, \ldots, x_m) = b \overset{def}{\Leftrightarrow}$

$$\overset{def}{\Leftrightarrow} \ \forall\left\{\overline{x}_n\right\} \in D(f) \setminus \{\overline{x}_0\} \quad x_i^{(n)} \xrightarrow[n\to\infty]{\mathbb{R}^1} x_i^{(0)} \forall i = 1, \ldots, m \Rightarrow f(x_1, x_2, \ldots, x_m) \xrightarrow[n\to\infty]{\mathbb{R}^1} b .$$

Теорема 3 *(арифметичні операції над границями).*
Якщо функції $f(\overline{x})$ *і* $g(\overline{x})$, що визначені на одній і тій же множині M, в точці $\overline{x}_0 \in IR_2^m$ мають границі, що відповідно дорівнюють b і c, то функції $f(\overline{x}) \pm g(\overline{x})$, $f(\overline{x}) \cdot g(\overline{x})$ і $\dfrac{f(\overline{x})}{g(\overline{x})}$) мають в точці $\overline{x}_0$ границі $b \pm c$, $b \cdot c$ і $\dfrac{b}{c}$ відповідно (у випадку частки – накладається додаткова умова: $c \neq 0$), тобто

$$\left.\begin{aligned} \lim_{\overline{x}\to\overline{a}} f(\overline{x}) = b \\ \lim_{\overline{x}\to\overline{a}} g(\overline{x}) = c \end{aligned}\right\} \Rightarrow$$

1) $\exists \lim\limits_{\overline{x}\to\overline{a}} \left[f(\overline{x}) + g(\overline{x}) \right] = b \pm c$;

2) $\exists \lim\limits_{\overline{x}\to\overline{a}} f(\overline{x})\cdot g(\overline{x}) = b\cdot c$;

3) $\exists \lim\limits_{\overline{x}\to\overline{a}} \dfrac{f(\overline{x})}{g(\overline{x})} = \dfrac{b}{c}$, $c \neq 0$.

Доведення дублює доведення відповідної теореми для функції 1 змінної. Так само, як і для функції однієї змінної доводиться і куві-валентність визначень за Гейне і за Коші.

Приклад. Чи існують подвійні границі, якщо так, то знайти їх:

а) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \dfrac{xy}{x^2+y^2}$ **;** **б)** $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \dfrac{xy^2}{x^2+y^2}$ **;** **в)** $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \dfrac{tg(xy)}{x}$ **;** **г)** $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} (1+x)^{\frac{1}{y}}$ **.**

Розв'язання. а) Нехай $x_n' = y_n' = \dfrac{1}{n}$, тоді $(x_n', y_n') = \left(\dfrac{1}{n}, \dfrac{1}{n}\right) \xrightarrow[n\to\infty]{IR_2^m} (0{,}0)$, а $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{x_n' y_n'}{x_n'^{\,2} + y_n'^{\,2}} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1/n^2}{2/n^2} = \dfrac{1}{2}$. Тепер нехай $x_n'' = \dfrac{y_n''}{2} = \dfrac{1}{n}$, тоді $(x_n'', y_n'') = \left(\dfrac{1}{n}, \dfrac{2}{n}\right) \xrightarrow[n\to\infty]{IR_2^m} (0{,}0)$, а $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{x_n'' y_n''}{x_n''^{2} + y_n''^{2}} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2/n^2}{5/n^2} = \dfrac{2}{5}$. Згідно означеню за Гейне поведінка функції в околі точки $(0{,}0)$ не повинна залежати від того, за яким напрямком послідовність прагне до цієї точки. В даному прикладі цей факт не здійснюється, тому границя не існує.

б) З оцінки $(|x|-|y|)^2 \geq 0$ випливає, що $0 \leq \dfrac{|xy|}{x^2+y^2} \leq \dfrac{1}{2}$, тому отримаємо $0 \leq \dfrac{|xy^2|}{x^2+y^2} \leq \dfrac{1}{2}|y|$. Тепер припустимо, що $x_n \to 0 \wedge y_n \to 0$, тоді за теоремою про двох міліціонерів отримаємо

$$\begin{array}{ccccc} 0 \leq & \dfrac{|x_n {y_n}^2|}{{x_n}^2 + {y_n}^2} & \leq & \dfrac{1}{2}|y_n| & \\ \downarrow & \downarrow & & \downarrow & . \\ 0 & 0 & & 0 & \end{array}$$

Останнє виконується незалежно від напрямку прагнення послідовності (x_n, y_n) до точки $(0{,}0\}$. *Висновок:* <u>границя існує і дорівнює 0.</u>

в) Зробимо елементарні перетворення і скористаємось теоремою про арифметичні операції над границями

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{tg(xy)}{x}=\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{tg(xy)}{xy}y=\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{tg(xy)}{xy}\lim_{y\to 0}y\,.$$

Для першого множника $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{tg(xy)}{xy}$ заміна $t=xy$ приводить до границі $\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{tg(t)}{t}=1$, а для другого, очевидно, – $\lim\limits_{y\to 0}y=0$, тому $\underline{\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{tg(xy)}{x}=0}$.

г) У випадку границі $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}(1+x)^{\frac{1}{y}}$ розглянемо ті ж самі дві послідовності, що і в прикладі а). Отримаємо:

якщо $x_n'=y_n'=\dfrac{1}{n}$, то $\lim\limits_{\substack{x_n'\to 0\\ y_n'\to 0}}(1+x_n')^{\frac{1}{y_n'}}=\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n=e$;

якщо $x_n''=\dfrac{y_n''}{2}=\dfrac{1}{n}$, то $\lim\limits_{\substack{x_n''\to 0\\ y_n''\to 0}}(1+x_n'')^{\frac{1}{y_n''}}=\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{\frac{n}{2}}=e^{\frac{1}{2}}$.

І в цьому прикладі знову приходимо до *висновку* про неіснування границі.

Поняття нескінченно віддалені точки. Якщо $\forall\delta>0\ \exists n\in N:\forall n\geq N\quad \rho(0,\overline{x_n})>\delta\quad\Rightarrow\quad \overline{x_n}$ *прагне до нескінчена віддаленої точки.*

🗁**Означення (за Гейне).**

$$\lim_{\substack{x_i\to a_i\ \forall i\neq i_0\\ x_{i_0}\to\infty}} f(x_1,...,x_{i_0-1},x_{i_0},x_{i_0+1},...,x_m)=b\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\forall\left\{\overline{x_n}\right\}\in D(f):(x_i^{(n)}\to a_i\forall i\neq i_0\wedge x_{i_0}^{(n)}\to\infty)\Rightarrow f(\overline{x_n})\to b$$

🗁**Означення (за Гейне).**

$$\lim_{\substack{x_1\to m\\ x_m\to\infty}} f(x_1,...,x_m)=b\Leftrightarrow\forall\left\{\overline{x_n}\right\}\in D(f)\quad x_i^{(n)}\to\infty\quad\forall i=\overline{1,m}\ \Rightarrow f(\overline{x_n})\to b\,.$$

Якщо фіксувати усі змінні, окрім однієї, то можна здобути означення повторної границі. Розглянемо випадок функції двох змінних.

🗁**Означення.** Нехай функція $u=f(x,y)$ задана в деякому проколотому прямокутному околі точки (x_0,y_0)

$$V=\left\{(x,y)\in IR^2:0<|x-x_0)<d_1\wedge 0<|y-y_0|<d_2\right\}.$$

Якщо для будь-якого фіксованого y, що задовольняє умові $0<|y-y_0|<d_2$, існує границя функції $u=f(x,y)$ однієї змінної x в точці $x=x_0$, а саме: $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y-fix}} f(x,y)=\varphi(y)$, а також, крім того, існує $\lim\limits_{y\to y_0}\varphi(y)=b$, тоді кажуть що існує *повторна границя* функції $u=f(x,y)$ в точці (x_0,y_0). Позначення: $\lim\limits_{y\to y_0}\lim\limits_{x\to x_0} f(x,y)=b$.

Аналогічно визначається границя $\lim\limits_{x\to x_0}\lim\limits_{y\to y_0} f(x,y)=b$.

Теорема 4. Якщо функція $u=f(x,y)$ задана в деякому проколотому прямокутному околі точки (x_0,y_0)

$$V=\left\{(x,y)\in IR^2 : 0<|x-x_0)<d_1 \wedge 0<|y-y_0|<d_2\right\},$$

1) існує подвійна границя $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x,y)=b$,

2) для будь-якого y, що задовольняє умові $0<|y-y_0|<d_2$, існує границя $\lim\limits_{x\to x_0} f(x,y)=\varphi(y)$,

$\Rightarrow$

1) існує повторна границя $\lim\limits_{y\to y_0}\varphi(y)=\lim\limits_{y\to y_0}\lim\limits_{x\to x_0} f(x,y)$,

2) крім того повторна границя дорівнює подвійній:

$$\lim_{y\to y_0}\lim_{x\to x_0} f(x,y)= =\lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x,y)=b.$$

Доведення. $\exists\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x,y)=b \Leftrightarrow \underline{\forall\varepsilon>0\exists\delta>0:\forall(x,y)\in V}$

$$0<\left|x-x_0\right|<\delta\wedge 0<\left|y-y_0\right|<\delta\Rightarrow\left|f(x,y)-b\right|<\frac{\varepsilon}{2}$$

Нехай y-фіксоване: $0<\left|y-y_0\right|<\delta$ перейдемо до границі в нерівності $\left|f(x,y)-b\right|<\frac{\varepsilon}{2}$ при $x\to x_0$:

$$\lim_{x\to x_0}\left|f(x,y)-b\right|\le\frac{\varepsilon}{2}<\varepsilon\Rightarrow\left|\lim_{x\to x_0} f(x,y)-b\right|<\varepsilon\Rightarrow\underline{\left|\varphi(y)-b\right|<\varepsilon}$$

Те, що підкреслено, означає, що $\exists\lim\limits_{y\to y_0}\varphi(y)=b$. ■

Наслідок 1.

Якщо виконуються дві зазначені умови теореми 4 і 3) для будь-якого x, що задовольняє умові $0<\|x-x_0\|<d_1$, існує границя $\lim\limits_{y\to y_0} f(x,y)=\phi(x)$,	$\Rightarrow$	1) існує повторна границя $\lim\limits_{x\to x_0}\varphi(x)=\lim\limits_{x\to x_0}\lim\limits_{y\to y_0} f(x,y)$, 2) крім того обидві повторні границі дорівнює подвійній: $\lim\limits_{y\to y_0}\lim\limits_{x\to x_0} f(x,y)=$ $=\lim\limits_{x\to x_0}\lim\limits_{y\to y_0} f(x,y)=\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x,y)=b$

Наслідок 2. Якщо повторні границі нерівні, то не існує подвійна границя.

Приклад 6. Знайти $\lim\limits_{y\to y_0}\lim\limits_{x\to x_0} f(x,y)$ і $\lim\limits_{x\to x_0}\lim\limits_{y\to y_0} f(x,y)$, якщо

а) $f(x,y)=\dfrac{x^y}{1+x^y},\quad x_0=\infty;\ y_0=+0$ **;**

б) $f(x,y)=\log_x(x+y),\quad x_0=1;\ y_0=0$ **.**

Розв'язання.

а) $\lim\limits_{\substack{x\to\infty\\ y-fix,y>0}}\dfrac{x^y}{1+x^y}=1\Rightarrow\lim\limits_{y\to+0}\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^y}{1+x^y}=\underline{1}$;

$$\lim_{\substack{y\to+0\\ x-fix}}\frac{x^y}{1+x^y}=\frac{1}{1+1}=2\ \Rightarrow\lim_{x\to\infty}\lim_{y\to+0}\frac{x^y}{1+x^y}=\frac{1}{\underline{2}}.$$

Звідки, зокрема, отримуємо, що подвійна границя $\lim\limits_{\substack{x\to\infty\\ y\to+0}}\dfrac{x^y}{1+x^y}$ <u>не існує</u>.

б) $\lim\limits_{\substack{x\to1\\ y-fix}}\log_x(x+y)=\lim\limits_{\substack{x\to1\\ y-fix}}\dfrac{\ln(x+y)}{\ln x}=\left\|\dfrac{const}{0}\right\|=\infty\ \Rightarrow$

$\Rightarrow\lim\limits_{y\to+0}\lim\limits_{x\to1}\log_x(x+y)=\underline{\infty}$;

$$\lim_{\substack{y\to0\\ x-fix}}\log_x(x+y)=\lim_{\substack{y\to0\\ x-fix}}\frac{\ln(x+y)}{\ln x}=\frac{\ln x}{\ln x}=1\ \Rightarrow$$

$\Rightarrow\lim\limits_{x\to1}\lim\limits_{y\to+0}\log_x(x+y)=\underline{1}$.

Звідки також випливає, що подвійна границя $\lim\limits_{\substack{x\to1\\ y\to0}}\log_x(x+y)$ <u>не існує</u>.

16.5. Неперервність функції багатьох змінних

🗁**Означення** *(формальне)***.** Функція $f(\overline{x})$ *називається неперервною в точці* $\overline{x}_0 \in \mathbb{R}_2^m$, якщо $\lim\limits_{\overline{x} \to \overline{x}_0} f(\overline{x}) = f(\overline{x}_0)$.

Самостійно записати усі означенні за Коші і за Гейне та еквівалентні їм, при цьому пам'ятати, що функція повинна бути визначеною в точці $\overline{x}_0$, тому відповідні околи не повинні бути проколотими і точка $\overline{x}_0$ повинна належати множині визначення функції.

Приклад . Дослідити на неперервність функцію

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2+y^2}, & x \neq 0 \; i \; y \neq 0 \\ 0, & x = y = 0 \end{cases}.$$

Розв'язання. Як було отримано в прикладі 5 а, ця функція в точці (0,0) на має границі, тому в цій точці вона розривна. У всіх інших точках (x_0, y_0), де $x_0 \neq 0$ або $y_0 \neq 0$, функція $f(x,y)$ неперервна, оскільки

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} \frac{xy}{x^2+y^2} = \frac{x_0 y_0}{x_0{}^2 + y_0{}^2} = f(x_0, y_0).$$

Висновок: <u>дана функція за сукупністю змінних x і y неперервна на всій площині, крім точки (0,0)</u>

В той же час ця функція неперервна в точці (0,0) за змінною x і за змінною y. До цього висновку за змінною x приходимо завдяки співвідношенням:

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ y - fix}} \frac{xy}{x^2+y^2} = \begin{cases} \dfrac{0 \cdot y}{0^2+y^2} = 0 = f(0,y), \textit{якщо } y \neq 0 \\ \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x \cdot 0}{x^2+0^2} = 0 = f(0,0), \textit{якщо } y = 0 \end{cases},$$

а за змінною y – аналогічно.

Наведений приклад свідчить про те, що функція, яка неперервна за кожною змінною в деякій точці, не обов'язково буде неперервною за сукупністю змінних в цій точці.

Якщо функція неперервна в кожній точці множини $M \subset \mathbb{R}_2^m$, то кажуть, що вона неперервна на цій множині.

16 ФУНКЦІЇ БАГАТЬОХ ЗМІННИХ

Властивості неперервних функцій.

1^0 ***(Арифметичні операції над неперервними функціями.)*** Якщо дві функції $f(\overline{x})$ i $g(\overline{x})$, що визначені на одній і тій же множині $M \subset \mathbb{R}_2^m$, неперервні в точці $\overline{x}_0 \in M$, то функції $f(\overline{x}) \pm g(\overline{x})$, $f(\overline{x}) \cdot g(\overline{x})$ і $f(\overline{x})/g(\overline{x})$ неперервні в точці $\overline{x}_0$ (у випадку частки $g(\overline{x}_0) \neq 0$).

Доведення отримаємо, як наслідок із теореми про арифметичні операції над границею формальним визн. непер. функції в точці.

Доведемо один із випадків. Інші доводяться аналогічно.

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{\overline{x}\to\overline{x}_0} f(\overline{x}) = f(\overline{x}_0)\\ \lim\limits_{\overline{x}\to\overline{x}_0} g(\overline{x}) = g(\overline{x}_0)\end{array}\right\} \Rightarrow \lim\limits_{\overline{x}\to\overline{x}_0} f(\overline{x})g(\overline{x}) = f(\overline{x}_0)g(\overline{x}_0) \Rightarrow f(\overline{x})g(\overline{x}) \text{ - неп. в т. } \overline{x}_0 . \blacksquare$$

2^0 ***(Неперервність складеної функції).*** Якщо функція $\overline{g}(\overline{t})$, що переводить множину $E_1 \subset \mathbb{R}_2^m$ в множину $E \subset \mathbb{R}_2^n$ неперервна на E_1 (тобто неперервною на E_1 є кожна з функцій координат $g_i(t_1,t_2,...,t_m), i = 1,...,n$), а функція $f(\overline{x})$, що переводить $E \subset \mathbb{R}_2^n$ в $\mathbb{R}^1$, неперервна на E, тоді функція $\varphi(\overline{t}) = f(\overline{g}(\overline{t}))$, що діє із $E_1 \subset \mathbb{R}_2^m$ в $\mathbb{R}^1$, є неперервною на $E_1 \subset \mathbb{R}_2^m$.

Доведення. Застосовуємо неперервність $f(\overline{x})$ в точці $\overline{x}_0$:

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0 : \left|x^{(1)} - x_0^{(1)}\right| < \delta \wedge ... \wedge \left|x^{(n)} - x_0^{(n)}\right| < \delta \Rightarrow \left|f(\overline{x}) - f(\overline{x}_0)\right| < \varepsilon .$$

Застосовуємо неперервність в точці $\overline{t}_0$ координатних функцій

$\forall i = \overline{1..n}$ для обраного $\delta > 0\ \exists \delta_i > 0$:

$$\left(\left|t^{(1)} - t_0^{(1)}\right| < \delta_i \wedge ... \wedge \left|t^{(m)} - t_0^{(m)}\right| < \delta_i\right) \Rightarrow \left|x^{(i)} - x_0^{(i)}\right| < \delta .$$

Знайдемо $\delta^* = \min\limits_{i=1,n} \delta_i$, тоді

$$\left(\left|t^{(1)} - t_0^{(1)}\right| < \delta_i \wedge ... \wedge \left|t^{(m)} - t_0^{(m)}\right| < \delta_i\right) \Rightarrow \left(\left|x^{(i)} - x_0^{(i)}\right| < \delta \wedge ... \wedge \left|x^{(n)} - x_0^{(n)}\right| < \delta\right).$$

Отже,

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \exists \delta^* > 0\ \left(\left|t^{(1)} - t_0^{(1)}\right| < \delta_i \wedge ... \wedge \left|t^{(m)} - t_0^{(m)}\right| < \delta_i\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(\left|x^{(i)} - x_0^{(i)}\right| < \delta \wedge ... \wedge \left|x^{(n)} - x_0^{(n)}\right| < \delta\right) \Rightarrow .$$

$$\left|f(\overline{x}) - f(\overline{x}_0)\right| = \left|f(\overline{g}(\overline{t})) - f(\overline{g}(\overline{t}_0))\right| < \varepsilon . \blacksquare$$

3^0 ***(Теорема Коші* про проходження неперервної функції через нуль при зміні знаків*)***. Якщо функція $z = f(\overline{x})$ неперервна в зв'язній області $E \subset \mathbb{R}_2^m$, до того ж, $\exists \overline{x}_1, \overline{x}_2 \in E : f(\overline{x}_2) \cdot f(\overline{x}_1) < 0$, і, тоді можна знайти таку точку $\overline{x}^* \in E$, що $f(\overline{x}^*) = 0$.

Доведення. Розглянемо двовимірний випадок, для загального випадку доведення аналогічне. Розглянемо ламану в $\mathbb{R}^2$: $\{\overline{x}_k\}_{k=1}^n$ - вузли ламаної, ланки ламаної $\left[\overline{x}_{k-1}, \overline{x}_k\right]$.

Без обмеження загальності роздумів можна вважати, що точки в яких функція приймає значення різних знаків є кінцями одної ланки ламаної. Чому це так? Якщо ці точки сполучити за допомогою ламаної, що утворюється більше, ніж з одноєї ланкм, тоді пересуваючись від одного вузла до іншого, можна знайти таку ланку, значення функції на кінцях якої приймає різні знаки. І саме цю лвнку будемо вважати шуканою. Введемо для неї позначення:

$\overline{x_1} = (x^1, y^1)$, $\quad \overline{x_2} = (x^2, y^2)$.

Розглянемо відрізок $\left[\overline{x}_1, \overline{x}_2\right]$. Він визначається рівняннями

$x = t(x^1 - x^2) + x^2 = \varphi(t)$,

$y = t(y^1 - y^2) + y^2 = \psi(t)$, $\quad t \in [0,1]$.

Зокрема, кінці відрізка мають вигляд

$\overline{x_1} = (\varphi(1), \psi(1))$, $\quad \overline{x_2} = (\varphi(0), \psi(0))$.

Функції $\varphi(t), \psi(t)$ - лінійні, тому неперервні на $[0,1]$. Розглянемо $g(t) = f(\varphi(t), \psi(t))$ - неперервна на $t \in [0,1]$, як композиція неперервних функцій.

Знайдемо значення складеної функції на кінцях відрізка $[0,1]$:

$g(1) = f(\varphi(1), \psi(1)) = f(\overline{x_1})$,

$g(0) = f(\varphi(0), \psi(0)) = f(\overline{x_2})$.

Оскільки $f(\overline{x}_2) \cdot f(\overline{x}_1) < 0$, то $g(0) \cdot g(1) < 0$. Крім того, функція $g(t)$ непер на $[0,1]$. За теоремою Коші про проходження неперервної функції однієї змінної через нуль при зміні знаків $\exists t^* \in (0,1) : g(t^*) = 0$. Далі маємо:

$t^* \xrightarrow{g} (\varphi(t^*), \psi(t^*)) = x^*$ - лежить на $[x_1, x_2] \subset D \Rightarrow$

$\Rightarrow g(t^*) = f(\varphi(t^*), \psi(t^*)) = f(x^*) = 0$. ■

Лема Больцано – Вейєрштрасса. Із будь - якої обмеженої послідовності простору $\mathbb{R}_2^m$ можна виділити збіжну підпослідовність.

Доведення. Розглянемо лему у випадку простору $\mathbb{R}_2^3$:

$\{(x_n, y_n, z_n)\}$ - обм. $\Rightarrow \exists A > 0 : \rho((x_n, y_n, z_n),(0,0,0)) \le A \quad \forall n \in \mathbb{N}$, тобто

$\sqrt{(x_n - 0)^2 + (y_n - 0)^2 + (z_n - 0)} \le A \Rightarrow \left(|x_n| \le A \wedge |y_n| \le A \wedge |z_n| \le A\right) \quad \forall n \in \mathbb{N}$.

Розглянемо $\{x_n\}$, маємо $|x_n| \le A \quad \forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow \{x_n\}$ - обм. числова послідовність, тоді (за теоремою Б.-В. для числових послідовностей) із обмеженої послідовності $\{x_n\}$ можемо виділити збіжну підпослідовність $\{x_{k_n}\}$ таку, що $\lim\limits_{n\to\infty} x_{k_n} = x_0$.

Обраній підпослідовності членів $\{x_{k_n}\}$, розташованих на перших координатах, відповідає послідовність других координат $\{y_{k_n}\}$, для якої $|y_{k_n}| \le A \quad \forall n \in \mathbb{N}$. Послідовність $\{y_{k_n}\}$ являється обмеженою числовою послідовністю $\Rightarrow$ (за теоремою Б.-В.) $\exists \{y_{l_{k_n}}\}$ - збіжна, тобто $\lim\limits_{n\to\infty} y_{l_{k_n}} = y_0$. Оскільки $\lim\limits_{n\to\infty} x_{k_n} = x_0$, то $\lim\limits_{n\to\infty} x_{l_{k_n}} = x_0$.

Таким чином виділено підпослідовність $\{(x_{l_{k_n}}, y_{l_{k_n}}, z_{l_{k_n}})\}$. Розглянемо $\{z_{l_{k_n}}\}$, для неї $|z_{l_{k_n}}| \le A \quad \forall n \in \mathbb{N}$, тому $\{z_{l_{k_n}}\}$ - обмежена числова послідовність $\Rightarrow$ (за теоремою Б.-В.) $\exists \{y_{p_{l_{k_n}}}\}$ - збіжно до z_0.

Отже, послідовність

$$\begin{array}{ccc} \{(x_{p_{l_{k_n}}}, & y_{p_{l_{k_n}}}, & z_{p_{l_{k_n}}})\} \\ \Downarrow & \Downarrow & \Downarrow \\ (x_0, & y_0, & z_0). \end{array}$$

покоординатно збігається до

В цьому просторі збіжність еквівалентна п координатній збіжності. Тому отримана підпослідовність збігається до елементу (x_0, y_0, z_0) в просторі $\mathbb{R}_2^3$. ■

4⁰ ***(Перша теорема Вейєрштрасса.)*** Якщо функція $f(\overline{x})$ неперервна в обмеженій замкненій області $D \subset \mathbb{R}_2^m$, то ця функція обмежена в цій області.

Доведення. Припустимо супротивне: $f(\overline{x})$ - необмежена в $D \Rightarrow$ $\forall n \in \mathbb{N} \ \exists \overline{x}_n \in D : f(\overline{x}_n) > n$.

Утворилась послідовність $\{\overline{x}_n\} \subset D$. Оскільки D - обмежена множина в $\mathbb{R}_2^m$, то $\{\overline{x}_n\}$ - обмежена в $\mathbb{R}_2^m$. За лемою Б.-В. $\exists \left\{\overline{x}_{k_n}\right\}$ - збіжна до $\overline{x}_0$.

$$\left.\begin{array}{l}\overline{x}_{k_n} \to \overline{x}_0, \\ D \text{ - замкнена,}\end{array}\right\} \Rightarrow \quad \overline{x}_0 \in D.$$

Оскільки функція $f(\overline{x})$ неперервна в D, то, зокрема, неперервна в точці $\overline{x}_0 \in D$, тому (за означенням за Гейне) $\lim\limits_{n\to\infty} f(\overline{x}_{k_n}) = f(\overline{x}_0)$. Але, з іншого боку, $f(\overline{x}_n) > n$, а тому $f(\overline{x}_{k_n}) > k_n$, а це означає, що $\lim\limits_{n\to\infty} f(\overline{x}_{k_n}) = \infty$. Отримані нерівності суперечать одна одній, що і доводить потрібне. ■

5^0 *(Друга теорема Вейєрштрасса).* Якщо функція $f(\overline{x})$ неперервна в обмеженій замкненій області $D \subset \mathbb{R}_2^m$, то ця функція в цій області досягає своїх точних верхньої та нижньої меж.

Довести самостійно, аналогічно функції однієї змінної.

Зауваження. Вимоги на область D про її замкненість і обмеженість є обов'язковою. За відсутності однієї з них теореми Вейерштраса не здійснюються. Самостійно навести приклад!

🗁**Означення.** Функція $f(\overline{x})$ називається рівномірно неперервною на множині $D \subset \mathbb{R}_2^m$, якщо

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0\ \forall \overline{x}_1, \overline{x}_2 \in D\ \rho(\overline{x}_1, \overline{x}_2) < \delta \Rightarrow \left| f(\overline{x}_1) - f(\overline{x}_2) \right| < \varepsilon.$$

Має місце наступна теорема.

Теорема (*теорема Кантора про рівномірну неперервність*)**.** Неперервна на замкненій обмеженій множині функція являється рівномірно неперервною на цій множині.

Доведення. Припустимо супротивне, що функція $f(\overline{x})$ неперервна на $D \subset \mathbb{R}_2^m$, але не являється рівномірно неперервною на D. Тоді

$$\exists \varepsilon > 0\ \forall n \in \mathbb{N}\ \exists \overline{x}_n', \overline{x}_n'' \in D\ \rho(\overline{x}_n', \overline{x}_n'') < \frac{1}{n} \wedge \left| f(\overline{x}_n') - f(\overline{x}_n'') \right| \geq \varepsilon. \tag{1}$$

Оскільки послідовність $\{\overline{x}_n'\} \subset D$, а множина D - обмежена множина в $\mathbb{R}_2^m$, то $\{\overline{x}_n'\}$ - обмежена в $\mathbb{R}_2^m$ За лемою Б. – В. $\exists \left\{\overline{x}_{k_n}'\right\}$ - збігається до до $\overline{x}_0$.

$$\left.\begin{array}{l}\overline{x}_{k_n}' \to \overline{x}_0, \\ D \text{ - замкнена,}\end{array}\right\} \Rightarrow \quad \overline{x}_0 \in D.$$

Оскільки $\rho(\overline{x}'_n,\overline{x}''_n)<\dfrac{1}{n}$, то $\rho(\overline{x}'_{k_n},\overline{x}''_{k_n})<\dfrac{1}{k_n}$. Крім того $\overline{x}'_{k_n}\to\overline{x}_0$, тому $\overline{x}''_{k_n}\to\overline{x}_0$.

Оскільки функція $f(\overline{x})$ неперервна в D, то, зокрема, неперервна в точці $\overline{x}_0\in D$, тому $\lim\limits_{n\to\infty} f(\overline{x}'_{k_n})=f(\overline{x}_0)$ і $\lim\limits_{n\to\infty} f(\overline{x}''_{k_n})=f(\overline{x}_0)$. Звідси випливає, що послідовність $\left\{f(\overline{x}'_{k_n})-f(\overline{x}''_{k_n})\right\}$ є нескінченно малою. Це неможливо разом з нерівністю $\left|f(\overline{x}'_n)-f(\overline{x}''_n)\right|\geq\varepsilon$ в (1). Отримане протиріччя доводить теорему. ■

Зауваження. Назвемо діаметром обмеженої множини $D\subset\mathbb{R}_2^m$ значення

$$d(D)=\sup_{\overline{x}_1,\overline{x}_2\in D}\rho(\overline{x}_1,\overline{x}_2).$$

Наслідок (*наслідок із теореми Кантора(*. Нехай функція $f(\overline{x})$ неперервна на замкнутій обмеженій множині $D\subset\mathbb{R}_2^m$. Тоді $\forall\varepsilon>0\;\exists\delta=\delta(\varepsilon)>0$, що на кожній замкненій підмножині D_1 множини D, діаметр якої менше *δ*, коливання $\omega_f(D_1)$ функції $f(\overline{x})$ менше за *ε*, тобто

$$\forall\varepsilon>0\;\exists\delta=\delta(\varepsilon)>0\;\forall D_1\subset D\text{ - замкненій }d(D_1)<\delta\Rightarrow\omega_f(D_1)<\varepsilon.$$

16.6 Диференціальне числення функцій багатьох змінних

16.6.1. Часткові похідні. Диференційованість.

Насамперед з диференціальним числення пов'язано багато питань про застосування теорії функцій багатьох змінних в економіці. Розгляду деяких таких питань присвячено цей розділ.

🗁**Означення.** Фіксуємо $i\in\{1,...m\}$. Якщо функція $f(\overline{x})$ задана на області $E\subset\mathbb{R}_2^m$, а $\overline{x}_0=(x_1^{(0)},x_2^{(0)},...,x_m^{(0)})$ – внутрішня точка E і Δx_i - такий приріст аргументу x_i, що точка $(x_1^{(0)},..,x_{i-1}^{(0)},x_i^{(0)}+\Delta x_i,x_i^{(0)},...,x_m^{(0)})$ залишається всередині множини E, то *частковим приростом цієї функції в точці* $\overline{x}_0$ *за змінною* x_i називається значення

$$\Delta_x f(\overline{x}_0)=f(x_1^{(0)},..,x_{i-1}^{(0)},x_i^{(0)}+\Delta x_i,x_{i+1}^{(0)},...,x_m^{(0)})-f(x_1^{(0)},...,x_{i-1}^{(0)},x_i^{(0)},x_{i+1}^{(0)},...,x_m^{(0)})$$

🗁**Означення.** Якщо для функції $f(\overline{x})$, що задана на області $E\subset\mathbb{R}_2^m$, і для точки $\overline{x}_0\in E$ існує границя $\lim\limits_{\Delta x_i\to 0}\dfrac{\Delta_x f(\overline{x}_0)}{\Delta x_i}$, то вона нази-

вається *частковою похідною функції* $f(\overline{x})$ *в точці* $\overline{x}_0$ *за змінною* x_i.
Позначення $\dfrac{\partial f(\overline{x}_0)}{\partial x_i}$ або $f'_{x_i}(\overline{x}_0)$ ($i \in \{1,...m\}$).

Приклад. Знайти часткові похідні функцій $f(x,y) = e^{erctg\, xy}$, $g(x,y) = x^y$.

Розв'язання. Фіксуємо по черзі змінні y і x, тоді

$$\frac{\partial f}{\partial x} = e^{erctg\, xy} \frac{y}{1+(xy)^2}, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = e^{erctg\, xy} \frac{x}{1+(xy)^2};$$

$$\frac{\partial g}{\partial x} = yx^{y-1}, \quad \frac{\partial g}{\partial y} = x^y \ln x.$$

Зауваження. Якщо функція однієї змінної $f(x)$ диференційовна в т. x_0 , то вона в цій точці неперервна. Для функції багатьох змінних існування усіх часткових похідних за усіма змінними не забезпечує неперервність функції $f(\overline{x})$ в т. x_0.

Зауваження.
1) Функція однієї змінної $f(x)$ диференційовна в т. x_0 $\overset{def}{\Leftrightarrow} \Delta f(x_0) = A \cdot \Delta x + o(\Delta x)$, де $\lim\limits_{\Delta x_i \to 0} \dfrac{o(\Delta x)}{\Delta x} = 0$;
2) Відомо, що функція однієї змінної $f(x)$ диференційовна в т. x_0 $\Leftrightarrow \exists\, f'(x_0)$.

🗁**Означення 1.** Якщо функція $f(\overline{x})$ задана на області $E \subset IR_2^m$, а $\overline{x}_0 = (x_1^{(0)}, x_2^{(0)},...,x_m^{(0)})$ – внутрішня точка E і Δx_i – такі прирости аргументів x_i ($i = 1,...,m$), що $(x_1^{(0)} + \Delta x_1, x_2^{(0)} + \Delta x_2,..., x_m^{(0)} + \Delta x_m) \in E$, а повний приріст функції можна представити у вигляді

$$\Delta f(\overline{x}_0) = f(x_1^{(0)} + \Delta x_1, x_2^{(0)} + \Delta x_2,..., x_m^{(0)} + \Delta x_m) - f(x_1^{(0)}, x_2^{(0)},..., x_m^{(0)}) =$$
$$= A_1 \cdot \Delta x_1 + A_2 \cdot \Delta x_2 + ... + A_i \cdot \Delta x_i + ... + A_m \cdot \Delta x_m +$$
$$+ \alpha_1 \cdot \Delta x_1 + \alpha_2 \cdot \Delta x_2 + ... + \alpha_i \cdot \Delta x_i + ... + \alpha_m \cdot \Delta x_m,$$

де $A_1, A_2, ..., A_i, ..., A_m = const \quad \forall\, i = \overline{1,m} \lim\limits_{\substack{\Delta x_i \to 0 \\ ... \\ \Delta x_m \to 0}} \alpha_i = 0$,

$\alpha_i = \alpha_i(\Delta x_1, \Delta x_2, ..., \Delta x_i, ..., \Delta x_m)$, $\alpha_i \big|_{\Delta x_1 = 0\, ..\, \Delta x_m = 0.} = 0$ то така функція називається *диференційованою* в точці $\overline{x}_0$.

🗁**Означення 2.** Якщо функція $f(\overline{x})$ задана на області $E \subset IR_2^m$, а $\overline{x}_0 = (x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, ..., x_m^{(0)})$ – внутрішня точка E і Δx_i – такі прирости аргументів x_i ($i = 1,...,m$), що $(x_1^{(0)} + \Delta x_1, x_2^{(0)} + \Delta x_2, ..., x_m^{(0)} + \Delta x_m) \in E$, а повний приріст функції можна представити у вигляді

$$\Delta f(\overline{x}_0) = f(x_1^{(0)} + \Delta x_1, x_2^{(0)} + \Delta x_2, ..., x_m^{(0)} + \Delta x_m) - f(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, ..., x_m^{(0)}) =$$
$$= A_i \Delta x_1 + A_2 \Delta x_2 + ... + A_m \Delta x_m + o(\rho), \quad (1)$$

де $\rho = \sqrt{(\Delta x_1)^2 + (\Delta x_2)^2 + ... + (\Delta x_m)^2}$, а $\lim\limits_{\rho \to 0} o(\rho) / \rho = 0$, то така функція називається *диференційованою* в точці $\overline{x}_0$.

Головна лінійна частина приросту функції в (2.1) називається *диференціалом цієї функції в точці* $\overline{x}_0$, який позначається $df(\overline{x}_0)$, тобто

$$df(\overline{x}_0) = A_i dx_1 + A_2 dx_2 + ... + A_m dx_m, \quad (2)$$

де $dx_i = \Delta x_i \forall i = 1,...,m$.

Треба довести, що *def 1еквівалентне def 2,* тобто

1) *def 1* $\Rightarrow$ *def 2,* тобто $\alpha_1 \cdot \Delta x_1 + ... + \alpha_i \cdot \Delta x_i + ... + \alpha_m \cdot \Delta x_m$ - функцією $o(\rho)$.

2) *def 2* $\Rightarrow$ *def 1,* тобто функцію $o(\rho)$ можна представити у вигляді $\alpha_1 \cdot \Delta x_1 + ... + \alpha_i \cdot \Delta x_i + ... + \alpha_m \cdot \Delta x_m$, де $\forall\ i = \overline{1,m}$ $\lim\limits_{\substack{\Delta x_i \to 0 \\ ... \\ \Delta x_m \to 0}} \alpha_i = 0$.

Доведення. Спочатку зауважимо, що

$\rho \to 0 \Leftrightarrow \sqrt{\Delta x_1^2 + ... + \Delta x_i^2 + .. + \Delta x_m^2} \to 0 \Leftrightarrow \Delta x_i \to 0\ \forall\ i = \overline{1,m}$.

1) Оскільки

$$\left| \frac{\alpha_1 \cdot \Delta x_1 + \alpha_2 \cdot \Delta x_2 + ... + \alpha_i \cdot \Delta x_i + ... + \alpha_m \cdot \Delta x_m}{\rho} \right| =$$
$$= |\alpha_1| \cdot \left| \frac{\Delta x_1}{\rho} \right| + |\alpha_2| \cdot \left| \frac{\Delta x_2}{\rho} \right| + ... + |\alpha_i| \cdot \left| \frac{\Delta x_i}{\rho} \right| + ... + |\alpha_m| \cdot \left| \frac{\Delta x_m}{\rho} \right| \le$$
$$\le |\alpha_1| + |\alpha_2| + ... + |\alpha_i| + ... + |\alpha_m|,$$

то

$$0 \le \lim_{\rho \to 0} \left| \frac{\alpha_1 \cdot \Delta x_1 + \alpha_2 \cdot \Delta x_2 + ... + \alpha_i \cdot \Delta x_i + ... + \alpha_m \cdot \Delta x_m}{\rho} \right| \le$$
$$\le \lim_{\substack{\Delta x_i \to 0 \\ ... \\ \Delta x_m \to 0}} \left(|\alpha_1| + |\alpha_2| + ... + |\alpha_i| + ... + |\alpha_m| \right) = 0.$$

Тобто $\alpha_1 \cdot \Delta x_1 + \ldots + \alpha_i \cdot \Delta x_i + \ldots + \alpha_m \cdot \Delta x_m = o(\rho)$.

2) Оскільки

$$o(\rho) = \frac{o(\rho)\cdot\rho^2}{\rho^2} = \frac{o(\rho)(\Delta x_1^2 + \ldots + \Delta x_i^2 + \,.\,. + \Delta x_m^2)}{\rho^2} =$$

$$= \frac{o(\rho)}{\rho}\cdot\frac{\Delta x_1}{\rho}\cdot\Delta x_1 + \ldots + \frac{o(\rho)}{\rho}\cdot\frac{\Delta x_i}{\rho}\cdot\Delta x_i + \ldots + \frac{o(\rho)}{\rho}\cdot\frac{\Delta x_m}{\rho}\cdot\Delta x_m,$$

то, позначивши $\alpha_i = \dfrac{o(\rho)}{\rho}\cdot\dfrac{\Delta x_i}{\rho}$, отримаємо

$$\lim_{\substack{\Delta x_i \to 0 \\ \ldots \\ \Delta x_m \to 0}} \alpha_i = \lim_{\substack{\Delta x_i \to 0 \\ \ldots \\ \Delta x_m \to 0}} \frac{o(\rho)}{\rho}\cdot\frac{\Delta x_i}{\rho} = 0 \ . \blacksquare$$

Теорема *(необхідна умова диференційованості функції в точці).* Якщо функція $f(\bar{x})$ диференційована в точці $\bar{x}$, то вона в цій точці має часткові похідні за кожною із змінних, і у формулі (1)

$$A_i = \frac{\partial f(\bar{x})}{\partial x_i}\,\forall i = 1,\ldots,m\,.$$

Доведення. Якщо функція $f(\bar{x})$ диференційована в точці $\bar{x}$, то

$$\Delta f(\bar{x}) = f(x_1 + \Delta x_1, x_2 + \Delta x_2, \ldots, x_i + \Delta x_i, \ldots, x_m + \Delta x_m) - f(x_1, x_2, \ldots, x_i, \ldots, x_m) =$$
$$= A_1 \cdot \Delta x_1 + A_2 \cdot \Delta x_2 + \ldots + A_i \cdot \Delta x_i + \ldots + A_m \cdot \Delta x_m +$$
$$+ \alpha_1 \cdot \Delta x_1 + \alpha_2 \cdot \Delta x_2 + \ldots + \alpha_i \cdot \Delta x_i + \ldots + \alpha_m \cdot \Delta x_m$$

Покладемо $\Delta x_j = 0 \quad \forall\ j \neq 0$, тоді

$$f(x_1 + \Delta x_1, \ldots, x_i + \Delta x_i, \ldots, x_m) - f(x_1, \ldots, x_i, \ldots, x_m) = \Delta_i f(\bar{x}) \quad A_i \Delta x_i + \alpha_i \Delta x_i\,.$$

Звідки

$$\frac{\Delta_i f(\bar{x})}{\Delta x_i} = A_i + \alpha_i\,,$$

тобто

$$\lim_{\Delta x_i \to 0} \frac{\Delta_i f(\bar{x})}{\Delta x_i} = \frac{\partial f}{\partial x_i}(\bar{x}) = A_i + \lim_{\substack{\Delta x_i \to 0 \\ \ldots \\ \Delta x_m \to 0}} \alpha_i \ \Rightarrow \exists\ \frac{\partial f}{\partial x_i}(\bar{x}) = A_i.\ \blacksquare$$

З наведеної теореми випливає, що для диференційованої функції

$$\Delta f(\bar{x}_0) = f'_{x_1}(\bar{x}_0)\Delta x_1 + f'_{x_2}(\bar{x}_0)\Delta x_2 + \ldots + f'_{x_m}(\bar{x}_0)\Delta x_m + o(\rho)\,, \qquad (2.1а)$$

$$df(\bar{x}_0) = \frac{\partial f(\bar{x}_0)}{\partial x_1}dx_1 + \frac{\partial f(\bar{x}_0)}{\partial x_2}dx_2 + \ldots + \frac{\partial f(\bar{x}_0)}{\partial x_m}dx_m =$$

$$= f'_{x_1}(\bar{x}_0)dx_1 + f'_{x_2}(\bar{x}_0)dx_2 + \ldots + f'_{x_m}(\bar{x}_0)dx_m\,, \qquad (2а)$$

Скорочений запис:

$$\Delta f(\overline{x}_0) = \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial f}{\partial x_i}(\overline{x}_0) \cdot \Delta x_i + o(\rho)\ .$$

Відповідно, формула для обчислення диференціалу буде мати вигляд:

$$df(\overline{x}_0) = \sum_{i=1}^{m} A_i \Delta x_i = \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial f}{\partial x_i}(\overline{x}_0) \cdot \Delta x_i\ .$$

Нехай $dx_i = \Delta x_i$, тоді

$$\boxed{df(\overline{x}_0) = \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial f}{\partial x_i}(\overline{x}_0) \cdot dx_i\ .}$$

Приклад 2.3. Чи є диференційованою в точці $O(0,0)$ функція $f(x,y) = \sqrt[3]{x^3 + y^3}$?

Розв'язання. Знайдемо спочатку часткові похідні функції в точці $O(0,0)$ за означенням 2.1:

$$f'_x(0,0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(0+\Delta x, 0) - f(0,0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sqrt[3]{(\Delta x)^3 + 0^3} - 0}{\Delta x} = 1\ ,$$

$$f'_y(0,0) = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(0, 0+\Delta y) - f(0,0)}{\Delta y} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{\sqrt[3]{(\Delta y)^3} - 0}{\Delta y} = 1\ .$$

Повний приріст функції в точці $O(0,0)$:

$$\Delta f(0,0) = f(0+\Delta x, 0+\Delta y) - f(0,0) = \sqrt[3]{(\Delta x)^3 + (\Delta y)^3}\ .$$

Згідно до формули (2.1а) повний приріст диференційованої функції повинен допускати представлення у вигляді

$$\Delta f(0,0) = f'_x(0,0)\Delta x + f'_y(0,0)\Delta y + o(\rho)\text{, де } \rho = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}\ ,$$

тобто $\sqrt[3]{(\Delta x)^3 + (\Delta y)^3} = 1 \cdot \Delta x + 1 \cdot \Delta y + o(\rho)$. Перевіримо, чи насправді

$$\sqrt[3]{(\Delta x)^3 + (\Delta y)^3} - \Delta x - \Delta y = o(\rho)\ . \qquad (*)$$

Для цього перевіримо, чи буде границя відношення виразу зліва до $\rho = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}$ при $\rho \to 0$ дорівнювати 0, скориставшись тим, що $\rho \to 0 \Leftrightarrow (\Delta x, \Delta y) \to (0,0)$. Розглянемо цю границю:

$$\lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0}} \frac{\sqrt[3]{(\Delta x)^3 + (\Delta y)^3} - \Delta x - \Delta y}{\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}}\ . \qquad (**)$$

Для послідовності $(\Delta x_n, \Delta y_n) = \left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right) \xrightarrow[n \to \infty]{IR_2^m} (0,0)$ отримаємо

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt[3]{(\Delta x_n)^3+(\Delta y_n)^3}-\Delta x_n-\Delta y_n}{\sqrt{(\Delta x_n)^2+(\Delta y_n)^2}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt[3]{\frac{2}{n^3}}-\frac{2}{n}}{\sqrt{\frac{2}{n^2}}}=\frac{\sqrt[3]{2}-2}{\sqrt{2}}\neq 0\,.$$

Оскільки за одним з напрямків прагнення $(\Delta x,\Delta y)$ до (0,0) границя не дорівнює 0, то границя (**) не дорівнює 0, тому співвідношення (*) невірне. Значить дана <u>функція не є диференційованою в точці (0,0).</u>

Завдання 2.1. Перевірити, чи існує границя (**).

Зауваження: Необхідна умова диференційованості функції багатьох змінних не є достатньою. Тобто із існування усіх часткових похідних не обов'язково випливає диференційованість.

Теорема 2.2 *(достатня умова диференційованості функції в точці).* Якщо функція $f(\bar{x})$ має часткові похідні за кожною із змінних в деякому околі точці $\bar{x}_0$ і ці часткові похідні неперервні в цій точці, то вона в цій точці диференційована. Тобто

$$\left.\begin{array}{l}\exists\,\delta>0:\ \forall\,\bar{x}\in V_\delta(\bar{x}_0)\,\forall i=\overline{1,m}\,\exists\dfrac{\partial f}{\partial x_i}(\bar{x}),\\ \dfrac{\partial f}{\partial x_i}(\bar{x})\text{ - неперервна в т. }\bar{x}_0\ \forall\, i=\overline{1,m},\end{array}\right\}\Rightarrow f(\bar{x})\text{ диференційована в т. }\bar{x}_0$$

Доведення. Розглянемо випадок функції двох змінних. Нехай $x=x_0+\Delta x,\ y=y_0+\Delta y:(x,y)\in V_\delta(x_0,y_0)$. Потрібно довести можливість представлення приросту функції в точці (x_0,y_0) у вигляді $f(x,y)-f(x_0,y_0)=\dfrac{\partial f}{\partial x}\Delta x+\dfrac{\partial f}{\partial y}\Delta y+\alpha\Delta x+\beta\Delta y$, де $\alpha\ i\ \beta$ - н.м.ф. в точці $\Delta x=0,\Delta y=0$.

Маємо

$$f(x,y)-f(x_0,y_0)=f(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0)-f(x_0+\Delta x,y_0)+f(x_0+\Delta x,y_0)$$

В силу існування похідної $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)$ в точках інтервалу $(x_0-\delta,x_0-\delta)$ при фіксованому y_0 маємо диференційовність, а значить неперервність функції $f(x,y)$ за змінною *x* на відрізку $[x_0,x_0+\Delta x]$ при кожному фіксованому y_0. Це дає можливість застосувати формулу Лагранжа скінченних приростів:

$\exists\Theta_1 \in (0,1)\ f(x_0+\Delta x, y_0) - f(x_0, y_0) = \Delta_x f(x_0, y_0) = \dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0 + \Theta_1 \Delta x, y_0)\cdot \Delta x$.

Аналогічно за змінною y :

$\exists\Theta_2 \in (0,1)$

$$f(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y) - f(x_0+\Delta x, y_0) = \Delta_y f(x_0+\Delta x, y_0) = \frac{\partial f}{\partial y}(x_0+\Delta x, y_0+\Theta_2\Delta y)\cdot\Delta y.$$

Маємо:

$$\Delta f(x_0, y_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0+\Theta_1\Delta x, y_0)\cdot\Delta x + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0+\Delta x, y_0+\Theta\Delta y)\cdot\Delta y\ .$$

Оскільки часткові похідні неперервні в т. (x_0, y_0), то існують $\alpha\ i\ \beta$ - н.м.ф. в точці $\Delta x = 0, \Delta y = 0$ такі, що

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0+\Theta_1\Delta x, y_0)\cdot\Delta x + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0+\Delta x, y_0+\Theta\Delta y)\cdot\Delta y =$$

$$= \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) + \alpha\right)\cdot\Delta x + \left(\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) + \alpha_2\right)\cdot\Delta y\ ,$$

звідки

$$\Delta f(x_0, y_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)\cdot\Delta x + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)\cdot\Delta y + \alpha\Delta x + \beta\Delta y\ .\ \blacksquare$$

Завдання 2.2. З'ясувати, яка саме умова попередньої теореми не виконується для функції, що наведена в прикладі 2.3.

Існування усіх часткових похідних функції в точці ще не гарантує її неперервності в цій точці, але справедлива наступна теорема.

Теорема 2.3. Якщо функція $f(\overline{x})$ диференційована в точці $\overline{x}_0$, то вона в цій точці неперервна.

Доведення. Нехай $\overline{x}_0 \in D(\overline{f})$,

$$(x_1^{(0)} + \Delta x_1, \ldots, x_m^{(0)} + \Delta x_m) \in D(f)\ .$$

Довести, що

$$\lim_{\substack{x_1 \to x_1^{(0)} \\ \ldots \\ x_1 \to x_{m1}^{(0)}}} f(x_1, \ldots, x_m) = f(x_1^{(0)}, \ldots, x_m^{(0)})\ .$$

Оскільки

$$f(x_1, \ldots, x_m) - f(x_1^{(0)}, \ldots, x_m^{(0)}) = f(x_1^{(0)} + \Delta x_1^{(0)}, \ldots, x_m^{(0)} + \Delta x_m^{(0)}) - f(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \ldots, x_m^{(0)})\ ,$$

То потрібно фактично перевірить

$$\lim_{\substack{\Delta x_1 \to 0 \\ \ldots \\ \Delta x_m \to 0}} \Delta f(\overline{x}_0) = 0\ .$$

Ця рівність доводиться за допомогою граничного переходу у співвідношенні

$$\Delta f(\overline{x_0}) = \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial f}{\partial x_i}(\overline{x_0})\Delta x_i + 0(\rho)$$

при $\Delta x_1 \to 0, \ldots, \Delta x_m \to 0$. ■

16.6.2. Часткові похідні складеної функції.

Теорема (*про диференціювання складеної функції).* Нехай

1) g переводить $E_1 \subset IR^m$ в $E \subset IR^n$ за правилом $\bar{x} = g(\bar{t})$, тобто $(x_1, x_2, ..., x_n) = \left(g_1(t_1, t_2, ..., t_m), g_2(t_1, t_2, ..., t_m), ..., g_n(t_1, t_2, ..., t_m)\right)$,

2) $\forall j = 1, ..., m$ функції $x_j = g_j(t_1, t_2, ..., t_m)$ диференційовні в точці $\bar{t}_0 = (t_1^{(0)}, t_2^{(0)}, ..., t_m^{(0)}) \in E_1$,

3) функція $f(\bar{x}) = f(x_1, x_2, ..., x_n)$ диференційовна в точці $\bar{x}_0 = (x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, ..., x_n^{(0)}) \in E$, що відповідає $\bar{t}_0$, тобто $x_j^{(0)} = g_j(\bar{t}_0)$, тоді функція $\varphi(\bar{t}) = f(g(\bar{t}))$ диференційована в точці $\bar{t}_0$, а її часткові похідні можуть бути знайдені за формулами

$$\left.\frac{\partial \varphi}{\partial t_j}\right|_{\bar{t}_0} = \left.\frac{\partial f}{\partial x_1}\right|_{\bar{x}_0} \cdot \left.\frac{\partial x_1}{\partial t_j}\right|_{\bar{t}_0} + ... + \left.\frac{\partial f}{\partial x_i}\right|_{\bar{x}_0} \cdot \left.\frac{\partial x_i}{\partial t_j}\right|_{\bar{t}_0} + \ldots + \left.\frac{\partial f}{\partial x_m}\right|_{\bar{x}_0} \cdot \left.\frac{\partial x_m}{\partial t_j}\right|_{\bar{t}_0} = $$
$$= \sum_{i=1}^{n} \left.\frac{\partial f}{\partial x_i}\right|_{\bar{x}_0} \cdot \left.\frac{\partial x_i}{\partial t_j}\right|_{\bar{t}_0} \quad \forall\, j = \overline{1, m} \tag{3}$$

Частковий випадок: функція $f(\bar{x}) = f(x_1, x_2, ..., x_n)$ диференційована в точці $\bar{x}_0 = (x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, ..., x_n^{(0)})$, функції однієї змінної $x_j = g_j(t)$ диференційовані в точці t_0, тоді складена функція однієї змінної $\varphi(t) = f(g(t))$ диференційована в точці t_0, до того ж її похідна обчислюється за формулою

$$\frac{d\varphi}{dt} = \sum_{i=1}^{n} \left.\frac{\partial f}{\partial x_i}\right|_{\bar{x}_0} \cdot \left.\frac{\partial x_i}{\partial t_j}\right|_{\bar{t}_0} \quad . \tag{4}$$

Доведення. Оскільки функція $f(\bar{x}) = f(x_1, x_2, ..., x_n)$ диференційовна в точці $\bar{x}_0 = (x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, ..., x_n^{(0)}) \in E$, то

$$\Delta f(\bar{x}_0)=\left.\frac{\partial f}{\partial x_1}\right|_{\bar{x}_0}\Delta x_1+\ldots+\left.\frac{\partial f}{\partial x_i}\right|_{\bar{x}_0}\Delta x_i+\ldots+\left.\frac{\partial f}{\partial x_m}\right|_{\bar{x}_0}\Delta x_n+\alpha_1\Delta x_1+\ldots+\alpha_i\Delta x_i+\ldots+\alpha_n\Delta x_n,$$

де $\alpha_i=\alpha_i(\Delta x_1,\ldots,\Delta x_i,\ldots,\Delta x_n)$: $\lim\limits_{\substack{\Delta x_1\to 0\\ \ldots\\ \Delta x_n\to 0}}\alpha_i=0$.

Поділимо обидві частини цієї рівності на Δt_j:

$$\frac{\Delta f(\bar{x}_0)}{\Delta t_j}=\left.\frac{\partial f}{\partial x_1}\right|_{\bar{x}_0}\frac{\Delta x_1}{\Delta t_j}+\ldots+\left.\frac{\partial f}{\partial x_i}\right|_{\bar{x}_0}\frac{\Delta x_i}{\Delta t_j}+\ldots+\left.\frac{\partial f}{\partial x_m}\right|_{\bar{x}_0}\frac{\Delta x_n}{\Delta t_j}+\alpha_1\frac{\Delta x_1}{\Delta t_j}+\ldots+\alpha_i\frac{\Delta x_i}{\Delta t_j}+\ldots+\alpha_n\frac{\Delta x_n}{\Delta t_j}.\quad (*)$$

В силу того, що

1) $\Delta f(\bar{x}_0)=\Delta f(g(\bar{t}_0))=\Delta\varphi(\bar{t}_0)\quad\Rightarrow\quad\dfrac{\Delta f(\bar{x}_0)}{\Delta t_j}=\dfrac{\Delta\varphi(\bar{t}_0)}{\Delta t_j}$

2) $\dfrac{\Delta\varphi(\bar{t}_0)}{\Delta t_j}\xrightarrow[\Delta t_j\to 0]{}\dfrac{\partial\varphi}{\partial t_j}(\bar{t}_0)$,

3) $\left.\begin{array}{l}\Delta t_j\to 0\qquad\forall\ j=\overline{1,n}\\ g_i\ \textit{диференційована в т.}\ t_0\Rightarrow\textit{неперервна}\end{array}\right\}\Rightarrow\Delta x_i=\Delta g_i(t_0)\to 0\,\forall i\Rightarrow\lim\limits_{\substack{\Delta x_1\to 0\\ \ldots\\ \Delta x_n\to 0}}\alpha_i=0,$

після здійснення граничного переходу в (*) отримаємо:

$$\lim_{\Delta t_j\to 0}\frac{\Delta\varphi(\bar{t}_0)}{\Delta t_j}=\left.\frac{\partial f}{\partial x_1}\right|_{\bar{x}_0}\lim_{\Delta t_j\to 0}\frac{\Delta x_1}{\Delta t_j}+\ldots+\left.\frac{\partial f}{\partial x_i}\right|_{\bar{x}_0}\lim_{\Delta t_j\to 0}\frac{\Delta x_i}{\Delta t_j}+\ldots+\left.\frac{\partial f}{\partial x_m}\right|_{\bar{x}_0}\lim_{\Delta t_j\to 0}\frac{\Delta x_n}{\Delta t_j}+$$

$$+\lim_{\substack{\Delta x_1\to 0\\ \ldots\\ \Delta x_n\to 0}}\alpha_1\lim_{\Delta t_j\to 0}\frac{\Delta x_1}{\Delta t_j}+\ldots+\lim_{\substack{\Delta x_1\to 0\\ \ldots\\ \Delta x_n\to 0}}\alpha_i\lim_{\Delta t_j\to 0}\frac{\Delta x_i}{\Delta t_j}+\ldots+\lim_{\substack{\Delta x_1\to 0\\ \ldots\\ \Delta x_n\to 0}}\alpha_n\lim_{\Delta t_j\to 0}\frac{\Delta x_n}{\Delta t_j}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\left.\frac{\partial\varphi}{\partial t_j}\right|_{\bar{t}_0}=\left.\frac{\partial f}{\partial x_1}\right|_{\bar{x}_0}\cdot\left.\frac{\partial x_1}{\partial t_j}\right|_{\bar{t}_0}+\ldots+\left.\frac{\partial f}{\partial x_i}\right|_{\bar{x}_0}\cdot\left.\frac{\partial x_i}{\partial t_j}\right|_{\bar{t}_0}+\ldots+\left.\frac{\partial f}{\partial x_m}\right|_{\bar{x}_0}\cdot\left.\frac{\partial x_m}{\partial t_j}\right|_{\bar{t}_0}.\ \blacksquare$$

16.6.3. Інваріантність форми першого диференціалу.

Форма першого диференціалу функції багатьох змінних інваріантна, оскільки не змінює своєї форми у випадку, коли змінні $x_i (i=1,...,n)$ не є незалежними. Покажемо це.

Розглянемо випадок функції $f(x,y)$ двох змінних. Якщо x і y - незалежні змінні, то формула для обчислення диференціалу має вигляд

$$df=\frac{\partial f}{\partial x}dx+\frac{\partial f}{\partial y}dy\ .$$

Нехай тепер x і y - залежні змінні, тобто

$$x = x(u,v),$$
$$y = y(u,v).$$

Тоді, застосувавши формулу обчислення часткових похідних від складеної функції, отримаємо:

$$df(u_0,v_0) = \left.\frac{\partial f}{\partial u}\right|_{(u_0,v_0)} du + \left.\frac{\partial f}{\partial v}\right|_{(u_0,v_0)} dv =$$

$$= \left(\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{(x_0,y_0)} \cdot \left.\frac{\partial x}{\partial u}\right|_{(u_0,v_0)} + \left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{(x_0,y_0)} \cdot \left.\frac{\partial y}{\partial u}\right|_{(u_0,v_0)} \right) du + \left(\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{(x_0,y_0)} \cdot \left.\frac{\partial x}{\partial v}\right|_{(u_0,v_0)} + \left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{(x_0,y_0)} \cdot \left.\frac{\partial y}{\partial v}\right|_{(u_0,v_0)} \right) dv =$$

$$= \left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{(x_0,y_0)} \left(\left.\frac{\partial x}{\partial y}\right|_{(u_0,v_0)} \cdot du + \left.\frac{\partial x}{\partial v}\right|_{(u_0,v_0)} \right) + \left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{(x_0,y_0)} \left(\left.\frac{\partial y}{\partial v}\right|_{(u_0,v_0)} du + \left.\frac{\partial y}{\partial v}\right|_{(u_0,v_0)} dv \right) =$$

$$= \left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{(x_0,y_0)} dx + \left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{(x_0,y_0)} dy, \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow df(u_0,v_0) = df(x_0,y_0) = \left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{(x_0,y_0)} dx + \left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{(x_0,y_0)} dy.$$

Отже, інваріантність форми першого диференціалу має місце.

Властивості диференціалу першого порядку:

1) $d(f \pm g) = df \pm dg$,
2) $d(f \cdot g) = fdg + gdf$,
3) $d\left(\dfrac{f}{g}\right) = \dfrac{gdf - fdg}{g^2}$.

Доведення. Оскільки має місце інваріантність форми першого диференціалу, то при будь-якому припущенні на залежність чи незалежність змінних x і y здійснюються формули

$$f(x,y) \qquad - \qquad df = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy,$$

$$g(x,y) \qquad - \qquad dg = \frac{\partial g}{\partial x}dx + \frac{\partial g}{\partial y}dy.$$

Тоді

$$d(f \cdot g) = \frac{\partial (f \cdot g)}{\partial x}dx + \frac{\partial (f \cdot g)}{\partial y}dy =$$

$$= \left(\frac{\partial f}{\partial x} \cdot g + \frac{\partial g}{\partial x} \cdot f \right) dx + \left(\frac{\partial f}{\partial y} \cdot g + \frac{\partial g}{\partial y} \cdot f \right) dy =$$

$$= g \cdot \left(\frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy \right) + f \cdot \left(\frac{\partial y}{\partial x}dx + \frac{\partial g}{\partial y}dy \right) == g \cdot df + f \cdot dg$$

Інші формули виводяться аналогічно. ■

16 ФУНКЦІЇ БАГАТЬОХ ЗМІННИХ

Приклад. Знайти часткові похідні і диференціал першого порядку для функцій

а) $z = f(u,v), \quad u = x + y, \quad v = x^2 + y^2$;

б) $z = f(u,v), \quad u = \dfrac{x}{y}, \quad v = \dfrac{y}{z}$;

в) $z = arctg(x + y^2), \quad x = 4t^2, \quad y = \sin t$.

Розв'язання. а) Для пошуку часткових похідних використаємо формулу (2.3), переписавши її у вигляді

$$\frac{\partial f}{\partial x} = f'_x = f'_u u'_x + f'_v v'_x, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = f'_y = f'_u u'_y + f'_v v'_y.$$

Отримаємо: $f'_x = f'_u \cdot 1 + f'_v \cdot 2x = f'_u + 2x f'_v$; $f'_y = f'_u + 2y f'_v$, тоді $df = \left(f'_u + 2x f'_v\right)dx + \left(f'_u + 2y f'_v\right)dy = f'_u(dx + dy) + f'_v(2xdx + 2ydy)$.

б) В цьому випадку розв'язуємо аналогічно попередньому

$$f'_x = f'_u \frac{1}{y}; \quad f'_y = f'_u \frac{-x}{y^2} + f'_v \frac{1}{z}; \quad f'_z = f'_v \frac{-y}{z^2};$$

$$df = f'_u \frac{1}{y} dx + \left(f'_u \frac{-x}{y^2} + f'_v \frac{1}{z} \right) dy + f'_v \frac{-y}{z^2} dz =$$

$$= f'_u \left(\frac{1}{y} dx - \frac{x}{y^2} dy \right) + f'_v \left(\frac{1}{z} dy - \frac{y}{z^2} dz \right).$$

в) *1 спосіб*. Використовуємо формулу (2.4):

$$\frac{dz}{dt} = z'_t = z'_x x'_t + z'_y y'_t =$$

$$= \left.\frac{1}{1 + (x + y^2)^2}\right|_{x=4t^2, \quad y=\sin t} 8t + \left.\frac{2y}{1 + (x + y^2)^2}\right|_{x=4t^2, \quad y=\sin t} (-\cos t) =$$

$$= \frac{8t}{1 + (4t^2 + \sin^2 t)^2} - \frac{2\sin t \cos t}{1 + (4t^2 + \sin^2 t)^2}.$$

Складена функція залежить від однієї змінної, тому її диференціал дорівнює

$$dz = \frac{dz}{dt} dt = \underline{\frac{1}{1 + (4t^2 + \sin^2 t)^2} (8t - \sin 2t) dt}.$$

2 спосіб. Підставимо замість x і y їх вирази через незалежну змінну t, після чого і знайдемо від отриманої функції похідну:

$$z_t' = \left(arctg(4t^2 + \sin^2 t)\right)_t' = \underline{\frac{1}{1+(4t^2+\sin^2 t)^2}(8t - 2\sin t \cos t)}.$$

Диференціал буде мати той же вигляд, як отримано у 1 способі.

16.6.4. Часткові похідні вищих порядків.

🗁**Означення.** *Часткові похідні вищих порядків* визначаються індуктивно. Якщо, наприклад, $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)$ існує в деякому околі точки (x_0, y_0), то частковою похідною другого порядку $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0, y_0)$ називається

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0, y_0) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)(x_0, y_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\frac{\partial f}{\partial y}(x_0 + \Delta x, y_0) - \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)}{\Delta x}.$$

Аналогічно визначаються часткові похідні другого порядку по іншій комбінації змінних у припущенні про існування відповідних часткових похідних першого порядку в деякому околі точки (x_0, y_0):

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \overset{def}{=} \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right); \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \overset{def}{=} \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right); \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} \overset{def}{=} \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right).$$

Якщо, припустимо, що існує $\frac{\partial^{n-1} f}{\partial x_{i_{n-1}} \ldots \partial x_{i_1}}(\overline{x})$ в деякому околі точки $\overline{x}_0$, то часткова похідна n-ого порядку визначається таким чином:

$$\frac{\partial^n f}{\partial x_{i_n} \partial x_{i_{n-1}} \ldots \partial x_{i_1}} \overset{def}{=} \frac{\partial}{\partial x_{i_n}}\left(\frac{\partial^{n-1} f}{\partial x_{i_{n-1}} \ldots \partial x_{i_1}}\right).$$

Якщо не усі індекси співпадають, то таку похідну називають *мішаною*.

Приклад. Знайти часткові похідні $\left.\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\right|_{(0,0)}$ *і* $\left.\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\right|_{(0,0)}$ функції

$$f(x,y) = \begin{cases} xy \cdot \dfrac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}, & x^2 + y^2 \neq 0 \\ 0, & x^2 + y^2 = 0 \end{cases}.$$

Розв'язання. Оскільки

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(0, 0+\Delta y) - f(0,0)}{\Delta y} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{0-0}{\Delta y} = 0,$$

$$x^2+y^2\neq 0 \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial y}=x\cdot\left(\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}+y\cdot\frac{-2y(x^2+y^2)-2y(x^2-y^2)}{\left(x^2+y^2\right)^2}\right)\Rightarrow \frac{\partial f}{\partial y}(\Delta x,0)=\Delta x\ ,$$

тому

$$\left.\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}\right|_{(0,0)}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\frac{\partial f}{\partial y}(0+\Delta x,0)-\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta x-0}{\Delta x}=1\ .$$

Аналогічно

$$\frac{\partial f}{\partial x}\left(0,0\right)=0\ ,$$

$$x^2+y^2\neq 0 \Rightarrow \frac{\partial f}{dx}=y\cdot\left(\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}+x\cdot\frac{2x(x^2+y^2)-2x(x^2-y^2)}{\left(x^2+y^2\right)^2}\right)\Rightarrow \frac{\partial f}{dx}(0,\Delta y)=-\Delta y\ ,$$

тому

$$\left.\frac{\partial^2 f}{\partial y\,\partial x}\right|_{(0,0)}=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{\frac{\partial f}{\partial x}(0,\Delta y)-\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)}{\Delta y}=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{-\Delta y-0}{\Delta y}=-1\ .$$

Для розглянутої функції

$$\left.\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}\right|_{(0,0)}\neq\left.\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}\right|_{(0,0)}\ .$$

Які треба накласти умови на функцію $f(\bar{x})$, щоб однойменні мішані похідні співпадали?

Теорема (*теорема Шварца*). Якщо однойменні мішані похідні функції $f(\bar{x})$ існують в деякому δ-околі $V_\delta(\bar{x}_0)$ точки $\bar{x}_0$ і неперервні в цій точці, то вони в цій точці співпадають.

Доведення. Розглянемо випадок функції двох змінних. Тоді потрібно *довести:*

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}(x_0,y_0)=\frac{\partial^2 f}{\partial y\,\partial x}(x_0,y_0)\ .$$

Позначення: $h=\Delta x,\quad k=\Delta y$,

$$A=f(x_0+h,y_0+k)-f\left(x_0+h,y_0\right)+f\left(x_0,y_0+k\right)-f(x_0,y_0)\ ,$$

$$\varphi(t)=f(x_0+h,t)-f(x_0,t)\ ,$$

$$\psi(t)=f(t,y_0+k)-f(t,y_0)\ .$$

Тоді

$$A=\underbrace{f(x_0+h,y_0+k)-f\left(x_0,y_0+k\right)}_{\varphi(y_0+k)}\underbrace{-f\left(x_0+h,y_0\right)+f(x_0,y_0)}_{-\varphi(y_0)}=\varphi(y_0+k)-\varphi(y_0)\,,$$

$$A=\underbrace{f\left(x_0+h,y_0+k\right)-f\left(x_0+h,y_0\right)}_{\psi(x_0+h)}\underbrace{-f\left(x_0,y_0+k\right)+f(x_0,y_0)}_{-\psi(x_0)}=\psi\left(x_0+h\right)-\psi(x_0)\,.$$

Оскільки похідні $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}(x,y)\;i\;\dfrac{\partial^2 f}{\partial y\,\partial x}(x,y)$ існують в деякому δ - околі $V_\delta(x_0,y_0)$ точки (x_0,y_0), то в цьому околі неперервні похідні $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)\;i\;\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)$. Тоді із означення функцій $\varphi(t)\;i\;\psi(t)$ випливає, що функції $\varphi(t)\;i\;\psi(t)$ диференційовані, а тому неперервні на $\left[x_0,x_0+h\right]\left(\left[x_0+h,x_0\right]\right)$ і $\left[y_0,y_0+k\right]\left(\left[y_0+k,y_0\right]\right)$ відповідно, тому до них можна застосувати формулу Лагранжа скінченних приростів:

$$\exists\theta_1\in(0,1):\quad A=\varphi(y_0+k)-\varphi\left(y_0\right)=\varphi_y^{'}(y_0+\theta_1 k)k=$$
$$=k\cdot\left(\frac{\partial f}{\partial y}\left(x_0+h,y_0+\theta_1 k\right)-k\frac{\partial f}{\partial y}\left(x_0,y_0+\theta_1 k\right)\right)=k\cdot\Delta_x\frac{\partial f}{\partial y}\left(x_0,y_0+\theta_1 k\right),$$

$$\exists\theta_2\in(0,1):\quad A=\psi(x_0+k)-\psi\left(x_0\right)=\psi_x^{'}(x_0+\theta_2 h)h=$$
$$=h\cdot\left(\frac{\partial f}{\partial x}\left(x_0+\theta_2 h,y_0+k\right)-\frac{\partial f}{\partial x}\left(x_0+\theta_2 h,y_0\right)\right)=h\cdot\Delta_y\frac{\partial f}{\partial x}\left(x_0+\theta_2 h,y_0\right).$$

Функції $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)\;i\;\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)$ неперервні в $V_\delta(x_0,y_0)$, а функції $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}(x,y)\;i\;\dfrac{\partial^2 f}{\partial y\,\partial x}(x,y)$ існують в $V_\delta(x_0,y_0)$, тому за формулою Лагранжа скінченних приростів

$$\exists\theta_3\in(0,1):\quad A=k\cdot\Delta_x\frac{\partial f}{\partial y}\left(x_0,y_0+\theta_1 k\right)=\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}(x_0+\theta_3 h,y_0+\theta_1 k)\cdot\underbrace{h}_{x_0+h-x_0}\cdot k\,,$$

$$\exists\theta_4\in(0,1):\quad A=h\cdot\Delta_y\frac{\partial f}{\partial x}\left(x_0+\theta_2 h,y_0\right)=\frac{\partial^2 f}{\partial y\,\partial x}(x_0+\theta_2 h,y_0+\theta_4 k)\cdot\underbrace{k}_{y_0+k-y_0}\cdot h.$$

Тепер застосуємо неперервність $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}(x,y)\;i\;\dfrac{\partial^2 f}{\partial y\,\partial x}(x,y)$ в точці (x_0,y_0), отримаємо:

$$\lim_{\substack{h\to 0\\ k\to 0}} \frac{A}{hk} = \lim_{\substack{h\to 0\\ k\to 0}} \frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}(x_0+\theta_3 h, y_0+\theta_1 k) = \frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}(x_0, y_0),$$

$$\lim_{\substack{h\to 0\\ k\to 0}} \frac{A}{hk} = \lim_{\substack{h\to 0\\ k\to 0}} \frac{\partial^2 f}{\partial y\,\partial x}(x_0+\theta_2 h, y_0+\theta_4 k) = \frac{\partial^2 f}{\partial y\,\partial x}(x_0, y_0).$$

Звідси випливає те, що потрібно було довести. ■

Приклад. Довести, що функція $u = \frac{1}{r}$, де $r = \sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2}$, задовольняє при $r \neq 0$ рівнянню Лапласа $\Delta u \equiv \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0$.

Розв'язання. Використаємо формулу для часткової похідної складеної функції.

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial x} = \left.\frac{-1}{r^2}\right|_{r=\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2}} \frac{2(x-a)}{2\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2}} =$$

$$= \left.\frac{-(x-a)}{r^3}\right|_{r=\sqrt{\dots}}.$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \left[-(x-a)'_x\, r^{-3} - (x-a)(r^{-3})'_x\right]_{r=\sqrt{\dots}} =$$

$$= \left.\left[-r^{-3} - (x-a)(-3)r^{-4}\frac{2(x-a)}{2r}\right]\right|_{r=\sqrt{\dots}} = \left[-r^{-3} + 3(x-a)^2 r^{-5}\right]_{r=\sqrt{\dots}}.$$

Аналогічний вигляд будуть мати другі похідні за іншими змінними, тому

$$\Delta u = \left[-3r^{-3} + 3\left((x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2\right)r^{-5}\right]_{r=\sqrt{\dots}} = \left[-3r^{-3} + 3r^2 r^{-5}\right]_{r=\sqrt{\dots}} = 0$$

Що і треба було довести.

16.6.5. Диференціали вищих порядків.

🗀**Означення.** Функцію $f(\bar{x})$ будемо називати *n раз диференційованою в точці* $\bar{x}_0$, якщо усі її часткові похідні $(n-1)$-го порядку диференційовані в цій точці.

Теорема (достатні умови диференційовності функції n разів в т. $\bar{x}_0$). Якщо

1) функція $f(\bar{x})$ має часткові похідні до n-го порядку включно в δ-околі $V_\delta(\bar{x}_0)$ точки $\bar{x}_0$;
2) ці часткові похідні n-ого порядку неперервні в т. $\bar{x}_0$,

тоді функція $f(\bar{x})$ n разів диференційована в т. $\bar{x}_0$

Для доведення цього факту потрібно застосувати n разів теорему про достатні умови диференційовності функції в точці.

Зазначені в теоремі умови гарантують співпвдання усіх мішаних однойменних похідних в точці.

🗀**Означення.** Якщо функція $f(\bar{x})$ n раз диференційована в точці $\bar{x}_0$, а змінні $x_i (i = 1,...,m)$ або незалежні або n раз диференційовані в цій точці, то n*-й диференціал* визначається формулою

$$d^n f\Big|_{\bar{x}_0} \overset{def}{=} d(d^{n-1} f)\Big|_{\bar{x}_0} .$$

Нехай x, y - незалежні змінні, тоді $dx, dy = const$, і будемо мати

$$d^2 f = d(df) = d\left(\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)dx + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)dy\right) = d\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)dx + d\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)dy =$$
$$= \left(\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)dx + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)dy\right)dy = \frac{d^2 f}{\partial x^2}(dx)^2 + 2\frac{\partial^2}{\partial x \partial y}dx\,dy + \frac{d^2 f}{\partial y^2}(dy)^2 =$$
$$= \left(\frac{\partial \circ}{\partial x}dx + \frac{\partial \circ}{\partial y}dy\right)^2 f.$$

Останній вираз є формальним, а обчислюється він формальним піднесенням до квадрату і застосуванням до функції f. Узагальнимо:

$$d^n f = \left(\frac{\partial \circ}{\partial x}dx + \frac{\partial \circ}{\partial y}\right)^n f = \sum_{k=0}^{n} C_n^k \frac{\partial^n f}{\partial x^k \partial y^{n-k}}(dx)^k (dy)^{n-k} .$$

Остання формули доводиться індуктивно, як у випадку індуктивного виведення бінома Ньютона.

Узагальнимо отримане на випадок функцій багатьох (більше, як двох) змінних. Якщо аргументи функції незалежні, то використовують формальний символ для обчислення n-го диференціалу

$$d^n f = = \left(\frac{\partial \circ}{\partial x_1}dx_1 + \frac{\partial \circ}{\partial x_2}dx_2 + ... + \frac{\partial \circ}{\partial x_m}dx_m\right)^n f . \qquad (5)$$

Приклад. Знайти часткові похідні і диференціали першого і другого порядку від функцій $f(x, y) = e^{erctg\, xy}$, $g(x, y) = x^y$.

Розв'язання. В прикладі 2.1 були знайдені часткові похідні першого порядку для цих функцій, тому їх перші диференціали дорівнюють:

$$df = f'_x dx + f'_y dy = e^{erctg\, xy}\frac{y}{1 + (xy)^2}dx + e^{erctg\, xy}\frac{x}{1 + (xy)^2}dx =$$

$$= \frac{e^{erctg\, xy}}{1+(xy)^2}(ydx + xdy)\ ; \qquad dg = yx^{y-1}dx + \ x^y \ln x dx\ .$$

Знайдемо другі часткові похідні і другий диференціал:

$$f''_{xx} = \left(e^{erctg\, xy} \frac{y}{1+(xy)^2} \right)'_x = \frac{y}{1+(xy)^2}\left(e^{erctg\, xy}\right)'_x + e^{erctg\, xy}\left(\frac{y}{1+(xy)^2} \right)'_x =$$

$$= \frac{y}{1+(xy)^2} e^{erctg\, xy} \frac{y}{1+(xy)^2} + e^{erctg\, xy}\, y \frac{-2xy^2}{\left(1+(xy)^2\right)^2} = \frac{e^{erctg\, xy}\, y^2}{1+(xy)^2}\left(1-2xy\right);$$

$$f''_{yy} = \left(e^{erctg\, xy} \frac{x}{1+(xy)^2} \right)'_y = \frac{e^{erctg\, xy}\, x^2}{\left(1+(xy)^2\right)^2}\left(1-2xy\right);$$

$$f''_{xy} = f''_{yx} = \left(e^{erctg\, xy} \frac{x}{1+(xy)^2} \right)'_x =$$

$$= \frac{x}{1+(xy)^2} e^{erctg\, xy} \frac{y}{1+(xy)^2} + e^{erctg\, xy} \frac{\left(1+(xy)^2\right) - xy^2 2x}{\left(1+(xy)^2\right)^2} = e^{erctg\, xy} \frac{1+xy-(xy)^2}{\left(1+(xy)^2\right)^2}\ .$$

Згідно до формули (2.5) $d^2 f = f''_{xx}dx^2 + 2f''_{xy}dxdy + f''_{yy}dy^2$, тому

$$d^2 f = \frac{e^{erctg\, xy}}{1+(xy)^2}\left(y^2\left(1-2xy\right)dx^2 \ + 2\left(1+xy-(xy)^2\right)dxdy + \ x^2\left(1-2xy\right)dy^2 \right).$$

Для другої функції:

$g''_{xx} = \left(yx^{y-1}\right)'_x = y(y-1)x^{y-2}$, $g''_{xy} = \left(yx^{y-1}\right)'_y = x^{y-1} + yx^{y-1}\ln x$,

$g''_{xy} = \left(x^y \ln x\right)'_y = x^y(\ln x)^2$,

$d^2 g = \ y(y-1)x^y dx^2 + \ 2(x^{y-1} + yx^{y-1}\ln x)dxdy \ + x^y(\ln x)^2 dy^2$.

16.6.6. Неінваріантність формули вищих диференціалів (з випадками інваріантності).

Форма вищих диференціалів функції багатьох змінних в загальному випадку неінваріантна, оскільки змінює свою форму у випадку, коли змінні $x_i (i = 1,...,m)$ не є незалежними. А саме:, наприклад для функції двох змінних $f(x,y)$ розглянемо другий диференціал:

$$d^2 f = d\left(\frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy \right) = d\left(\frac{\partial f}{\partial x} \right)dx + \frac{\partial f}{\partial x}d(dx) + d\left(\frac{\partial f}{\partial y} \right)dy + \frac{\partial f}{\partial y}(dy) =$$

$$= \left(\frac{\partial}{\partial x}dx + \frac{\partial}{\partial y}dy \right)^2 f + \frac{\partial f}{\partial x}d^2 x + \frac{\partial f}{\partial y}d^2 y.$$

Якщо x і y - лінійні функції від інших змінних $\begin{matrix} x = \alpha_1 t_1 + \alpha_2 t_2 + \alpha_3 \\ y = \beta_1 t_1 + \beta_2 t_2 + \beta_3 \end{matrix}$, то другий диференціал є інваріантним, тому що

$$d^2 x = \underbrace{\frac{\partial^2 x}{\partial t_1^2}}_{=0}(dt_1)^2 + \underbrace{\frac{\partial^2 x}{\partial t_1^2}}_{=0}(dt_2)^2 + 2\underbrace{\frac{\partial^2 x}{\partial t_1 \partial t_2}}_{=0} \cdot dt_1 \cdot dt_2 = 0,$$

$$d^2 y = \underbrace{\frac{\partial^2 y}{\partial t_1^2}}_{=0}(dt_1)^2 + \underbrace{\frac{\partial^2 y}{\partial t_1^2}}_{=0}(dt_2)^2 + 2\underbrace{\frac{\partial^2 y}{\partial t_1 \partial t_2}}_{=0} \cdot dt_1 \cdot dt_2 = 0,$$

тому $d^2 f = \left(\frac{\partial}{\partial x} dx + \frac{\partial}{\partial y} dy \right)^2 f + 0.$

16.7 Застосування диференціального числення функцій багатьох змінних

16.7.1. Геометричний зміст диференційованості.

🗀**Означення.** Площина Π, що проходить через точку $M_0(x_0, y_0, z_0)$ поверхні називається *дотичною площиною* в цій точці, якщо кут між цією площиною і січною, що проходить через точку $M_0(x_0, y_0, z_0)$ і будь-яку точку $M(x, y, z)$ поверхні, прагне до нуля, коли M прагне до M_0 (див. рис. 3.1).

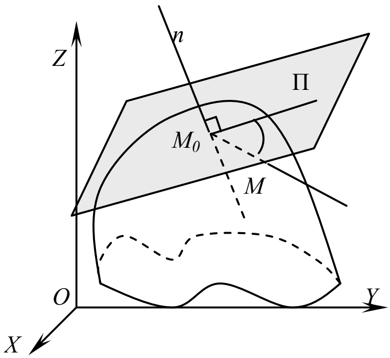


Рис. 16.6.

Теорема. Функція $z = f(x, y)$ диференційована в точці (x_0, y_0) тоді і лише тоді, коли графік поверхні, який визначається цією функцією, має в точці $M_0(x_0, y_0, z_0)$ ($z_0 = f(x_0, y_0)$) дотичну площину. Рівняння цієї площини Π визначається формулою

$$z - z_0 = \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x}(x - x_0) + \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y}(y - y_0), \tag{1}$$

а *рівняння нормалі* n до неї в точці M_0 – формулою

$$\frac{x - x_0}{f'_x(x_0, y_0)} = \frac{y - y_0}{f'_y(x_0, y_0)} = \frac{z - z_0}{-1}. \tag{2}$$

Доведення. Необхідність.Нехай $f(x,y)$ - диференційована в т. (x_0,y_0) $\Rightarrow \Delta f(x_0,y_0)= f(x,y)-f(x_0,y_0)=\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)\Delta x+\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)\Delta y+0(\rho)$,

де $\rho=\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}=\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}$. Враховуючи, що $z=f(x,y)$, отримаємо

$$z-z_0=\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)(x-x_0)+\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)(y-y_0)+0(\rho).$$

Розглянемо площину $z-z_0=A(x-x_0)+B(y-y_0),$ з вектором нормалі $\overline{n}(A,B,-1)$.

Довести: $\angle(\overline{n},\overline{M_0M})\to 90^0$, коли M прагне до M_0, або $\cos\angle(\overline{n},\overline{M_0M})\to 0$.

Нехай $M_1(x_1,y_1,z_1)$, $z_1=f(x_1,y_1)$, тоді $\overline{M_0M_1}=\{x_1-x_0,y_1-y_0,z_1-z_0\}$. Якщо

$$M_1\to M_0\Rightarrow \rho^*=\left|\overline{M_1M_0}\right|=\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2}\to 0\Rightarrow \left.\begin{array}{l}x_1\to x_0\\ y_1\to y_0\end{array}\right\},$$

то завдяки неперервності функції в т. (x_0,y_0) (функція в ній диференційовна) $f(x_1,y_1)\to f(x_0,y_0)\Rightarrow z_1\to z_0$. Отже

$$0\le \lim_{\substack{x_1\to x_0\\ y_1\to y_0}}\frac{\left|A(x_1-x_0)+B(y_1-y_0)-(z_1-z_0)\right|}{\sqrt{A^2+B^2+1}\cdot\sqrt{(x_1-x_0)^2+(y_1-y_0)^2+(z_1-z_0)^2}}\le \lim_{\substack{x_1\to x_0\\ y_1\to y_0}}\frac{|o(\rho)|}{1\cdot\rho}=0\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \cos\left(\overline{n},\overline{M_0M_1}\right)\to 0 \text{ якщо } M_1\to M_0$$

Доведення достатності *вивчити самостійно* ✍! ■

Приклад. Написати рівняння дотичної площини і нормалі до поверхні $z=arctg\frac{x}{y}$ в точці $M_0\left(1{,}1,\frac{\pi}{4}\right)$

Розв'язання. Знайдемо спочатку часткові похідні цієї функції в даній точці:

$$z'_x\big|_{M_0}=\frac{1}{1+(x/y)^2}\frac{1}{y}\bigg|_{M_0}=\frac{1}{2};\quad z'_x\big|_{M_0}=\frac{1}{1+(x/y)^2}\frac{-x}{y^2}\bigg|_{M_0}=-\frac{1}{2}.$$

Рівняння дотичної площини і нормалі відповідно будуть мати вигляд згідно до формул (3.1) і (3.2)

$$z-\frac{\pi}{4}=\frac{1}{2}(x-1)-\frac{1}{2}(y-1)\ \Rightarrow\ \underline{x-y-2z+\frac{\pi}{2}=0};$$

$$\frac{x-1}{1/2}=\frac{y-1}{1/2}=\frac{z-\pi/4}{-1}\ \Rightarrow\ \underline{x-1=y-1=\frac{z-\pi/4}{-2}}.$$

16.7.2. Похідна за напрямком. Градієнт. Часткові похідні функції $u=f(x,y,z)$ за x, за y, за z виражають „швидкість зміни функції” в напрямку координатних осей. Наприклад, коли точка рухається лише у напрямку осі абсцис, то f'_x виражає швидкість руху цієї точки в напрямку цієї осі. Але в багатьох фізичних явищах необхідно знати швидкість зміни функції (наприклад, температур) у напрямку прямої l. У відповіді на це питання нам допоможе **похідна за напрямком**.

Нехай функція $u=f(x,y,z)$ визначена у деякій відкритій області, точка $M_0(x_0,y_0,z_0)$ належить цій області, а пряма l, що проходить через цю точку задає деякий напрямок. Нехай $M(x,y,z)\in l$, тоді M_0M – довжина відрізка, що сполучає точки $M_0\ i\ M$, і яка береться із знаком „+”, якщо напрямок M_0M співпадає із напрямком прямої l і „–” – в протилежному випадку. Границя $\lim\limits_{M\to M_0}\dfrac{f(M_0)-f(M)}{M_0M}$ називається *похідною від функції f за напрямком l* і позначається $\dfrac{\partial f(M_0)}{\partial l}=\dfrac{\partial f(x_0,y_0,z_0)}{\partial l}$.

Формула для обчислення похідної за напрямком від диференційовної функції $u=f(x,y,z)$:

$$\frac{\partial f(M_0)}{\partial l}=\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{M_0}\cos\alpha+\left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{M_0}\cos\beta+\left.\frac{\partial f}{\partial z}\right|_{M_0}\cos\gamma, \tag{3}$$

де $\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma$ – напрямні косинуси напрямку l.

Доведення. Нехай $M_0(x_0,y_0,z_0)$, $M(x,y,z)\in l$. Оскільки функція диференційована в точці M_0, то її приріст можна представити формулою

$$u-u_0=\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0,z_0)(x-x_0)+\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0,z_0)(y-y_0)+\frac{\partial f}{\partial z}(x_0,y_0,z_0)(z-z_0)+o(\rho),$$

де $\rho=\left|MM_0\right|$. Тоді

$$\underbrace{\frac{u-u_0}{\left|MM_0\right|}}_{\to\frac{\partial f}{\partial l}(M_0)}=\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0,z_0)\underbrace{\frac{x-x_0}{\left|MM_0\right|}}_{=\cos\alpha}+\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0,z_0)\underbrace{\frac{y-y_0}{\left|MM_0\right|}}_{=\cos\beta}+\frac{\partial f}{\partial z}(x_0,y_0,z_0)\underbrace{\frac{z-z_0}{\left|MM_0\right|}}_{=\cos\gamma}+\underbrace{\frac{o(\rho)}{\rho}}_{\to 0}.\blacksquare$$

Вектор

$$\overline{grad}\ f(M_0)=\left(\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{M_0},\left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{M_0},\left.\frac{\partial f}{\partial z}\right|_{M_0}\right) \qquad (4)$$

називається *градієнтом* функції f в точці M_0. Він вказує напрямок найшвидшого росту функції в цій точці.

Згідно до формул (3.3) і (3.4) перепишемо формулу похідної за напрямком через скалярний добуток градієнта функції f в точці M_0 на одиничний вектор $\bar{e}=(\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma)$ напрямку l:

$$\frac{\partial f(M_0)}{\partial l}=\overline{grad}\ f(M_0)\cdot\bar{e}. \qquad (5)$$

Питання: за яким напрямком функція збільшується найшвидше?

$$\frac{\partial f}{\partial l}(M_0)=\left|\overline{grad\ f(M_0)}\right|\cdot\left|\bar{e}\right|\cdot\cos(\overline{grad\ f(M_0)},l)\to\max,$$

якщо $\cos\alpha=1\Rightarrow\overline{grad\ f(M_0)}\uparrow\uparrow l$. Тобто градієнт функції задає напрямок найшвидшого зростання функції.

Приклад. Знайти кут між градієнтами функції $u=x^2+y^2-z^2$ в точках $A(\varepsilon,0,0)$ і $B(0,\varepsilon,0)$.

Розв'язання. Для використання (3.4) знайдемо часткові похідні: $u'_x=2x$; $u'_y=2y$; $u'_z=-2z$, тоді

$$\overline{grad}\ f(A)=(2\varepsilon,0,0);\quad \overline{grad}\ f(B)=(0,2\varepsilon,0).$$

Ці вектори розташовані паралельно осям OX І OY, тому <u>кут між ними дорівнює 90^o.</u>

Приклад. Знайти похідну функції $z=x^2-y^2$ в точці $M(1,1)$, в напрямку l, що складає кут 60^o з додатнім напрямком осі OX.

Розв'язання. Знайдемо спочатку часткові похідні і градієнт в точці M: $z'_x=2x$; $z'_y=-2y$; $\overline{grad}\ z(M)=(2,-2)$. Одиничний вектор напрямку, що складає кут 60^o з додатнім напрямком осі OX, має координати $\bar{e}=\left(\frac{1}{2};\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$. Згідно до формули (3.5)

$$\frac{\partial z(A)}{\partial l}=(2,-2)\cdot\left(\frac{1}{2};\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=\underline{1-\sqrt{3}}.$$

Приклад. Знайти градієнт функції $z=\ln(xy^2+1)$ в точці $A(1,1)$ і похідну в цій точці за напрямком вектора $\bar{a}=(-3,-4)$.

Розв’язання. $z'_x = \dfrac{y^2}{xy^2+1}$; $\quad z'_y = \dfrac{2xy}{xy^2+1}$; $\quad \overline{grad}\, z(A) = \left(\dfrac{1}{2},1\right)$;

$$\bar{e} = \frac{\bar{a}}{|\bar{a}|} = \frac{(-3,-4)}{\sqrt{(-3)^2+(-4)^2}} = \left(-\frac{3}{5};-\frac{4}{5}\right);$$

$$\frac{\partial z(A)}{\partial e} = \left(\frac{1}{2},1\right)\cdot\left(-\frac{3}{5};-\frac{4}{5}\right) = -\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{5} - 1\cdot\frac{4}{5} = -\frac{11}{10} = -1{,}1 .$$

16.7.3. Формула Тейлора функції багатьох змінних.

Для функції однієї змінної $\varphi(t)$, що є диференційовною n раз в δ - околі т. t_0, формула Тейлора з залишковим членом у формі Лагранжа має вигляд

$$\varphi(t) = \varphi(t_0) + \frac{\varphi'(t_0)}{1!}(t-t_0) + \frac{\varphi''(t_0)}{1!}(t-t_0)^2 + \ldots + \frac{\varphi^{(n+1)}(t_0)}{(n-1)!}(t-t_0)^{n-1} +$$

$$. \qquad + \frac{\varphi^{n}(t_0+\theta(t-t_0))}{n!}(t-t_0)^n, \quad \theta \in (0,1).$$

Якщо t - незалежна змінна, то

$\Delta\varphi(t_0) = \varphi(t) - \varphi(t_0)$, $\quad \Delta t = t - t_0 = dt$, $\quad d\varphi(t_0) = \varphi'(t_0)dt$,

$d^i\varphi(t_0) = \varphi^{(i)}(t_0)(dt)^i$,

а формула Тейлора має вигляд

$$\Delta\varphi(t_0) = \frac{d\varphi(t_0)}{1!} + \frac{d^2\varphi(t_0)}{2!} + \ldots + \frac{d^{n-1}\varphi(t_0)}{(n-1)!} + \frac{d^n\varphi(t_0+\theta(t-t_0))}{n!}$$

Припущення: $f(x,y)$ - диференційовна n разів в δ - околі т. (x_0,y_0). Достатні умови для виконання цього припущення: неперервність усіх часткових похідних n -ого порядку в δ - околі т. (x_0,y_0).

Позначення:

$x = x_0 + \Delta x = x_0 + h, \qquad \Delta x = h$,

$y = y_0 + \Delta y = y_0 + k, \qquad \Delta y = k$,

$(x,y) \in V_\delta(x_0,y_0)$,

$\varphi(t) = f(x_0+ht, y_0+ht).$

Тоді

$\varphi(0) = f(x_0,y_0)$,

$\varphi(1) = f(x,y) = f(x_0+h, y_0+k)$,

$\Delta\varphi(0) = \varphi(1) - \varphi(0) = \Delta f(x_0,y_0)$,

$$d\varphi(0)=df(x_0,y_0)=\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)dx+\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)dy\ .$$

Застосуємо інваріантні форми вищих диференціалів, якщо x, y - лінійні:

$$d^2\varphi(0)=d^2f(x_0,y_0)=\left(\frac{\partial}{\partial x}dx+\frac{\partial}{\partial y}dy\right)^2 f(x_0,y_0)\ ,\ldots,$$

$$\boxed{\Delta f(x_0,y_0)=\sum_{i=1}^{n-1}\frac{1}{i!}\left(\frac{\partial}{\partial x}h+\frac{\partial}{\partial y}k\right)^i f(x_0,y_0)+\frac{1}{n!}\left(\frac{\partial}{\partial x}h+\frac{\partial}{\partial y}k\right)^n f(x_0+\theta(x-x_0),\,y_0+\theta(y-y_0))\,.}$$

- це формула Тейлора функції двох змінних із залишковим членом у формі Лагранжа. Тут $R_n(x_0,y_0)=\dfrac{1}{n!}\left(\dfrac{\partial}{\partial x}h+\dfrac{\partial}{\partial y}k\right)^n f(x_0+\theta h,\ y_0+\theta k)$ - залишковий член формули Тейлора у формі Лагранжа. Можна довести, що $R_n(x_0,y_0)=o(\rho^n)$ - залишковий член у формі Пеано.

$$\rho=\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}=\sqrt{h^2+k^2}\ ,\quad \lim_{\rho\to 0}\frac{o\left(\rho^n\right)}{\rho^n}=0\ .$$

Розглянемо частковий випадок

$$n=1:\quad \Delta f(x_0,y_0)=\left(\frac{\partial}{\partial x}h+\frac{\partial}{\partial y}k\right)f(x_0+\theta h,\ y_0+\theta k)$$

або

$$f(x_0+h,y_0+k)-f(x_0,y_0)=\frac{\partial f}{\partial x}f(x_0+\theta h,\ y_0+\theta k)\cdot h+\frac{\partial f}{\partial y}f(x_0+\Theta h,\ y_0+\Theta k)\cdot k$$

це формула Лагранжа для функції двохзмінних.

16.7.4. Поняття локального екстремуму функції багатьох змінних. Необхідна умова локального екстремуму.

🗀**Означення.** Точка $\bar{x}_0$ називається точкою локального максимуму (мінімуму) функції $f(\bar{x})$, якщо існує δ-окіл цієї точки, в межах якого значення функції $f(\bar{x}_0)$ – найбільше (найменше) серед усіх інших значень функції, тобто

$\bar{x}_0$ – loc max (min) функції $f(\bar{x})$

$$\overset{def}{\Leftrightarrow}\quad \exists\delta>0\forall\bar{x}\in O_\delta(\bar{x}_0)\ f(\bar{x})\le f(\bar{x}_0)\ \left(f(\bar{x})\ge f(\bar{x}_0)\right).$$

Якщо $\exists\delta>0\forall\bar{x}\in O_\delta(\bar{x}_0)\ f(\bar{x})<f(\bar{x}_0)\ \left(f(\bar{x})>f(\bar{x}_0)\right)$, то т. x_0 називається точкою нестрогого $loc\max$ ($loc\min$).

Приклад.

16 ФУНКЦІЇ БАГАТЬОХ ЗМІННИХ

1) Оскільки функція $z=(x-2)^2+\left(y-3\right)^2$ невід'ємна, тобто $z\ge 0$, то, розглянувши точку $M\left(2,3\right)$, отримаємо $z(M)=0\ge z(x,y)$. Це означає, що ця точка $M\left(2,3\right)$ є точкою локального мінімуму. Нехай $(x,y)\ne\left(2,3\right)$, тоді $z(x,y)>z(M)\Rightarrow M$ - точка строгого $loc\min$.

2) Розглянемо функцію $z=(x-y)^2$. Будь яка точка $M(x_0,x_0)$, що лежить на прямій $x=y$ є точкою локального мінімуму. Цей локальний мінімум строгий чи нестрогий? Розглянемо точка $M_1\left(x_0+\dfrac{\delta}{2},x_0+\dfrac{\delta}{2}\right)$ із δ - околу точки $M(x_0,x_0)$. В цій точці $z(M_1)=z(M)$, тому $z(x,y)>z(M)\ \ \forall\left(x,y\right)\in V_\delta(M)$.

Отже, M - точка нестрогого $loc\min$.

🗀**Означення.** Точками локального екстремуму називаються точки локального максимуму і мінімуму.

Теорема *(необхідна умова локального екстремуму).* Якщо функція $f(\bar{x})$ в точці $\bar{x}_0$ має локальний екстремум, і в цій точці функція має скінченні часткові похідні, то всі ці часткові похідні дорівнюють нулю, тобто

$$\frac{\partial f(\bar{x}_0)}{\partial x_i}=0\quad \forall i=1,...,m\ . \tag{6}$$

Скорочений запис:

$$\left.\begin{array}{l} f(\bar{x})\ \text{має}\ loc\,extr\ \text{в т.}\ \bar{x}_0 \\ \forall i=1,...,m\ \exists\dfrac{\partial f}{\partial x_i}(\bar{x}_0) \end{array}\right\}\Rightarrow \frac{\partial f(\bar{x}_0)}{\partial x_i}=0\quad \forall i=1,...,m$$

Доведення. Нехай для визначеності т. $\bar{x}_0$ - точка $loc\max\ \Rightarrow\exists\delta>0:\forall\bar{x}\in V_\delta\left(\bar{x}_0\right)\quad f(\bar{x})\le f(\bar{x}_0)$, де $\bar{x}_0=\left(x_1^{(0)},\ldots,x_i^{(0)},\ldots,x_m^{(0)}\right)$, $\bar{x}=\left(x_1^{(0)}+h_1,\ldots,x_i^{(0)}+h_i,\ldots,x_m^{(0)}+h_m\right)$.

Нехай $h_j=0\ \ \forall\,j\ne i$, тоді

$f(x_1^{(0)},\ldots,x_{i-1}^{(0)},x_i^{(0)}+h_i,x_{i+1}^{(0)},\ldots,x_m^{(0)})\le f\left(x_1^{(0)},\ldots,x_i^{(0)},\ldots,x_m^{(0)}\right)$.

Це означає, що за змінними x_i функція має $loc\max$ в т. $\bar{x}_0$. Тоді за теоремою Ферма (н. у. $extr$ Ф13) $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}\left(\bar{x}_0\right)=0\ \ \forall\,i=\overline{1,m}$. ■

Наслідок.

$$\left.\begin{array}{l} f(\bar{x}) \text{ має } loc\,extr \text{ в т. } \bar{x}_0 \\ f(\bar{x}) \text{ диференційовна в т. } \bar{x}_0 \end{array}\right\} \Rightarrow df(\bar{x}_0) = 0$$

Дійсно, $f(\bar{x})$ диференційована в т. $\bar{x}_0$

$$\left.\begin{array}{r} \Rightarrow \exists\, df(\bar{x}_0) \Rightarrow df(\bar{x}_0) = \sum\limits_{i=1}^{m} \dfrac{\partial f}{\partial x_i}\left(\bar{x}_0\right) dx_i \\ \dfrac{\partial f}{\partial x_i}\left(\bar{x}_0\right) = 0 \quad \forall i = 1,\dots,m \end{array}\right\} \Rightarrow df(\bar{x}_0) = 0 \,. \ \blacksquare$$

Іншими словами, згідно до останньої теореми, обертання в нуль усіх часткових похідних функції в точці є необхідною умовою локального екстремуму.

Точки, в яких виконується необхідна умова екстремуму, тобто умова (3.6) є лише *підозрілими на екстремум* точками (*стаціонарними або критичними*). Для того, щоб впевнитися в тому, що ці точки дійсно є точками екстремуму, необхідно ще перевірити достатню умову екстремуму.

16.7.5. Достатні умови локального екстремуму функції двох змінних.

Теорема *(достатні умови локального екстремуму функції двох змінних)***.** Якщо функція $z = f(x,y)$ двічі диференційована в деякому околі точці (x_0, y_0), і в цій точці

$$\frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial y} = 0\,, \tag{9}$$

то за умови $\Delta = AC - B^2 \neq 0$, де $A = f''_{xx}(x_0,y_0)$, $B = f''_{xy}(x_0,y_0)$, $C = f''_{yy}(x_0,y_0)$, в точці (x_0,y_0) маємо

а) *мінімум*, якщо $A > 0 \wedge \Delta > 0$,

б) *максимум*, якщо $A < 0 \wedge \Delta > 0$,

в) *відсутність екстремуму*, якщо $\Delta < 0$.

Якщо $\Delta = 0$, то приходимо до висновку про екстремум, виходячи з визначень локальних екстремумів.

Доведення. Припущення формули Тейлора виконується, тому

$$\Delta f(x_0,y_0) = f(x,y) - f(x_0,y_0) = f(x_0+h, y_0+h) - f(x_0,y_0) =$$
$$= \underbrace{df(x_0,y_0)}_{=0} + \frac{1}{2} d^2 f(x_0 + \theta h, y + \theta k),$$

підставимо формулу представлення другого диференціалу через другі часткові похідні, а потім застосуємо неперервність цих часткових похідних в точці (x_0, y_0) (твка переревнсть випливає із двічі диференційовності функції в цій точці)

$$f(x_0+h, y_0+h) - f(x_0, y_0) = \frac{1}{2}\left(\underbrace{\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0+Qh, y_0+Qk)h^2}_{=\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0)+\alpha(h,k)=A+\alpha} + 2\underbrace{\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(\ldots)hx}_{B+\beta} + \underbrace{\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(\ldots)k^2}_{C+\gamma} \right);$$

тут $\alpha(h,k) \underset{\substack{h\to 0 \\ h\to 0\ (\rho\to 0)}}{\to} 0, \qquad \beta = \beta(h,k) \underset{\rho\to 0}{\to} 0$.

$$f(x_0+h, y_0+k) - f(x_0, y_0) = \left\{ Ah^2 + 2Bhk + Ck^2 + \alpha h^2 + 2\beta hk + \gamma k^2 \right\} \frac{1}{2}.$$

Мета: знайти $sign(f(x_0+h, y_0+k) - f(x_0, y_0))$. В залежності від знаку приросту функції в околі точки (x_0, y_0) приходимо до висновку про тип екстремуму.

Нехай

$h = \rho\cos\varphi,$

$k = \rho\sin\varphi,$

$\rho = \sqrt{h^2+k^2},$

тоді

$$f(x_0+h, y_0+k) - f(x_0, y_0) =$$

$$= \frac{\rho^2}{2}\underbrace{(A\cos^2\varphi + 2B\cos\varphi\sin\varphi + C\sin^2\varphi)}_{\Phi(\varphi)} + \frac{\rho^2}{2}\underbrace{(\alpha\cos^2\varphi + 2\beta\cos\varphi\sin\varphi + \gamma\sin^2\varphi)}_{\Sigma(\varphi)}.$$

Якщо $\sin\varphi \neq 0$, то введемо заміну $t = ctg\,\varphi$. Тоді

$\Phi(\varphi) = \sin^2\varphi\left(At^2 + 2Bt + C\right)$.

Якщо $\cos\varphi \neq 0$, то введемо заміну $t = tg\,\varphi$. Тоді

$\Phi(\varphi) = \cos^2\varphi\left(A + 2Bt + Ct^2\right)$.

а) Нехай спочатку $\Delta = AC - B^2 > 0$. Для многочленів

$At^2 + 2Bt + C$ і $A + 2Bt + Ct^2$

$$\frac{D}{4} = B^2 - AC = -\Delta < 0 \Rightarrow \begin{matrix} \text{якщо } A>0 & sign\Phi(\varphi) > 0 \\ \text{якщо } A<0 & sign\Phi(\varphi) < 0 \end{matrix}.$$

Оскільки $\Delta > 0 \Rightarrow signC = signA$.

Оскільки $\Sigma(\varphi)$ являє собою НМФ, то він не випливає на $sign(\ \Phi+\Sigma\ )$, тому $sign(\ \Phi+\Sigma\ )$ визначається $sign\,\Phi$. Доведемо це. Якщо $A > 0 \wedge \Delta > 0$, то $\Phi > 0$

$$\left.\begin{array}{l}\Phi(\varphi) > 0 \forall\varphi \in [0, 2\pi] \\ \Phi(\varphi) - \textit{є неперервною за змінною}\, \varphi \in [0, 2\pi]\, \textit{функцією}\end{array}\right\} \Rightarrow \inf_{\varphi\in[0,2\pi]} \Phi(\varphi) = m > 0 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \Phi(\varphi) \geq m > 0 \forall\varphi \in [0, 2\pi].$$

Оскільки Σ - НМФ $\Rightarrow |\Sigma| \leq \dfrac{m}{2}$ в деякому околі точки $M_0(x_0, y_0)$, тому

$$\Phi + \Sigma \geq \Phi - |\Sigma| \geq m - \frac{m}{2} = \frac{m}{2} > 0$$

Висновок: $\Phi > 0 \Rightarrow \Phi + \Sigma > 0$.

Отже, при $\Delta > 0 \wedge A > 0$ маємо $\Delta f(x_0, y_0) \geq \dfrac{m}{2} > 0$. Тому $f(M) \geq f(M_0)$ у всіх точках M, що лежать в околі точки $M_0(x_0, y_0)$. Таким чином, т. $M_0(x_0, y_0)$ - точка $\min$.

б) Нехай тепер $\Delta > 0 \wedge A < 0$. Тоді

$$sign\ \Phi < 0 \Rightarrow \sup(1) = \overline{M} < 0 \Rightarrow \Phi < \overline{M} < 0 \Rightarrow |\Sigma| \leq \frac{|\overline{M}|}{2} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \Phi + \Sigma \leq \Phi + |\Sigma| \leq \overline{M} + \frac{|\overline{M}|}{2} = \overline{M} - \frac{|\overline{M}|}{2} = \frac{|\overline{M}|}{2} < 0.$$

Висновок:

$\Delta > 0 \wedge A < 0 \Rightarrow \Delta f(x_0, y_0) < 0 \Rightarrow f(M) \leq f(M_0) \Rightarrow m.M_0(x_0, y_0) - m.loc\max$.

в) Нехай $\Delta < 0$. Визначимо $sign(1)$, тоді, врахувавши, що $sign(\ \Phi + \Sigma\ ) = sign\Phi$, зробимо висновок щодо знаку $\Delta f(x_0, y_0)$.

Нехай $A \neq 0$, тоді

$$\Phi = A\cos^2\varphi + 2B\cos\varphi\sin\varphi + C\sin^2\varphi =$$
$$= \frac{1}{A}\left(A^2\cos^2\varphi + 2AB\cos\varphi\sin\varphi + B^2\sin^2\varphi + \sin^2\varphi\left(-B^2 + CA\right)\right) =$$
$$= \frac{1}{A}\left(\left(A\cos\varphi + B\sin\varphi\right)^2 + \Delta\sin^2\varphi\right).$$

Оберемо φ_1 таким, щоб $A\cos\varphi_1 + B\sin\varphi_1 = 0$, тоді

$$\Phi(\varphi_1) = \frac{\Delta}{A}\sin^2\varphi_1 \Rightarrow sign(1)\,(\varphi_1) = -signA.$$

Якщо $\varphi_2 = 0$, тоді

$$\Phi(\varphi_2) = A \Rightarrow sign\Phi(\varphi_2) = signA.$$

Отже, у випадку $\Delta < 0$, $A \neq 0$ приріст даної функції $\Delta f(x_0, y_0)$ змінює знак в околі т. $M_0(x_0, y_0)$, тому (x_0, y_0) - не є т. *extr*.

Нехай тепер $A = 0$, тоді

$\Phi = 2B\cos\varphi\sin\varphi + C\sin^2\varphi = \sin^2\varphi\cdot\left(2B\cos\varphi + C\sin\varphi\right)$.

Можливі такі випадки:

$\varphi_1 : \left|2B\cos\varphi_1\right| > \left|C\sin\varphi\right| \quad \Rightarrow \quad sign\Phi(\varphi_1) = sign\left(2B\cos\varphi_1\right)$,

$\varphi_2 = -\varphi_1 \quad \Rightarrow \quad \sin^2\varphi_2\left(2B\cos\varphi_2 + C\sin\varphi_2\right) = -\sin^2\varphi_1\left(2B\cos\varphi_1 - C\sin\varphi_1\right)$,

тому $sign\Phi\left(\varphi_1\right) = -sign\Phi\left(\varphi_2\right)$.

Отже, у випадку $\Delta < 0$, $A = 0$ приріст даної функції $\Delta f(x_0, y_0)$ змінює знак в околі т. $M_0\left(x_0, y_0\right)$, тому $\left(x_0, y_0\right)$ - не є т. $extr$.

г) Нарешті, розглянемо випадок $\Delta = 0$, який можна характеризувати, як сумнівний. Дослідимо функцію $f\left(x, y\right) = x^4 + y^4$:

$$\left.\begin{matrix} f_x' = 4x^3 = 0 \\ f_y' = 4y^3 = 0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow M\left(0,0\right) \text{ - критична точка;}$$

$$\left.\begin{matrix} A = f_{xx}''\left(M\right) = 12x^2\big|_{(0,0)} = 0 \\ B = f_{yy}''\left(M\right) = 0 \\ C = f_{yy}''\left(M\right) = 12y\big|_{(0,0)} = 0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \Delta = AC - B^2 = 0\cdot 0 - 0^2 = 0\,!$$

$f(x, y) \geq 0 = f\left(0,0\right) \Rightarrow M\left(0,0\right)$ - точка $\min\left(extr\right)$.

Таким чином, функція $f\left(x, y\right) = x^4 + y^4$ в точці $M\left(0,0\right)$ має $\Delta = 0$ і в цій точці є екстремум.

Дослідимо тепер функцію $f\left(x, y\right) = x^4 + y^3$:

$$\left.\begin{matrix} f_x' = 4x^3 = 0 \\ f_y' = 3y^2 = 0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow M\left(0,0\right) \text{ - критична точка;}$$

$$\left.\begin{matrix} A = f_{xx}''(M) = 12x^2\big|_M = 0 \\ B = f_{yy}''(M) = 0 \\ C = f_{yy}''(M) = 6y\big|_M = 0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \Delta = 0\,!$$

Розглянемо точку $M_1\left(0, \dfrac{\delta}{2}\right)$, в ній $f\left(M_1\right) = \dfrac{\delta^3}{8} > 0 = f(M)$ і точку $M_2\left(0, -\dfrac{\delta}{2}\right)$, в ній $f\left(M_2\right) = -\dfrac{\delta^3}{8} < 0 = f(M) \quad \Rightarrow$ в т. $M\left(0,0\right)$ - немає $extr$.

Висновок: $\Delta = 0 \begin{Bmatrix} \exists extr \\ не\,\exists extr \end{Bmatrix} \Rightarrow \Delta = 0$??? . ■

16.7.6. Достатні умови локального екстремуму функції багатьох змінних $\left(m \geq 2\right)$.

Для того, щоб впевнитися в тому, що критичні точки дійсно є точками екстремуму, необхідно ще перевірити достатню умову екстремуму. Для цього в припущенні про двічи диференційовність функції в цій точці потрібно побудувати другий диференціал функції

$$d^2 f(\bar{x}_0) = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{m} a_{ij} dx_i dx_j \text{ , де } a_{ij} = \frac{\partial^2 f(\bar{x}_0)}{\partial x_i \partial x_j} \quad (i, j = 1,...,m) .$$

Він представляє собою квадратичну форму.

Кажуть, що квадратична форма додатньо (від'ємно) визначена якщо для всіх значень dx_k, які водночас не дорівнюють нулю, вона приймає строго додатні (від'ємні) значення (k=1*,…,m)*.

Із курсу алгебри відомо, що для відповіді на питання про *знак квадратичної форми* застосовують критерій Сильвестра. Для цього спочатку утворюють матрицю квадратичної форми і обчислюють її головні мінори:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2m} \\ ... & ... & ... & ... \\ a_{m1} & a_{m2} & ... & a_{mm} \end{pmatrix};$$

$$A_1 = a_{11}; \quad A_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}; \quad A_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}; ...; A_m = \det A .$$

Теорема *(критерій Сильвестра).* Для того, щоб квадратична форма була додатньо (від'ємно) визначеною необхідно і достатньо, щоб усі головні мінори її матриці були додатні (знакопочережні, починаючи з віл'ємного знаку), тобто

для додатньо визначеної: $A_1 > 0; A_2 > 0; A_3 > 0; ...; A_m > 0;$ (7)

для від'ємно визначеної: $A_1 < 0;\ A_2 > 0;\ A_3 < 0;\ A_4 > 0; ...$. (8)

Теорема *(достатня умова локального екстремуму).* Якщо двічи диференційована функція $f(\bar{x})$ в стаціонарній точці $\bar{x}_0$ (тобто в такій точці, що $df(\bar{x}_0) = 0$) має другий диференціал, який є

а) додатньо визначеною квадратичною формою, то $\bar{x}_0$ – точка *мінімуму*,

б) від'ємно визначеною квадратичною формою, то $\bar{x}_0$ – точка *максимуму*,

в) знакозмінною квадратичною формою, то в точці $\bar{x}_0$ *відсутній екстремум*.

Доведення. $d^2 f\left(\overline{x}_0\right)=\left(\frac{\partial}{\partial x_1}h_1+\ldots+\frac{\partial}{\partial x_m}h_m\right)^2 f\left(\overline{x}_0\right)=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{m}a_{ij}h_i h_j$.

Розглянемо розклад цієї функції за формулою Тейлора і застосуємо необхідну умову локального екстремуму:

$$\Delta f\left(\overline{x}_0\right)=\underbrace{df\left(\overline{x}_0\right)}_{=0}+\frac{1}{2}d^2 f\left(\overline{x}_0\right)+o\left(\rho^2\right)=\frac{1}{2}\sum_i\sum_j a_{ij}h_i h_j+o\left(\rho^2\right)=$$

$$=\left\|\begin{matrix} h_i=\rho\cos\varphi_i \\ \xi_i=\cos\varphi_i\end{matrix}\right\|=\rho^2\left(\frac{1}{2}\sum_i\sum_j a_{ij}\xi_i\xi_j+\underbrace{\frac{o\left(\rho^2\right)}{\rho^2}}_{=\alpha(\rho)}\right)=$$

$$=\rho^2\left(\underbrace{\frac{1}{2}\sum_i\sum_j a_{ij}\xi_i\xi_j}_{\Phi}+\underbrace{\alpha\left(\rho^2\right)}_{\Sigma}\right),\quad \lim_{\rho\to 0}\alpha\left(\rho\right)=0$$

<u>1 випадок.</u> Якщо $d^2 f\left(\overline{x}_0\right)>0\Rightarrow\Delta f\left(\overline{x}_0\right)>0$, оскільки Σ НМФ і не впливає на $sign\left(\Phi+\Sigma\right)$ $\Rightarrow$ $\Delta f\left(\overline{x}\right)\geq f\left(\overline{x}_0\right)$ $\forall\overline{x}\in V_\delta\left(\overline{x}_0\right)$ $\Rightarrow\overline{x}_0$ - т. min

<u>2 випадок.</u> Аналогічно $d^2 f\left(\overline{x}_0\right)<0\Rightarrow\max$.

Тепер пояснемо, чому значення Σ не впливає на знак приросту функції.

Якщо в 1 випадку $d^2 f\left(\overline{x}_0\right)>0$, тоді за означенням $\xi=\left(\xi_1,\xi_2,\ldots,\xi_m\right)$ задовольняє рівнянню $\xi_1^2+\xi_2^2+\ldots+\xi_m^2=1$, тому $\xi\in S_1\left(\overline{0}\right)$. Оскільки $S_1(\overline{0})$ замкнена і обмежена множина в $\mathbb{R}_2^m$, то за теоремою Вейєрштрасса №2, неперервна функція $\Phi(\overline{\xi})$ на замкненій, обмеженій множині досягає найменшого значення: $\Phi\geq m>0$. Оскільки Σ - НМФ, то $\left|\Sigma\right|\leq\frac{m}{2}$. Отже,

$$\Delta f\left(\overline{x}_0\right)=\Phi+\Sigma\geq\Phi-\left|\Sigma\right|\geq m-\frac{m}{2}=\frac{m}{2}>0 ,$$

тому $f(\overline{x})>f(\overline{x}_0)$, тобто $\overline{x}_0$ – точка min . У випадку 2 аналогічно.

<u>3 випадок:</u> $d^2 f$ - знакозмінна. Приріст функції було представлено у вигляді:

$$\Delta f\left(\overline{x}_0\right)=\underbrace{\frac{1}{2}\sum_i\sum_j a_{ij}h_i h_j}_{=r\left(\overline{h}\right)}+O\left(\rho^2\right).$$

Оскільки $d^2 f$ - знакозмінна квадратична форма, тому

а) $\exists\, \overline{k}^{'} : r\left(k^{'}\right) > m > 0$, б) $\exists\, \overline{k}^{''} : r\left(k^{''}\right) < M < 0$.

Розглянемо випадок а). Покладемо $\Delta x_i^{'} = h_i^{'} = k_i^{'} t^{'} \ \left(i = \overline{1,m}\right)$, $t^{'} \neq 0$, тоді

$$r(\overline{h}^{'}) = \frac{1}{2}\sum_i \sum_j a_{ij} h_i^{'} h_j^{'} > \frac{\left(t^{'}\right)^2}{2} m > 0,$$

$$\left|o\left(\rho^2\right)\right| = \left|o\left(h_1^{'2} + h_2^{'2} + \ldots + h_m^{'2}\right)\right| = \left(t^{'}\right)^2 \cdot \left|o\left(h_1^{'2} + h_2^{'2} + \ldots + h_m^{'2}\right)\right| < \left(t^{'}\right)^2 \cdot \frac{m}{4},$$

звідки $\Delta^{'} f\left(\overline{x}_0\right) > \dfrac{\left(t^{'}\right)^2}{2} m - \left(t^{'}\right)^2 \cdot \dfrac{m}{4} > 0$. У випадку б) аналогічно $\Delta^{''} f\left(\overline{x}_0\right) < 0$. Отже, $f(\overline{x}^{'}) - f\left(\overline{x}_0\right) > 0$, $f(\overline{x}^{''}) - f\left(\overline{x}\right) < 0$, тому в т $\overline{x}_0$ *відсутній екстремум*. ■

Зауваження. До точок, підозрілих на екстремум, належать також і ті, в яких часткові похідні першого порядку не існують, тоді для з'ясування того, чи буде в них екстремум використовують означення екстремуму.

Приклад. Дослідити на екстремум наступні функції

а) $z = x^4 + y^4 - x^2 - 2xy - y^2$; б) $z = 1 - \sqrt{x^2 + y^2}$;

в) $u = x^3 + y^2 + z^2 + 12xy + 2z$.

Розв'язання. а) Знаходимо стаціонарні точки з умови (3.9), розв'язавши систему рівнянь

$$\begin{cases} z'_x = 4x^3 - 2x - 2y = 0 \\ z'_y = 4y^3 - 2x - 2y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4x^3 - 4y^3 = 0 \\ x = 2y^3 - y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = y \\ y = 2y^3 - y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = y \\ \left[\begin{array}{l} y = 0 \\ y = 1 \\ y = -1 \end{array}\right. \end{cases}.$$

Отримаємо стаціонарні точки: $M_1(0{,}0); M_2(1{,}1); M_3(-1{,}-1)$.

Знаходимо другі часткові похідні:

$$z''_{xx} = 12x^2 - 2; \quad z''_{xy} = -2; \quad z''_{yy} = 12y^2 - 2,$$

звідки маємо:

$$A_1 = -2; B_1 = -2; C_1 = -2; \Delta_1 = 0.$$

Так як $\Delta_1 = 0$, то з'ясовуємо, чи буде ця точка точкою екстремуму за означеннями 3.2 і 3.3. Нехай $y = x$, тоді $z(x,x) = 2x^4 - 4x^2 = 2x^2(x^2 - 2)$. Якщо $0 < x < \sqrt{2}$, то $z(x,x) < 0 = z(0{,}0)$. Нехай тепер $y = -x$, тоді

$z(x,-x) = 2x^4 > 0 = z(0,0)\ \forall x > 0$. З отриманого приходимо до висновку, що в будь-якому околі радіусу, меншого за $\sqrt{2}$, значення функції можуть бути, як більшими за значення в точці (0,0), так і меншими. *Загальний висновок*: в точці $\underline{M_1(0,0) - \text{немає extr}}$.

Тепер розглянемо інші дві точки:

$A_{2,3} = 10;\ B_{2,3} = -2;\ C_{2,3} = 10;\ \Delta_{2,3} = 96; \quad A_{2,3} > 0;\ \Delta_{2,3} > 0 \Rightarrow \underline{M_{2,3}(\pm 1, \pm 1) - \min}$.

б) Часткові похідні цієї функції $z'_x = \dfrac{-2x}{2\sqrt{x^2+y^2}}$; $z'_y = \dfrac{-2y}{2\sqrt{x^2+y^2}}$ ніде не обертаються в нуль, а в точці (0,0) не існують, тому будемо досліджувати цю точку на екстремум за означеннями 3.2 і 3.3. Маємо

$z(0,0) = 1, \quad z = 1 - \sqrt{x^2+y^2} < 1 = z(0,0) \forall (x,y) \in IR^2 \Rightarrow \underline{(0,0) - \max}$.

в) Знаходимо стаціонарні точки:

$$\begin{cases} u'_x = 3x^2 + 12y = 0 \\ u'_y = 2y + 12x = 0 \\ u'_z = 2z + 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -x^2/4 \\ -x^2/4 + 6x = 0 \\ z = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -x^2/4 \\ \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = 24 \end{array}\right. \\ z = -1 \end{cases}.$$

Отримаємо стаціонарні точки: $M_1(0,0,-1); \quad M_2(24,-144,-1)$.

Знаходимо другі часткові похідні:

$$u''_{xx} = 6x; \quad u''_{yy} = u''_{zz} = 2; \quad u''_{xy} = 12; \quad u''_{xz} = u''_{yx} = 0,$$

для використання теореми 3.4 і критерію Сильвестра обчислюємо головні мінори матриці квадратичної форми другого диференціалу досліджуваної функції:

$$A_1 = u''_{xx} = 6x; \quad A_2 = \begin{vmatrix} u''_{xx} & u''_{xy} \\ u''_{yx} & u''_{yy} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 6x & 12 \\ 12 & 2 \end{vmatrix} = 12x - 144;$$

$$A_3 = \begin{vmatrix} u''_{xx} & u''_{xy} & u''_{xz} \\ u''_{yx} & u''_{yy} & u''_{yz} \\ u''_{zx} & u''_{zy} & u''_{zz} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 6x & 12 & 0 \\ 12 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 2 \cdot \begin{vmatrix} 6x & 12 \\ 12 & 2 \end{vmatrix} = 24x - 288.$$

Розглянемо спочатку точку $M_2(24,-144,-1)$, для неї $A_1 = 144 > 0$; $A_2 = 144 > 0$; $A_3 = 288 > 0 \Rightarrow \underline{M_2(24,-144,-1) - \min}$.

В точці $M_1(0,0,-1)$ маємо $A_2 < 0$, тому в точці $\underline{M_1(0,0,-1) - \text{немає extr}}$.

16.7.7. Умовний екстремум. Елементи теорії неявних функцій. Іноді практика вимагає знаходити екстремуми функції за якихось умов. Наприклад, необхідно знайти максимум функції прибутку фірми при випуску декількох видів товарів за умови, що є певна квота на загальний об'єм виробництва.

В деяких випадках можна дати *геометричну інтерпретацію* поставленої задачі. Наприклад, якщо на функцію $z = f(x, y)$ накласти обмеження $\varphi(x, y) = 0$, то це буде означати, що поверхню $z = f(x, y)$ перетинає циліндрична поверхня $\varphi(x, y) = 0$, в результаті чого отримуємо криву в просторі, на якій треба знайти екстремум.

1 випадок. Якщо умова задається одним рівнянням, із якого одну із змінних можна виразити через інші, то підставивши отриманий вираз в надану функцію, отримаємо задачу на звичайний локальний екстремум.

Якщо умова виражається неявною функцією

$$F\left(u, x_1, \ldots, x_m\right) = 0, \tag{1}$$

наприклад, такою $u^2 + x_1^2 + x_2^2 = 1$, то, коли рівняння (1) можна якимось чином розв'язати відносно u? Відповідь на це запитання дає теорема.

Теорема *(1 випадок)***.**

1) $F\left(u, x_1, \ldots, x_m\right)$ -диф. в деякому околі точки $M_0(u^0, x_1^0, x_2^0, \ldots, x_m^0)$,

2) часткова похідна $\dfrac{\partial F}{\partial u}$ непер. в т. M_0, 3) $\dfrac{\partial F}{\partial u}(M_0) \neq 0$.

$\Rightarrow$

1) $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \exists!$ розв'язок $u = \varphi\left(x_1, \ldots, x_m\right)$ рівняння (1) в δ-околі т. $M^*{}_0(x_1^0, \ldots, x_m^0)$, так що $\left|u - u^0\right| < \varepsilon$,

2) $\varphi\left(x_1, \ldots, x_m\right)$ - непер. і диф. в δ-околі т. M_0^*.

Доведення вивчити за бажанням *самостійно* ✍!

В умовах цієї теореми виведемо формулу для обчислення часткових похідних від функції-розв'язку рівняння (1) $\varphi\left(x_1, \ldots, x_m\right)$:

$$0 = dF = \frac{\partial F}{\partial u} du + \frac{\partial F}{\partial x_1} dx_1 + \ldots + \frac{\partial F}{\partial x_m} dx_m =$$

$$= \frac{\partial F}{\partial u}\left(\frac{\partial u}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial u}{\partial x_2} dx_2 + \ldots + \frac{\partial u}{\partial x_m} dx_m\right) + \frac{\partial F}{\partial x_1} dx_1 + \ldots + \frac{\partial F}{\partial x_m} dx_m;$$

прирівняємо множники при приростах аргументів:

$$\left.\begin{array}{l} dx_1 : \dfrac{\partial F}{\partial u}\cdot\dfrac{\partial u}{\partial x_1}+\dfrac{\partial F}{\partial x_1}=0 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ dx_i : \dfrac{\partial F}{\partial u}\cdot\dfrac{\partial u}{\partial x_i}+\dfrac{\partial F}{\partial x_i}=0 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ dx_m : \dfrac{\partial F}{\partial u}\cdot\dfrac{\partial u}{\partial x_m}+\dfrac{\partial F}{\partial x_m}=0 \end{array}\right\} \Rightarrow \quad \forall i=\overline{1,m} \quad \frac{\partial u}{\partial x_i}=-\frac{\partial F/\partial x_i}{\partial F/\partial u}.$$

2 випадок. Розглянемо систему, що задає умови:

$$\begin{cases} F_1(x_1,\dots,x_m,y_1,\dots,y_n)=0 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ F_n(x_1,\dots,x_m,y_1,\dots,y_n)=0 \end{cases} \qquad (2)$$

Запитання: за яких умов система (2) єдиним чином розв'язується відносно змінних $y_1,\dots,y_n$, тобто

$$\begin{cases} y_1=\varphi_1(x_1,\dots,x_m,) \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \;? \\ y_n=\varphi_n(x_1,\dots,x_m) \end{cases} \qquad (3)$$

Визначник $\left.\dfrac{D(F_1,\dots,F_n)}{D(y_1,\dots,y_n)}\right|_{M_0} = \left.\begin{vmatrix} \dfrac{\partial F_1}{\partial y_1} & \dfrac{\partial F_1}{\partial y_2} & \dots & \dfrac{\partial F_1}{\partial y_n} \\ \dfrac{\partial F_2}{\partial y_1} & \dfrac{\partial F_2}{\partial y_2} & \dots & \dfrac{\partial F_n}{\partial y_n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dfrac{\partial F_n}{\partial y_1} & \dfrac{\partial F_n}{\partial y_2} & \dots & \dfrac{\partial F_n}{\partial y_n} \end{vmatrix}\right|_{M_0}$ називається *якобіаном.*

Теорема *(2 випадок)***.**

1) Усі функції $F_i(x_1,\dots,x_m,y_1,\dots,y_n),\, i=1,\dots,n$ - диф. в деякому околі точки $M_0(x_1^0,\dots,x_m^0,y_1^0\dots,y_m^0)$,

2) часткові похідні під знаком визначника $\dfrac{\partial F_j}{\partial y_i}, i,j=\overline{1,n}$ є непе-

$\Rightarrow$

1) $\forall \varepsilon_1,\dots,\varepsilon_n>0\ \exists\delta>0\ \exists!$ розв'язок (3) системи рівняннь (2) в δ-околі т. $M^*{}_0(x_1^0,\dots,x_m^0)$, так що $|y_1-y_1^0|<\varepsilon_1,\dots,|y_n-y_n^0|<\varepsilon_n$,

2) $\varphi_i(x_1,\dots,x_m), i=\overline{1,n}$ -

рервними в т. M_0, непер. і диф. в δ-околі т. M_0^*.

3) $\left.\frac{D(F_1,\ldots,F_n)}{D(y_1,\ldots,y_n)}\right|_{M_0} \neq 0$.

Доведення вивчити за бажанням *самостійно* ✍!

Означення (*умовного* $extr$*).* Кажуть, що функція $u = f(x_1,\ldots,x_m,y_1,\ldots,y_n)$ має умовний екстремум в т. $M_0(x_1^0,\ldots,x_m^0,y_1^0\ldots,y_n^0)$ за умов (2), якщо координати цієї точки задовольняють умовам (2) і значення цієї функції $f(M_0)$ буде найбільшим (найменшим) серед усіх значень в точках, координати яких задовольняють (2).

<u>І спосіб</u> дослідження функції на умовний $extr$ $(m+n)$ - змінних $u = f(x_1,\ldots,x_m,y_1,\ldots,y_n)$ за умови (2). Нехай виконуються умови останньої теореми, зокрема

$$\left.\frac{D(F_1,\ldots,F_n)}{D(y_1,\ldots,y_n)}\right|_{M_0} \neq 0,$$

Тоді

1) система (2) розв'язується відносно змінних $y_1,\ldots,y_n$ і розв'язок має вигляд (3). Тоді можна підставити в функцію $u = f(x_1,\ldots,x_m,y_1,\ldots,y_n)$ співвідношення (3):
$$u = f\left(x_1,\ldots,x_m,\varphi_1(x_1,\ldots,x_m),\ldots,\varphi_n(x_1,\ldots,x_m)\right);$$
2) цю функцію досліджуємо на $extr$ (u - це функція m змінних);
3) якщо екстремумом цієї функції є точка $A_0\left(x_1^0,\ldots,x_m^0\right)$, тоді умовним екстремумом стане точка
$$M_0\left(x_1^0,\ldots,x_m^0,\varphi_1\left(x_1^0,\ldots,x_m^0\right),\ldots,\varphi_n\left(x_1^0,\ldots,x_m^0\right)\right).$$

В деяких випадках дуже важко реалізувати пкнкт1), наприклад, із умови $u+\ln u+x=0$ виразити u через x.

<u>ІІ спосіб. Метод невизначених множників Лагранжа.</u> дослідження функції на умовний $extr$ $(m+n)$ - змінних $u = f(x_1,\ldots,x_m,y_1,\ldots,y_n)$ за умови (2). Нехай виконуються умови останньої теореми, зокрема

$$\left.\frac{D(F_1,\ldots,F_n)}{D(y_1,\ldots,y_n)}\right|_{M_0} \neq 0 .$$

1) Розглядається функція Лагранжа, в якій де $\lambda_i\,(i=1,...,n)$ – константи:

$$\Phi(x_1,\ldots,x_m,y_1,\ldots,y_n,\lambda_1,\ldots,\lambda_n) = f(x_1,\ldots,x_m,y_1,\ldots,y_n)+$$
$$+\sum_{i=1}^{n}\lambda_i F_i\ (x_1,\ldots,x_m,y_1,\ldots,y_n).$$

2) Знаходяться критичні точки, що задовольняють умові (2). Для цього утворюємо систему, в якій прирівнюємо до нуля часткові похідні за усіма змінними з додаванням до них рівнянь із умови(2). Останнє також можна отримати як результат прирівнювання до нуля похідних за $\lambda_i\,(i=1,...,n)$, що і проілюстровано нижче. А саме:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial\Phi}{\partial x_j} = \dfrac{\partial f}{\partial x_j} + \sum\limits_{i=1}^{n}\lambda_i\dfrac{\partial F}{\partial x_j} = 0 & j=\overline{1,m} \\ \dfrac{\partial\Phi}{\partial y_i} = \dfrac{\partial f}{\partial y_i} + \sum\limits_{i=1}^{n}\lambda_i\dfrac{\partial F}{\partial y_i} = 0 & i=\overline{1,n} \\ \dfrac{\partial\Phi}{\partial\lambda_k} = 0 + \sum\limits_{i=1}^{n}\delta_{ik}F_i = F_k = 0 & k=\overline{1,n} \end{cases} \qquad (*)$$

Ця система містить $m+n+n$ рівнянь з тією ж кількістю змінних $\{x_j\}_{j=1}^{m}$, $\{y_l\}_{i=1}^{n}$, $\{\lambda_k\}_{k=1}^{n}$.

3) Якщо точка $M_0(x_1^0,\ldots,x_m^0,y_1^0\ldots,y_m^0)$ і коефіцієнти $\lambda_1^0,\lambda_2^0,\ldots,\lambda_m^0$ є одним із розв'язків (*), то для того, щоб відповісти на запитання про те чи буде умовним екстремумом т. M_0, потрібно скласти другий диференціал $d^2\Phi(M_0)$, і визначити знак цього диференціалу, маючи на увазі наступне, що змінні $dx_1,...,dx_m,dy_1,...,dy_n$ пов'язані співвідношеннями:

$$\begin{cases} dF_1(M_0)=0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ dF_n(M_0)=0 \end{cases},$$

тобто

$$\left\{\sum_{j=1}^{m}\left.\frac{\partial F}{\partial x_j}\right|_{M_0} dx_j + \sum_{l=1}^{m}\left.\frac{\partial F}{\partial y_i}\right|_{M_0} dy_l\,, \qquad i=\overline{1,n}\,. \right. \qquad (**)$$

Система (**) відносно змінних $dx_1,...,dx_m,dy_1,...,dy_n$ є лінійною, а її визначник дорівнює якобіану, який не дорівнює нулю, тобто

$\left.\dfrac{D(F_1,...,F_n)}{D(y_1,...,y_n)}\right|_{M_0} \neq 0$, тому ця система може бути розв'язаною відносно

Ці розв'язки підставляємо в другий диференціал, після чого застосовуємо до отриманого диференціалу $d^2\Phi(M_0)$ критерій Сильвестра.

III спосіб. Функція Лагранжа досліджується на звичайний екстремум як функція $m+2n$ змінних. До речі, перші два пункти попереднього алгоритму зберігаються

Приклад. Знайти точки умовного екстремуму функції
$u = x - 2y + 2z;\quad x^2 + y^2 + z^2 = 1$;

Розв'язання. Будуємо функцію Лагранжа
$L(x,y,z) = x - 2y + 2z + \lambda\left(x^2 + y^2 + z^2 - 1\right)$.
Досліджуємо її на екстремум

$$\begin{cases} L'_x = 1 + 2\lambda x = 0 \\ L'_y = -2 + 2\lambda y = 0 \\ L'_z = 2 + 2\lambda z = 0 \\ x^2 + y^2 + z^2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1/2\lambda \\ y = 1/\lambda \\ z = -1/\lambda \\ 1/4\lambda^2 + 1/\lambda^2 + 1/\lambda^2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \mp 1/3 \\ y = \pm 2/3 \\ z = \mp 2/3 \\ \lambda = \pm 3/2 \end{cases}.$$

Стаціонарні точки умовного екстремуму: $M_1\left(\frac{1}{3};-\frac{2}{3};\frac{2}{3}\right)$ при $\lambda = -\frac{3}{2}$ і $M_1\left(-\frac{1}{3};\frac{2}{3};-\frac{2}{3}\right)$ при $\lambda = \frac{3}{2}$. Дослідимо першу з них на виконання достатньої умови екстремуму

$L''_{xx} = L''_{yy} = L''_{zz} = 2\lambda;\quad L''_{xy} = L''_{xz} = L''_{yz} = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow d^2L(M_1) = -3(dx^2 + dy^2 + dz^2) < 0 \Rightarrow \underline{M_1\left(\frac{1}{3};-\frac{2}{3};\frac{2}{3}\right) - \textit{умовний}\quad \max}$.

Аналогічно отримаємо, що $\underline{M_2\left(-\frac{1}{3};\frac{2}{3};-\frac{2}{3}\right) - \textit{умовний}\quad \min}$.

Зауважимо, що в даному випадку формулою (3.11) ми не скористалися, оскільки вона не внесла б суттєвих змін у висновки. Дійсно, ця формула в даному прикладі придбала б вигляд $\left(2xdx + 2ydy + 2zdz\right)|_{M_{1,2}} = 0 \Leftrightarrow dx = 2dy - 2dz$. Підстановка в другий диференціал функції Лагранжа цього виразу не змінила б його знаку.

16.7.8. Абсолютний екстремум.

Іноді практика вимагає знаходити екстремуми функції за якихось обмежень у формі нерівностей. Наприклад, необхідно знайти максимум функції попиту при обмеженні часу, обмеженні доходів споживачів і т.п. При розв'язанні таких задач ми спираємось на наступне твердження, яке є наслідком теорем Вейєрштрасса (див. властивості неперервних функцій).

Твердження. Функція $f(\bar{x})$, що диференційована в обмеженій і замкненій області, досягає свого найбільшого і найменшого значень в цій області або в стаціонарних точках, або в межових точках області.

Наведене дає можливість сформулювати **алгоритм пошуку абсолютного екстремуму**:

1) знаходимо стаціонарні точки функції $f(\bar{x})$ і ті точки, в яких часткові похідні не існують;
2) відкидаємо з розгляду ті точки, що не попали до області;
3) *1 спосіб* пошуку стаціонарних точок на межі області: записуємо функції Лагранжа з врахуванням умов, що описують рівняння межі області, і знаходимо їх критичні точки, серед яких відкидаємо ті, що не належать межі області;

   2 спосіб пошуку стаціонарних точок на межі області:

   а) якщо це можливо, виражаємо деякі змінні з рівнянь межі, роблячи їх залежними від інших незалежних змінних;

   б) підставляємо вирази для залежних змінних у вираз для функції $f(\bar{x}) = f(x_1, x_2, ..., x_m)$, отримуємо нову функцію, яка виражається через незалежні змінні;

   в) для нової функції знаходимо стаціонарні точки, серед яких відкидаємо ті, що не належать межі області;
4) додаємо до розгляду крайові точки перетину кривих (поверхонь) області;
5) знаходимо значення функції у всіх знайдених стаціонарних точках області, межі і в крайових точках, щоб обрати серед них найбільше і най

менше значення.

Приклад. Визначити найбільше і найменше значення наступних функцій у вказаних областях:

а) $z = \frac{1}{2}x^2 - xy + y$ в замкненій області, що обмежена параболою $y = \frac{x^2}{3}$ і прямою $y = 3$;

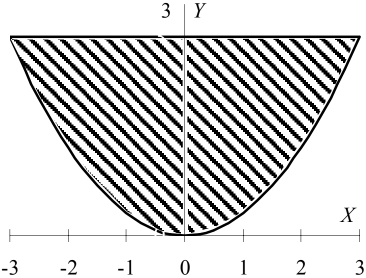


Рис. 16.7.

б) $z = x + y$ в замкненому крузі $x^2 + y^2 \le 1$.

Розв'язання. Знайдемо стаціонарні точки в середині області

$$\begin{cases} z'_x = x - y = 0 \\ z'_y = -x + 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \end{cases}.$$

Маємо першу точку $M_1(1,1)$, яка належить області D (див. на рис. 16.7).

Тепер розглянемо криву $y = x^2/3$. Будемо діяти за другим способом кроку 3 алгоритму. Підставляємо в рівняння функції рівняння кривої межі:

$$u = z\Big|_{y=\frac{x^2}{3}} = \frac{1}{2}x^2 - x\cdot\frac{x^2}{3} + \frac{x^2}{3} = -\frac{x^3}{3} + \frac{5x^2}{6},$$

знаходимо стаціонарні точки отриманої функції: $u'_x = -x^2 + \dfrac{5x}{3} = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow x = 0 \vee x = \dfrac{5}{3}$, що відповідають таким точкам на кривій $y = \dfrac{x^2}{3}$:

$M_2(0,0); M_3\left(\dfrac{5}{3}; \dfrac{25}{27}\right)$, які належать даній області D.

Розглядаємо далі пряму $y = 3$:

$$u = z\Big|_{y=3} = \frac{1}{2}x^2 - 3x + 3; \quad u'_x = x - 3 = 0 \Rightarrow x = 3,$$

на цій прямій $y = 3$ отримаємо наступну точку $M_4(3,3) \in D$.

До додаткового розгляду включаються кутову точку області, що не потрапила до розгляду: $M_5(-3,3)$.

Переходимо до 5 кроку: знаходимо значення функції в отриманих чотирьох точках, щоб серед них знайти найбільше і найменше:

$$z(M_1) = \frac{1}{2}; z(M_2) = 0; \quad z(M_3) = \frac{5^3}{2\cdot 3^4} = \frac{125}{162},$$

$$\underline{z(M_4) = -\frac{3}{2} = \min_D z}; \quad \underline{z(M_5) = \frac{33}{2} = \max_D z}.$$

б) Оскільки $\begin{cases} z'_x = 1 \ne 0 \\ z'_y = 1 \ne 0 \end{cases}$, то стаціонарних точок всередині області немає. На межі, тобто на колі $x^2 + y^2 = 1$, розв'яжемо задачу за допомогою функції Лагранжа: $L(x.y) = x + y + \lambda(x^2 + y^2 - 1)$:

$$\begin{cases} L'_x = 1 + 2\lambda x = 0 \\ L'_y = 1 + 2\lambda y = 0 \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1/2\lambda \\ y = -1/2\lambda \\ 1/4\lambda^2 + 1/4\lambda^2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \mp 1/\sqrt{2} \\ y = \mp 1/\sqrt{2} \\ \lambda = \pm 1/\sqrt{2} \end{cases}.$$

Обидві точки $M_{1,2}\left(\pm 1/\sqrt{2}; \pm 1/\sqrt{2}\right)$ належать колу, а значить і кругу D.

Тепер визначимось з найбільшим і найменшим значеннями: $z(M_1) = \underline{\sqrt{2} = \max\limits_D z}$; $z(M_2) = \underline{-\sqrt{2} = \min\limits_D z}$.